LAS MATEMÁTICAS EN LA ECONOMÍA

A TRAVÉS DE EJEMPLOS EN CONTEXTOS ECONÓMICOS

Clara Calvo **Carlos Ivorra**

Índice general

Preámbulo

Este libro pretende familiarizar al lector con las matemáticas que se encontrará en los primeros cursos universitarios de titulaciones relacionadas con la Economía y la Empresa. La exposición está pensada para ayudar al alumno a asimilar los conceptos matemáticos de forma concreta y tangible, tratando de evitar que la abstracción excesiva le impida comprender el papel que desempeñan en la teoría económica y, más en general, en las aplicaciones de la matemática a la Economía y la Empresa.

1 La estructura del libro

- La teoría está explicada brevemente, y se limita a lo imprescindible para que el lector pueda asimilar los conceptos y resultados necesarios, así como su interpretación, su finalidad y el modo en que pueden emplearse.

- En las explicaciones, las distintas ideas que se exponen están destacadas y separadas mediante puntos • y otros recursos tipográficos.

> Las definiciones y resultados principales que podrían quedar perdidos entre explicaciones aparecen destacados en recuadros centrados como éste, de modo que el lector pueda tener siempre claro cuáles son los hechos principales que debe recapitular de una explicación dada.

> No obstante, el lector debe tener presente que aquellos resultados que ya aparecen claramente destacados y estructurados en el texto principal no se repiten en recuadros, ni tampoco aquellas técnicas que no es posible resumir en pocas palabras, por lo que no sería correcto decir que "basta leer los recuadros" para recorrer todos los contenidos del libro.
> Los recuadros laterales como éste se usan entre otras cosas para matizar las explicaciones del texto principal —como estamos haciendo aquí mismo— o aportar información secundaria adicional, o explicar algunos términos económicos, o recordar conocimientos previos, etc.

- Todos los conceptos se introducen a través de ejemplos en contextos económicos o bien se ilustran con ellos inmediatamente después de haber sido introducidos.

  Acompañando a las explicaciones teóricas, hay dos clases de ejemplos:

Ejemplo 1 Los ejemplos que aparecen con este tipo de letra son realmente ejercicios resueltos que muestran una aplicación típica de la teoría expuesta.

Tras el enunciado aparece siempre la palabra SOLUCIÓN y lo que sigue no es ni más ni menos que lo que el lector debería responder ante una pregunta similar para que pueda considerarse bien contestada.

> Cualquier aclaración adicional destinada a explicar el ejemplo, pero que estaría de más en una simple respuesta al problema planteado, aparece en recuadros laterales como éste.

Ejemplo 2 Los ejemplos que aparecen con la misma letra que el texto principal, o bien son ilustraciones de la teoría que no corresponden al enunciado de un problema específico (se analiza una situación pero no se pide nada en concreto) o bien son enunciados de problemas que están resueltos con explicaciones adicionales insertadas para que se entienda el proceso, pero que no serían necesarias si sólo se tratara de dar una respuesta correcta a la pregunta planteada.

Los recuadros laterales incluyen aclaraciones sobre conceptos de la teoría económica, recordatorios de fórmulas o hechos que el lector debería conocer, resúmenes informales de lo que se está haciendo en el texto principal en palabras que resulten más comprensibles o fáciles de recordar, observaciones en las que se enfatizan aspectos de un ejemplo o ejercicio resuelto que muchos lectores podrían dejar pasar como algo secundario, pero que en realidad son importantes a la hora de considerar la respuesta como correcta o bien expresada, y también propuestas de respuestas alternativas que serían menos precisas o incluso incorrectas, para que el lector pueda contrastarlas con la respuesta dada.

En particular, hemos señalado las respuestas incorrectas con este icono.

Se trata siempre de errores que los estudiantes cometen con frecuencia, a veces por carecer de la base matemática que sería deseable.

Los recuadros como éste incluyen algunas notas y definiciones matemáticas de carácter más técnico que no son necesarias para la comprensión de los contenidos tratados.

- Cada bloque teórico se completa con una selección de problemas resueltos en los que se respeta el mismo criterio seguido en los ejemplos, es decir, la solución incluye únicamente lo que se requiere para que la respuesta pueda considerarse correcta y completa, mientras que todas las explicaciones adicionales aparecen en recuadros laterales.

- Por último, cada apartado termina con una sección de problemas propuestos para que el lector pueda practicar por su cuenta. Algunos de estos problemas combinan contenidos del tema tratado y de los anteriores, mientras que otros están clasificados por contenidos específicos para que el lector pueda ejercitarse específicamente en la medida en que le resulte necesario en cualquier tipo de problema que le suponga una especial dificultad.

- Los primeros problemas propuestos de cada sección (separados de los siguientes por una raya horizontal) son representativos de todos los aspectos tratados en la sección correspondiente, de modo que, hasta cierto punto, puede decirse que si un lector sabe hacer sin vacilar ese grupo de problemas es que tiene un buen dominio de los contenidos de la sección (sin perjuicio de que algunas cuestiones técnicas concretas puedan no aparecer en la selección, pero sí en otros problemas posteriores).

- Al final del libro se incluyen dos apéndices, uno con varios bloques de problemas resueltos en los que se combinan los contenidos de apartados diferentes, y otro similar con problemas propuestos sin solución.

- **Erratas:** Las erratas que se detecten en este libro se recogerán en la página web http://www.uv.es/ivorra/matec

2 Sobre la selección de contenidos y ejemplos

Este libro ha sido concebido como material complementario de apoyo para los alumnos de la asignatura Matemáticas I de los grados en Administración y Dirección de Empresas, Economía y Finanzas y Contabilidad de la Facultad de Economía de la Universidad de Valencia, pero creemos que puede ser de utilidad a todo alumno interesado en comprender el papel que representan las matemáticas en la teoría económica así como sus aplicaciones a la economía y la empresa.

En efecto, teniendo siempre en cuenta el estrecho margen de tiempo que supone un cuatrimestre académico, en su redacción hemos procurado seleccionar los conceptos matemáticos que hemos considerado más relevantes para dicho objetivo y, como ya hemos explicado, los hemos presentado relacionándolos desde el principio con aquellos contextos económicos que nos han parecido más oportunos para hacer comprender al alumno su significado y el interés que tienen para los economistas.

No hemos tratado de presentar teorías "realistas" que reflejen las aplicaciones más frecuentes en la economía de las matemáticas abordadas, lo cual hubiera requerido en muchas ocasiones dedicar muchas páginas a presentar fragmentos considerables de la teoría económica, sino más bien plantear contextos económicos lo suficientemente simples como para que puedan ser comprendidos por el alumno sin presuponer en él ningún requisito previo sobre la teoría económica, pero que erradiquen la percepción que tiende a tener de los conceptos matemáticos como algo abstracto completamente alejado de la realidad cotidiana y, lo que es más grave, de la lógica con la que se enfrenta con eficiencia a las situaciones que comprende realmente.

En la medida de lo posible, hemos procurado que estos contextos económicos se correspondan con los que se va a encontrar en su carrera (microeconomía, estadística, matemáticas financieras, etc.), sea paralelamente en otras asignaturas o en las de cuatrimestres posteriores. En particular, pretendemos que las matemáticas que les enseñamos constituyan una base sólida sobre la que puedan apoyarse los profesores de otras asignaturas que necesiten preliminares matemáticos y en las que los meros rudimentos de teoría económica de los que nos hemos servido puedan desarrollarse debidamente.

Además de los contextos económicos, el segundo pilar en que nos hemos apoyado para evitar en la medida de lo posible que el alumno perciba los contenidos expuestos como algo árido y abstracto ha sido incidir en gran medida en la representación gráfica, presentando y comentando las gráficas de las funciones implicadas en muchos de los problemas y ejemplos incluso aunque ello no sea necesario para abordar los contenidos que se pretende discutir en un momento dado. Esto entronca con el objetivo de dotar al alumno de la base matemática que necesitará en otras asignaturas de su carrera, dado que en muchas de ellas los aspectos cualitativos de la teoría económica se le presentarán a través de gráficas, y es muy importante que aprenda a conectar tales representaciones gráficas con la matemática que tienen detrás.

En cuanto a la selección de contenidos matemáticos, siempre supeditados a la restricción de diseñar un curso que pueda realmente impartirse en un cuatrimestre, hemos incidido más en la parte analítica, relegando el álgebra a lo mínimo imprescindible, por una parte porque así está establecido en el temario de la asignatura a la que nos hemos ajustado, pero también en parte porque el análisis se presta más a mostrar aplicaciones naturales de forma inmediata, mientras que muchos contenidos algebraicos que pueden ser útiles al alumno a medio plazo (estudio de formas cuadráticas, diagonalización, etc) son difíciles de presentar de forma que pueda apreciar su interés y posibles aplicaciones y consideramos preferible que las estudie más adelante, cuando esté en condiciones de ver su utilidad. También hay que tener presente que tras esta asignatura introductoria a las matemáticas los alumnos cursan otra dedicada íntegramente a la optimización, y por ello hemos reducido las aplicaciones sobre optimización al caso más elemental de funciones de una variable, dejando así constancia, aunque sea de forma simbólica, de una de las principales aplicaciones de las derivadas.

Confiamos en que este material se convierta en una valiosa herramienta de estudio para los alumnos de las titulaciones relacionadas con la economía como complemento a las clases, tanto para aquellos que tengan carencias en su base matemática y necesiten explicaciones intuitivas, detalladas y comentadas, como para aquellos que quieran conocer las conexiones entre las matemáticas que estudian y la teoría económica en mayor medida de lo que otros textos más centrados en la parte matemática permiten vislumbrar.

1 Introducción a las funciones de varias variables

La principal conexión entre las matemáticas y la economía surge del hecho de que la realidad económica o, al menos, una parte de ella, puede describirse adecuadamente en términos de diversas *magnitudes,* es decir, características expresables mediante números. Éstas pueden ser de índoles diversas: precios, salarios, capitales, beneficios, costes, cantidades demandadas, tipos de interés, etc. Las matemáticas proporcionan un lenguaje adecuado para trabajar con tales magnitudes y estudiar sus relaciones.

1.1 Introducción al concepto de función

- La relación más sencilla que puede darse entre varias magnitudes es que una de ellas pueda calcularse a partir de las demás. Cuando esto sucede, decimos que dicha magnitud *es función* de las restantes.

Ejemplo 1a Si pedimos prestado un capital a un banco y nos comprometemos a devolverlo en cuotas mensuales del mismo importe (por ejemplo, si pedimos un préstamo hipotecario), el importe c de cada cuota puede calcularse a partir de otras tres magnitudes: el capital prestado C_0, el número de pagos mensuales N y el tipo de interés mensual aplicable i (en tanto por uno). Para ello basta aplicar la fórmula

$$c = \frac{C_0 i}{1-(1+i)^{-N}} \text{ €}.$$

Así pues, podemos decir que esta fórmula expresa la cuota c como función de las *variables* C_0, N, i.

Ejemplo 2a Se estima que la cantidad A que un trabajador puede ahorrar mensualmente depende de su salario r, de un indicador p del precio de los artículos de primera necesidad y de un indicador l del precio de los artículos de lujo que interesan al trabajador. La relación es

$$A = \frac{r}{p^2 l} + l^2 \text{ €/mes}.$$

En este caso tenemos que el ahorro mensual A es función de las variables r, p y l.

> Observa que la función del ejemplo 1a es lo que habitualmente se entiende por una "fórmula", es decir, una relación general entre diversas magnitudes, mientras que la del ejemplo 2a pretende reflejar las características particulares de un individuo particular, de modo que una función análoga para otro individuo podría ser matemáticamente muy distinta. En ambos casos, tales fórmulas no "salen del aire", sino que corresponde a la matemática financiera justificar por qué la fórmula del ejemplo 1a es una forma justa de devolver un préstamo con intereses, a la econometría encontrar magnitudes y funciones que describan razonablemente una situación económica y a la teoría económica en general determinar las características que debe tener una función como la del ejemplo 2a para que pueda considerarse "típica" o representativa de un caso relativamente frecuente.

- A menudo es conveniente expresar explícitamente las variables de las que depende una función. En tal caso las escribimos entre paréntesis tras el nombre de la función.

  Así, en los dos ejemplos precedentes podríamos escribir, más precisamente:

$$c(C_0, i, N) = \frac{C_0 i}{1-(1+i)^{-N}} \text{ €}, \qquad A(r, p, l) = \frac{r}{p^2 l} + l^2 \text{ €/mes}.$$

En general, la notación $f(x_1, \ldots, x_n)$ indica que f es una función que depende de (se puede calcular a partir de) las variables $x_1, \ldots, x_n$.

- Si $f(w, x, y, z)$ es una función, el resultado de calcularla para unos valores dados de las variables, por ejemplo $w = 1$, $x = 2$, $y = -1$, $z = 5$ se expresa así: $f(1, 2, -1, 5)$.

En lo que debes fijarte al estudiar estos ejemplos no es en los resultados, sino en la forma de expresarlos. Debes aprender a expresar las respuestas en la forma

$$c(200\,000, 0.0025, 360) = 843.21$$

$$A(2\,400, 4, 3) = 59$$

donde, para lo que aquí nos ocupa, la parte de la izquierda es más importante que la parte de la derecha.

Recíprocamente, si te dan las expresiones anteriores y te piden que las interpretes, debes ser capaz de reconocer que lo que expresan es:

"Si se presta un capital de 200 000 € a un interés mensual $i = 0.0025$ para devolver en 360 cuotas mensuales, el importe de cada cuota será de 843.21 €."

"Si el trabajador del ejemplo cobra un salario mensual de 2 400 €, el indicador de los precios de los artículos de primera necesidad es $p = 4$ y el de los artículos de lujo es $l = 3$, su ahorro mensual será de 59 €."

Ejemplo 1b Supongamos que un banco nos concede una hipoteca por un capital de 200 000 € a 30 años y nos aplica un interés nominal anual del 3% (esto significa que el interés efectivo mensual es $i = 0.03/12 = 0.0025$). ¿Cuál será la cuota mensual que tendremos que pagar?

SOLUCIÓN: Según el Ejemplo 1a, la cuota mensual c depende de los datos $C_0 = 200\,000$, $i = 0.0025$ y $N = 30 \cdot 12 = 360$ a través de la función

$$c(C_0, i, N) = \frac{C_0 i}{1 - (1+i)^{-N}}.$$

Por lo tanto, el resultado es

$$\begin{aligned} c(200\,000, 0.0025, 360) &= \frac{200\,000 \cdot 0.0025}{1 - (1 + 0.0025)^{-360}} \\ &= 843.21\,€. \end{aligned}$$

Ejemplo 2b ¿Cuánto ahorrará al mes el trabajador del Ejemplo 2a si su salario es de 2 400 € y los indicadores de los precios son $p = 4$, $l = 3$?

SOLUCIÓN: Consideramos la función dada en el Ejemplo 2a:

$$A(r, p, l) = \frac{r}{p^2 l} + l^2 \quad €/\text{mes}$$

y calculamos

$$A(2\,400, 4, 3) = \frac{2\,400}{4^2 \cdot 3} + 3^2 = 59\,€\,/\text{mes}.$$

Ejemplo 3 Una empresa destina una planta a la producción de dos artículos. La función

$$C(x, y) = 3\,000 + 2x + 5y + x\sqrt{y} \text{ u.m.}$$

determina el coste de producir x unidades del primer artículo e y unidades del segundo.

a) Calcula $C(100, 400)$ e interpreta el resultado.

b) Calcula el coste de producir 625 unidades de cada producto.

SOLUCIÓN:

a) $C(100, 400) = 3\,000 + 2 \cdot 100 + 5 \cdot 400 + 100\sqrt{400} = 7\,200$ u.m.

INTERPRETACIÓN: El coste de producir 100 unidades del primer artículo y 400 del segundo es de 7 200 unidades monetarias.

b) $C(625, 625) = 3\,000 + 2 \cdot 625 + 5 \cdot 625 + 625\sqrt{625} = 23\,000$ u.m.

Observa la forma en que expresamos la respuesta al apartado b):

$C(625, 625) = 23\,000$ u.m.

Debes evitar respuestas como $C(x, y) = 23\,000$ o $C = 23\,000$.

Todos los ejemplos que hemos visto hasta aquí tenían una interpretación económica, pero tienes que ser capaz de manejar igualmente todos los conceptos que hemos presentado (y todos los que veremos más adelante) en contextos abstractos, es decir, en ausencia de una interpretación concreta.

Ejemplo 4 Considera la expresión $f(w, x, y, z) = x + y^2 - zw$.

a) Explica qué significa la notación $f(w, x, y, z)$.

b) Explica qué significa la expresión $f(-1, 2, 3, 1)$ y calcúlala.

SOLUCIÓN:

a) Significa que f es una función que depende de (se puede calcular a partir de) las variables w, x, y, z.

b) Es el número (no la función) que se obtiene al calcular f para los valores $w = -1$, $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$. Su valor es

$$f(-1, 2, 3, 1) = 2 + 3^2 - 1 \cdot (-1) = 12.$$

1.2 Incrementos

- En general, usaremos la palabra *incremento* para referirnos a cualquier variación que experimente cualquier magnitud y usaremos la letra griega Δ (Delta) para representar incrementos. Más concretamente:

$$\text{Incremento} = \text{valor final} - \text{valor inicial}.$$

Ejemplo 5 Una marca de refrescos distribuye su producto en latas a un precio $p = 0.5$ €. Calcula y expresa correctamente los incrementos que corresponden a las variaciones siguientes de dicho precio (siempre partiendo del precio inicial dado anteriormente):

a) El precio aumenta a 0.6 €.

b) El precio aumenta en 0.6 €.

c) El precio se duplica.

d) La empresa promociona su producto con un 20% de descuento.

SOLUCIÓN
a) $\Delta p = 0.6 - 0.5 = 0.1$ €, b) $\Delta p = 1.1 - 0.5 = 0.6$ €,
c) $\Delta p = 1 - 0.5 = 0.5$ €, d) $\Delta p = 0.4 - 0.5 = -0.1$ €.

- Observa que incremento no es sinónimo de aumento, sino que un incremento puede representar:
  - Un aumento (si es > 0),
  - Una disminución (si es < 0),
  - Ausencia de variación (si es $= 0$).
- Cuando tenemos una función que depende de unas variables los incrementos de las variables dan lugar a incrementos de la función. Distinguiremos entre:

  Incrementos parciales Incrementos de una función debidos a la variación de una sola de sus variables.

  Si, por ejemplo, una función f tiene tres variables x, y, z y la variable que se incrementa es z, representaremos el incremento de f en la forma

  $$\Delta_z f(x_0, y_0, z_0)(\Delta z) = f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0),$$

  donde (x_0, y_0, z_0) son los valores iniciales de las variables y Δz es el incremento de z.

  Incrementos totales Incrementos de una función debidos a la variación de más de una variable.

  En este caso representaremos el incremento en la forma

  $$\Delta f(x_0, y_0, z_0)(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Ejemplo 2c Continuando con la función

$$A(r, p, l) = \frac{r}{p^2 l} + l^2 \text{ €/mes}$$

que determina el ahorro mensual de un trabajador a partir de su renta r, de índice p de los precios de los artículos de primera necesidad y el índice l de los artículos de lujo (y partiendo de los valores actuales $r = 2\,400$, $p = 4$, $l = 3$),

a) Calcula la variación que se produciría en el ahorro mensual del trabajador si los precios de los artículos de primera necesidad aumentaran un 1%.

b) Calcula la variación del nivel de ahorro si además del aumento de precios del apartado anterior, el salario aumenta a $2\,500$ €.

c) Calcula e interpreta $\Delta A(2\,400, 4, 3)(-100, -1, 2)$.

SOLUCIÓN:

a) Un aumento de los precios en un 1% corresponde a un incremento $\Delta p = 0.04$. Por lo tanto nos piden calcular el incremento parcial

$$\Delta_p A(2\,400, 4, 3)(0.04) = A(2\,400, 4.04, 3) - A(2\,400, 4, 3)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\,400}{(4.04)^2 \cdot 3} + 3^2 - \left(\frac{2\,400}{4^2 \cdot 3} + 3^2\right) = 58.015 - 59 \\ &= -0.98\,€/\text{mes} \end{aligned}$$

Vemos que el incremento es negativo, lo cual es razonable: al aumentar los precios disminuye el ahorro mensual.

b) Si el salario r aumenta a 2 500 €, el incremento correspondiente es $\Delta r = 100$ €. Nos piden el incremento total

$$\begin{aligned} & \Delta A(2\,400, 4, 3)(100, 0.04, 0) \\ = \; & A(2\,500, 4.04, 3) - A(2\,400, 4, 3) \\ = \; & \frac{2\,500}{(4.04)^2 \cdot 3} + 3^2 - \left(\frac{2\,400}{4^2 \cdot 3} + 3^2\right) = 60.06 - 59 \\ = \; & 1.06\,€/\text{mes}. \end{aligned}$$

c) La expresión dada corresponde a un incremento total:

$$\Delta A(2\,400, 4, 3)(-100, -1, 2) = A(2\,300, 3, 5) - A(2\,400, 4, 3)$$

$$= \frac{2\,300}{3^2 \cdot 5} + 5^2 - \left(\frac{2\,400}{4^2 \cdot 3} + 3^2\right) = 76.11 - 59 = 17.11\,€/\text{mes}$$

INTERPRETACIÓN: Si, partiendo de que el trabajador tiene un salario de 2 400 € y los índices de los precios son $p = 4$ y $l = 3$, el salario se le reduce en 100 €, el índice p disminuye 1 unidad y el índice l aumenta 2 unidades, el ahorro mensual del trabajador aumenta en 17.11 €.

Observa la notación de los incrementos. Cuando te pidan calcular un incremento, deberás escribirlo según los criterios que hemos establecido. En el apartado a) la respuesta es

$$\Delta_p A(2\,400, 4, 3)(0.04) = -0.98.$$

Observa cómo indicamos con el subíndice p que el dato 0.04 corresponde a un incremento de p. Por el contrario, como el incremento del apartado b) es total, escribimos

$$\Delta A(2\,400, 4, 3)(100, 0.04, 0) = 1.06,$$

donde no es necesario poner ningún subíndice, pues está claro a qué variable corresponde cada incremento.
Observa también que, aunque la variable l no se modifica, la incluimos igual en la expresión del incremento tomando $\Delta l = 0$. Evita usar expresiones como

$$\Delta_{rp} A(2\,400, 4, 3)(100, 0.04).$$

Observa cómo en el apartado c) te piden interpretar la expresión

$$\Delta A(2\,400, 4, 3)(-100, -1, 2) = 17.11$$

en la cual aparecen siete números, y los siete aparecen en la interpretación.
En general, siempre que te pidan interpretar una expresión te piden una frase en la que intervengan todos los números que aparecen en ella y que indique lo que se está afirmando sobre ellos.
Evita introducir otros números que formen parte de los cálculos que has realizado pero no de la expresión que te piden interpretar.

1.3 Funciones elementales

Aunque es posible considerar funciones mucho más sofisticadas que las que hemos visto hasta este momento, todas las funciones que manejaremos en un futuro, salvo muy raras excepciones, no serán mucho más complejas que las que ya conocemos, pues vamos a trabajar casi exclusivamente con funciones definidas por expresiones algebraicas que involucren únicamente números, sumas, productos, cocientes, potencias, raíces y unas pocas funciones básicas más, a saber, las funciones logaritmo ($\ln x$), seno ($\operatorname{sen} x$) y coseno ($\cos x$). Más adelante destacaremos algunas propiedades de estas funciones, pero de momento bastará con que sepas calcularlas con tu calculadora. Conviene que tengas en cuenta lo siguiente:

> Para comprobar que tienes tu calculadora bien configurada prueba a calcular $\operatorname{sen} 2$. Si obtienes
>
> $$\operatorname{sen} 2 = 0.909$$
>
> tu calculadora está en radianes, pero si obtienes
>
> $$\operatorname{sen} 2 = 0.034$$
>
> la tienes en grados.
> Prueba ahora a calcular $\ln 2$. Debe darte
>
> $$\ln 2 = 0.693.$$
>
> Comprueba ahora que
>
> $$\operatorname{sen} 2^3 = 0.989, \quad \operatorname{sen}^3 2 = 0.751.$$
>
> Tu calculadora tendrá una tecla específica para calcular e^x. Prueba a calcular
>
> $$e^3 = 20.0855.$$
>
> Para ver el número e calcula e^1.

- Para operar con funciones trigonométricas (senos y cosenos) es imprescindible que tu calculadora esté en modo "radianes" (lo que habitualmente aparece indicado en la pantalla con una R o con RAD) y no en modo "grados" (que se indica con D o DEG).

  Puedes mantener esta configuración en todo momento, pues no afectará a ningún cálculo que hagas con otras funciones.

- Los únicos logaritmos que manejaremos serán logaritmos neperianos. La tecla que los calcula estará marcada con las letras ln, que no has de confundir con log, que indica "logaritmo decimal".

- Ten presente que la notación $\ln^5 x$, $\operatorname{sen}^5 x$, $\cos^5 x$ significa logaritmo de x (o seno, o coseno) elevado a la quinta, es decir:

  $$\ln^5 x = (\ln x)^5, \quad \operatorname{sen}^5 x = (\operatorname{sen} x)^5, \quad \cos^5 x = (\cos x)^5$$

  No debes confundir esto con $\ln x^5$, que significa elevar x a la quinta y luego calcular el logaritmo.

- Las funciones x^3 y 3^x son muy diferentes. Aunque ambas constan de una base y un exponente, cuando la variable está en la base se habla de "función potencial" o simplemente "potencia", mientras que cuando la variable está en el exponente hablaremos de "función exponencial". No debes confundir ambos términos:

Potencias:	$f(x) = x^a$
Exponenciales:	$f(x) = a^x$

  Sólo consideraremos exponenciales con base $a > 0$. De entre las funciones exponenciales, la más importante y una de las que nos aparecerá con más frecuencia es la exponencial de base el número

  $$e = 2.718281\ldots$$

- Es importante que comprendas que en la expresión $\operatorname{sen} x$ no hay ningún producto. No debes leer "seno por x", ni mucho menos escribir $\operatorname{sen} \cdot x$. Por el contrario, la expresión $\operatorname{sen} x$ es del mismo tipo que la que empleas cuando escribes $f(x)$, sólo que en lugar de tratarse de una función cualquiera f, la expresión sen nombra a una función fija llamada "seno". Pensar que involucra un producto es tan absurdo como pensar que $\sqrt{x} = \sqrt{} \cdot x$.

- A la hora de manipular expresiones algebraicas es muy importante que comprendas que, aunque una expresión pueda involucrar varias funciones elementales (sumas, productos, raíces, potencias, etc.), toda ella sólo puede ser o bien una suma, o bien un producto, o bien una raíz, etc., pero no dos cosas a la vez.

Ejemplo 6 La función $f(x, y) = xy + 7$ es una suma, pero no un producto (es la suma de xy y 7, pero, aunque contenga un producto, no podemos decir que sea el producto de algo por algo).

Por el contrario, la función $g(x, y) = (x + 2y)(x - y^2)$ es un producto, pero no una suma (es el producto de $x + 2y$ por $x - y^2$, pero, aunque contenga sumas, no podemos decir que sea la suma de algo más algo).
Por supuesto, podemos operar y obtener que

$$(x + 2y)(x - y^2) = x^2 - xy^2 + 2xy - 2y^3.$$

Así tenemos dos expresiones distintas, pero equivalentes, en el sentido de que toman siempre el mismo valor, pero son distintas porque la de la izquierda es un producto, mientras que la de la derecha es una suma con cuatro sumandos.

Un caso especialmente frecuente y simple de esta situación es el que nos permite considerar en la práctica que las restas son sumas:

$$xy - z^2 = xy + (-z^2).$$

La función $h(x) = \ln^7 x^2$ es una potencia, y sería incorrecto decir que es un logaritmo. Fíjate que es la potencia séptima de "algo", concretamente, de $\ln x^2$. También sería incorrecto decir que es un cuadrado.

La función $P(t, u) = \ln \sqrt{u + t^5}$ es un logaritmo, es el logaritmo de "algo", concretamente de $\sqrt{u + t^5}$.

Estos hechos serán especialmente importantes a la hora de entender las reglas de derivación, pero veamos aquí otras aplicaciones. Hay quienes dudan de si las simplificaciones siguientes son correctas o no:

$$\frac{\cancel{z}\operatorname{sen} y + z}{\cancel{z}}, \qquad \frac{\cancel{z}e^y}{\cancel{z}}$$

La respuesta es que la primera es incorrecta y la segunda es correcta porque para simplificar términos iguales que multiplican *es necesario que numerador y denominador sean productos,* y en el primer ejemplo, aunque contenga un producto, el numerador es una suma.

También hay quien cree que, para despejar la x en la expresión siguiente, es correcto empezar así:

$$\frac{x}{y} + 6 = y \Rightarrow x + 6 = y^2$$

Esto es incorrecto porque para pasar algo que divide del miembro izquierdo al derecho (o viceversa) el miembro izquierdo tiene que ser un cociente, y aquí no lo es. Aunque tiene un cociente, es una suma. Precisamente por ser una suma, el paso correcto es pasar el sumando que "sobra" a la derecha:

$$\frac{x}{y} + 6 = y \Rightarrow \frac{x}{y} = y - 6.$$

Ahora que el miembro izquierdo ya es un cociente, es posible pasar la y multiplicando:

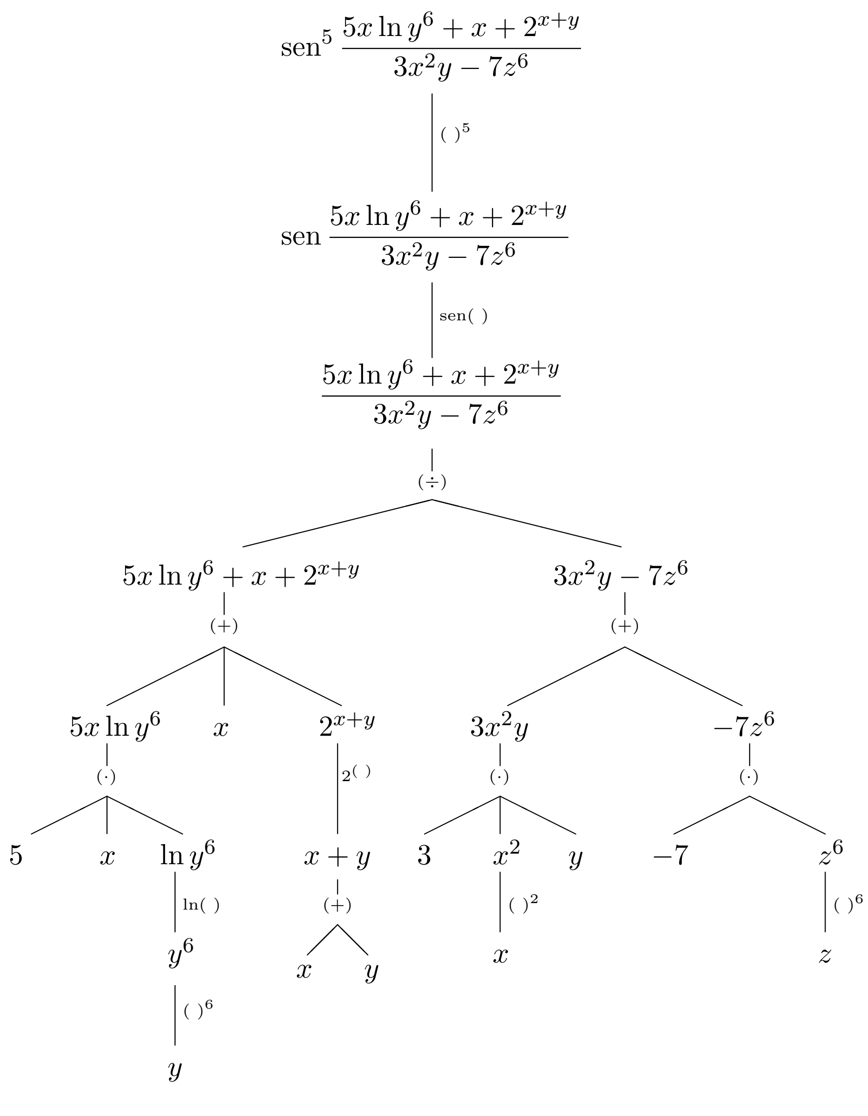
$$x = (y - 6)y.$$

- Una forma de practicar el reconocimiento de la estructura de una expresión algebraica es que la descompongas en forma de árbol.

Ejemplo 7 Considera la expresión algebraica:

$$\operatorname{sen}^5 \frac{5x \ln y^6 + x + 2^{x+y}}{3x^2 y - 7z^6}$$

En el esquema de la página siguiente aparece descompuesta en las funciones que la componen. Por ejemplo, lo primero que observamos es que se trata de una potencia quinta. La función que resulta de eliminar la potencia quinta es un seno. La función que resulta de eliminar el seno es



un cociente, del que podemos separar su numerador y su denominador en dos ramas distintas. El numerador es una suma que consta de tres sumandos. El primer sumando es un producto que consta de tres factores, etc.

1.4 Problemas resueltos

1. La función de beneficios de una empresa es $B(x,y) = x\sqrt{y}+x^2$, donde x e y son las cantidades producidas diariamente de dos artículos P y Q. Las producciones actuales son 10 unidades diarias de P y 16 de Q.

   (a) Calcula el beneficio actual.

   (b) Calcula la variación que se produciría en los beneficios de la empresa si ésta decidiera producir 12 unidades del producto P manteniendo la producción de Q.

   (c) Calcula $\Delta B(10,16)(2,-4)$ e interpreta el resultado.

   (d) Determina la producción del artículo P que necesitaría la empresa para alcanzar un beneficio de 150 u.m. manteniendo la producción actual del artículo Q.

SOLUCIÓN:

(a) $B(10,16) = 10\sqrt{16} + 10^2 = 140$ u.m.

(b) $\Delta_x B(10,16)(2) = B(12,16) - B(10,16) =$192-140 $= 52\,$u.m.

(c) $\Delta B(10,16)(2,-4) = B(12,12) - B(10,16)$

$= 185.56 - 140 = 45.57$ u.m.

INTERPRETACIÓN: Si, partiendo de que se producen 10 unidades de P y 16 de Q, la producción de P aumenta en 2 unidades y la de Q disminuye en 4 unidades, el beneficio de la empresa aumenta 45.57 unidades monetarias.

(d) Se trata de resolver la ecuación $B(x,16) = 150$, es decir:

$$4x + x^2 = 150 \Rightarrow x^2 + 4x - 150 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot(-150)}}{2} = \begin{cases} 10.4, \\ -14.4. \end{cases}$$

Descartamos la solución negativa porque no tiene sentido económico, luego la solución es que la empresa necesita producir 10.4 unidades de P.

> Observa que expresar correctamente las respuestas como
>
> $$B(10,16) = \cdots$$
>
> $$\Delta_x B(10,16)(2)$$
>
> $$= B(12,16) - B(10,16) = \cdots$$
>
> es una parte importante de la solución.
>
> Como regla general, al interpretar una expresión como
>
> $$\Delta B(10,16)(2,-4) = 45.57$$
>
> es importante que todos los números implicados aparezcan en la respuesta. Por ejemplo, decir que
>
> *"cuando la producción de P aumenta en 2 unidades y la de Q disminuye en 4 el beneficio aumenta en 45.57"*
>
> sería falso, pues dicha variación de la producción podría dar lugar a distintos incrementos de beneficio según cuál fuera la producción de partida, que no serían necesariamente el que has calculado.

2. Un consumidor puede comprar dos artículos A y B en cantidades x, y, y la utilidad que consigue con ello viene dada por la función $U(x,y) = \sqrt[3]{xy^2}$. Actualmente su consumo es de 24 unidades de A y 3 de B.

   (a) Calcula la utilidad actual.

   (b) Calcula $\Delta_y U(24,3)(0.5)$ e interpreta el resultado.

   (c) Si el consumidor decidiera dejar de consumir 4 unidades de A para consumir otras tantas de B, ¿aumentaría con ello su utilidad?

(d) ¿Cuánto debería aumentar el consumo de B si quisiera alcanzar una utilidad de 12 manteniendo el consumo de A?

SOLUCIÓN:

(a) $U(24,3) = \sqrt[3]{24 \cdot 3^2} = 6.$

(b) $\Delta_y U(24,3)(0.5) = U(24,3.5) - U(24,3) = \sqrt[3]{24 \cdot (3.5)^2} - 6 = 6.65 - 6 = 0.65.$

INTERPRETACIÓN: Si el consumidor pasa de adquirir 24 unidades de A y 3 de B a adquirir 0.5 unidades más de B su utilidad aumentará en 0.65.

(c) Para responder a la pregunta calculamos el incremento de utilidad:

$$\Delta U(24,3)(-4,4) = U(20,7) - U(24,3) = \sqrt[3]{20 \cdot 7^2} - 6 = 9.93 - 6 = 3.93.$$

El incremento es positivo, lo cual significa que la utilidad aumenta.

(d) Hay que resolver la ecuación $U(24,y) = 12$, es decir:

$$\sqrt[3]{24 \cdot y^2} = 12 \Rightarrow 24 \cdot y^2 = 12^3 = 1\,728 \Rightarrow y^2 = \frac{1\,728}{24} = 72 \Rightarrow y = \pm\sqrt{72} = \pm 8.48.$$

Como estamos calculando una cantidad consumida, la solución negativa no tiene sentido, luego habrá que consumir $y = 8.48$ unidades de B y el aumento de consumo necesario será $\Delta y = 8.48 - 3 = 5.48$ unidades.

3. La demanda diaria de un producto viene dada por

$$D(p,r) = \sqrt{\frac{r^3}{p^2}},$$

donde p es el precio de venta del producto y r la renta de los consumidores.

(a) Calcula $D(2,1\,000)$ e interpreta el resultado.

(b) Calcula $\Delta_p D(2,1\,000)(0.1)$ e interpreta el resultado con detalle.

(c) Escribe la expresión que representa el incremento de demanda a que da lugar un descenso de la renta de un 2%. Calcúlalo e interpreta el resultado.

SOLUCIÓN:

(a) $D(2,1\,000) = \sqrt{\dfrac{1\,000^3}{2^2}} = 15\,811.39$ u.p.

INTERPRETACIÓN: Si el precio del producto es de 2 u.m. y la renta de los consumidores es de 1 000 u.m. la demanda del producto será de 15 811 u.p. diarias.

Ten presente que el valor negativo que obtenemos no indica una demanda negativa, sino un incremento negativo de la demanda, es decir, un descenso de la misma.

En general, no debes confundir un incremento con el valor final de la función que se obtiene tras el incremento.

(b) $\Delta_p D(2,1\,000)(0.1) = D(2.1,1\,000) - D(2,1\,000)$

$$= \sqrt{\frac{1\,000^3}{2.1^2}} - \sqrt{\frac{1\,000^3}{2^2}} = 15\,058.47 - 15\,811.39 = -752.92.$$

INTERPRETACIÓN: Si, partiendo de un precio de 2 u.m. y una renta de 1 000 u.m., el precio del producto aumenta 0.1 u.m. y la renta permanece constante, la demanda disminuye en 752.92 u.p. diarias.

(c) $$\Delta_r D(2,1\,000)(-20) = D(2,980) - D(2,1\,000) = \sqrt{\frac{980^3}{2^2}} - \sqrt{\frac{1\,000^3}{2^2}}$$
$$= 15\,339.43 - 15\,811.39 = -471.96.$$

INTERPRETACIÓN: Si, partiendo de un precio de 2 u.m. y de una renta de 1 000 u.m., dicha renta se reduce en un 2% (es decir, en 20 u.m.), la demanda del producto se reduce en 471.96 u.p.

4. Considera la función $f(x,y,z,w) = w\cos(e^{x/y}-1) + z^2\ln y$.

   (a) Explica qué significa la expresión $f(6,3,2,4)$ y calcula su valor.

   (b) Calcula (expresándolo correctamente) el incremento parcial que experimenta f cuando, a partir de la situación del apartado anterior, la variable z pasa a valer 5.

   (c) Calcula $\Delta f(6,3,2,4)(-2,1,0,3)$ e interpreta el resultado.

   (d) Resuelve la ecuación $f(0,1,2,t) = f(0,e,t,-2)$.

   SOLUCIÓN:

   (a) $f(6,3,2,4)$ es el valor que toma la función f cuando $x=6$, $y=3$, $z=2$, $w=4$, es decir, el valor que resulta de sustituir dichos valores en la expresión que define a f.
   $$f(6,3,2,4) = 4\cos(e^{6/3}-1) + 2^2\ln 3 = 8.37.$$

   (b) $\Delta_z f(6,3,2,4)(3) = f(6,3,5,4) - f(6,3,2,4) = 31.44 - 8.37 = 23.07.$

   (c) $$\Delta f(6,3,2,4)(-2,1,0,3) = f(4,4,2,7) - f(6,3,2,4) = 7\cos(e^{4/4}-1) + 2^2\ln 4 - 8.37$$
   $$= 4.52 - 8.37 = -3.85.$$

   INTERPRETACIÓN: Si partimos de los valores $x=6$, $y=3$, $z=2$, $w=4$ y reducimos x en 2 unidades, aumentamos y en 1 unidad y aumentamos w en 3 unidades (dejando z invariante) el valor de la función f disminuye 3.85 unidades.

   (d) La ecuación es
   $$t\cos(e^0-1) + 4\ln 1 = -2\cos(e^0-1) + t^2\ln e$$
   $$\Rightarrow t = -2 + t^2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$
   $$\Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot(-2)}}{2} = \begin{cases} 2, \\ -1. \end{cases}$$

   Observa que la e que aparece en el enunciado, al contrario que la t, no es una incógnita, sino que es el número $e = 2.7182\ldots$

5. Indica si las funciones siguientes son sumas, productos, potencias, senos, logaritmos, etc. En las sumas y productos, indica el número de sumandos / factores:

a) $x\ln^5 x$	*b*) $\ln^5(xy)$	*c*) $\ln(xy)^5$
d) $\operatorname{sen}^3(x+y)$	*e*) $x^3 + \operatorname{sen} y$	*f*) $xy\operatorname{sen}^3 x$

SOLUCIÓN:

(a) Producto de dos factores	(b) Potencia	(c) Logaritmo
(d) Potencia	(e) Suma de dos sumandos	(f) Producto de tres factores.

6. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\dfrac{20}{x}+2x=14$ *b)* $x^3\left(3+\dfrac{12}{x^2}\right)=12x+24$ *c)* $(t^2+t-2)(\sqrt{t}-5)=0$

d) $(t-3)(t-1)=3$ *e)* $\sqrt{p-2}+p=8$ *f)* $\sqrt{\dfrac{q^2+3}{q+2}}=2$

SOLUCIÓN:

a) $\dfrac{20}{x}+2x=14 \;\Rightarrow\; 20+2x^2=14x \;\Rightarrow\; 2x^2-14x+20=0$

$$\Rightarrow x^2-7x+10=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\begin{cases}5,\\2.\end{cases}$$

b) $x^3\left(3+\dfrac{12}{x^2}\right)=12x+24 \;\Rightarrow\; 3x^3+\dfrac{12x^3}{x^2}=12x+24$

$$\Rightarrow\; 3x^3+12x=12x+24 \;\Rightarrow 3x^3=24 \;\Rightarrow x^3=8$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{8}=2.$$

c) $(t^2+t-2)(\sqrt{t}-5)=0 \;\Rightarrow \begin{cases}t^2+t-2=0 & \text{o bien}\\ \sqrt{t}-5=0.\end{cases}$

Si $t^2+t-2=0$ entonces $t=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\begin{cases}1,\\-2.\end{cases}$

Si $\sqrt{t}-5=0$ entonces $\sqrt{t}=5 \;\Rightarrow t=5^2=25$. Por lo tanto, en total hay tres soluciones: $t=-2,1,25$.

d) $(t-3)(t-1)=3 \;\Rightarrow\; t^2-t-3t+3=3 \;\Rightarrow\; t^2-4t=0$

$$\Rightarrow t(t-4)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases}t=0 & \text{o bien}\\ t-4=0 & \Rightarrow t=4.\end{cases}$$

e) $\sqrt{p-2}+p=8 \;\Rightarrow\; \sqrt{p-2}=8-p \;\Rightarrow\; p-2=(8-p)^2$

$$p-2=64-16p+p^2 \;\Rightarrow p^2-17p+66=0$$

$$\Rightarrow\; p=\frac{17\pm\sqrt{17^2-4\cdot 66}}{2}=\frac{17\pm 5}{2}=\begin{cases}11,\\6.\end{cases}$$

Nota que en a) hubiera sido incorrecto hacer

$$\frac{20}{x}+2x=14$$
$$\Rightarrow\; 20+2x=14x.$$

Al llegar a $2x^2-14x+20=0$ hemos observado que todos los coeficientes podían dividirse entre 2. Este paso no es necesario, pero es frecuente que este tipo de simplificaciones faciliten bastante los cálculos, o incluso que nos permitan ver mejor qué conviene hacer en un momento dado.

Cuando tenemos un producto igualado a 0, como en c), podemos concluir que uno de los dos factores tiene que ser 0. En cambio, sería un error muy grave empezar d) pasando de $(t-3)(t-1)=3$ a

$$\begin{cases}t-3=3 & \text{o}\\ t-1=3.\end{cases}$$

En general, para resolver una ecuación de segundo grado

$$ax^2+bx+c=0$$

usamos la fórmula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Sin embargo, cuando $c=0$, que es lo que sucede al final de d), donde tenemos $t^2-4t=0$, aunque sería posible aplicar la fórmula, es más práctico sacar factor común t, como hemos hecho.

De las dos soluciones que hemos obtenido, observamos que sólo la segunda cumple la ecuación inicial:

$$\sqrt{11-2}+11=14\neq 8, \qquad \sqrt{6-2}+6=8.$$

Por lo tanto, la única solución es $p=6$.

f) $\sqrt{\dfrac{q^2+3}{q+2}}=2 \;\Rightarrow\; \dfrac{q^2+3}{q+2}=4 \;\Rightarrow q^2+3=4(q+2)$

$$\Rightarrow\; q^2+3=4q+8 \;\Rightarrow q^2-4q-5=0$$

$$\Rightarrow\; q=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\begin{cases} 5, \\ -1. \end{cases}$$

Comprobamos que las dos soluciones son válidas:

$$\sqrt{\frac{5^2+3}{5+2}}=\sqrt{4}=2, \quad \sqrt{\frac{(-1)^2+3}{-1+2}}=2.$$

Cuando al resolver una ecuación hemos elevado sus miembros al cuadrado (u otra potencia par) para eliminar una raíz, puede ocurrir que algunas de las soluciones que obtengamos no cumplan la ecuación original, por lo que debemos comprobarlo y descartar las que fallen.

En el apartado e) resulta que una de las dos soluciones obtenidas no es válida, mientras que en el apartado f) valen las dos.

1.5 Problemas propuestos

1. La demanda mensual de cerveza de un consumidor viene dada por la función

$$D(r,p)=\frac{15r}{p}-r^2 \text{ l/mes},$$

donde r es la renta mensual del consumidor (en miles de euros) y p es el precio (en euros) de un litro de cerveza. Actualmente, el precio es $p=2$ € y el consumidor dispone de una renta de $r=2\,000$ € mensuales.

(a) Explica qué significa la notación $D(r,p)$.

(b) Escribe la expresión que representa la demanda actual de cerveza y calcula su valor.

(c) Calcula cuál sería la demanda si el consumidor pasara a disponer de una renta mensual de $r=2.5$ u.m. Expresa el resultado correctamente e interprétalo.

(d) ¿Y si, con la renta actual, el precio subiera 50 céntimos?

(e) Expresa los resultados de los dos últimos apartados en términos de incrementos parciales de la función D.

(f) Calcula el incremento (total) de la demanda si $\Delta r=0.5$ u.m. e $\Delta p=1$ €. Exprésalo correctamente e interprétalo.

(g) ¿Qué signo cabría esperar que tuviera $\Delta_r D(3,3)(0.5)$? Comprueba si tu conjetura es correcta.

(h) Con el precio actual, ¿qué renta mensual haría que el consumidor limitara su consumo de cerveza a 8 litros mensuales?

(i) Calcula a partir de qué precio el consumidor no estará dispuesto a comprar cerveza con su renta actual.

(j) Calcula cuánto tendría que reducirse el precio de la cerveza para que el consumidor mantuviera su demanda tras haber sufrido un recorte salarial de un 5%.

2. Sea $f(x,y,z) = xy^2 - 3z$.
   (a) ¿Qué significa la notación $f(x,y,z)$?
   (b) Explica qué significa $f(2,1,7)$ y calcula su valor.
   (c) Calcula $\Delta_z f(2,1,7)(2)$.
   (d) Calcula $\Delta f(2,1,7)(-1,0,2)$.
   (e) Resuelve la ecuación $f(2,y,1) = 5$.
   (f) Resuelve la ecuación $f(1,p,2) = f(4,4,p)$.
3. Descompón en funciones básicas la función $g(u,v) = 5\ln^4 \sqrt{u^2v+3}$.

---

4. La producción diaria de una empresa de fabricación de zapatos viene dada por
$$S(p,K,L) = p\sqrt[3]{KL^2} \text{ pares de zapatos,}$$
donde p es el precio de venta en euros, K es el capital invertido en la producción (en euros) y L el número de trabajadores. Actualmente el capital de la empresa es $K = 120\,000$ € y su plantilla es de $L = 15$ trabajadores. Por otra parte, se estima que la demanda diaria de su producto es
$$D(p,M) = \frac{1\,470\sqrt{M}}{p},$$
donde M es la inversión mensual en marketing, que actualmente es de $M = 1\,600$ €.
   (a) Calcula la oferta (producción) y la demanda que conseguiría la empresa si vendiera cada par de zapatos a un precio de 20 €.
   (b) Interpreta los resultados obtenidos en el apartado anterior. ¿Le conviene a la empresa vender a ese precio?
   (c) ¿Qué signo cabe esperar en ΔD si la empresa decide aumentar un 5% el precio de sus zapatos? Escribe la expresión completa para este incremento parcial y calcúlalo.
   (d) Calcula (para la situación actual) el precio de equilibrio de la empresa, es decir, el precio p para el cual la oferta es igual a la demanda.
   (e) Calcula la oferta y la demanda correspondientes al precio de equilibrio y comprueba que, en efecto, son iguales.
   (f) Calcula $\Delta S(14, 120\,000, 15)(0, 67\,500, -3)$ e interpreta el resultado. (Redacta la interpretación evitando palabras técnicas como "incremento" y usando palabras cotidianas como "contratar", "despedir", "aportar capital", etc., de modo que resulte natural a cualquiera que no esté familiarizado con las matemáticas.)
   (g) Calcula el incremento de demanda a que da lugar un incremento $\Delta M = 300$ € (manteniendo el precio de equilibrio). Exprésalo correctamente e interprétalo.
   (h) ¿Qué incremento de capital ΔK debe aportar la empresa para que la oferta iguale a la nueva demanda calculada en el apartado anterior?
5. Si un banco nos ofrece un tanto por uno de interés i por nuestros ahorros, esto significa que si depositamos un capital C_0 en el instante $t = 0$, al cabo de t años nuestro capital será el dado por la expresión
$$C = C_0(1+i)^t.$$

(a) ¿Qué deberíamos escribir en lugar de una simple C a la izquierda del signo $=$ si quisiéramos ser más precisos?

(b) Calcula el capital que tendremos al cabo de 5 años si en la actualidad ($t = 0$) depositamos 10 000 € en un banco que nos ofrece un 3% de interés anual ($i = 0.03$). Expresa el resultado con la notación adecuada.

(c) Calcula el incremento de capital que hemos conseguido con nuestra inversión. Escríbelo correctamente.

(d) Calcula $\Delta_t C(10\,000, 0.03, 2)(2)$ e interpreta el resultado. (Deduce del contexto cuál es cada variable.)

(e) ¿Qué capital tendríamos que invertir si quisiéramos disponer de 15 000 € dentro de 5 años?

(f) Otro banco nos ofrece 13 000 € dentro de 5 años si depositamos ahora nuestros 10 000 €. ¿Qué interés nos está ofreciendo?

6. La demanda D de un producto X viene dada por la función

$$D(r, p, p') = \frac{\sqrt{rp'}}{2p},$$

donde r es la renta media de los consumidores, p es el precio del producto X y p' el precio de un bien sustitutivo (es decir, de otro producto que los consumidores podrían comprar en lugar del que fabrica la empresa). Actualmente, ambos bienes se venden al precio de 1 € y el consumidor destina al producto X una renta de 36 €.

(a) Calcula la cantidad de X que actualmente demandan los consumidores

(b) Calcula el incremento de demanda que se producirá si el precio del artículo X aumenta en 20 céntimos. Interpreta el resultado.

(c) Calcula el incremento de demanda que se producirá si el precio del bien sustitutivo aumenta a 2 € (y el de X se mantiene en 1 €). Interpreta el resultado.

(d) Calcula el incremento de demanda que se producirá si suceden simultáneamente las variaciones de los dos apartados anteriores.

(e) Calcula el incremento de demanda que se producirá si los consumidores duplican su renta, pero los precios de ambos artículos también se duplican. Interpreta el resultado.

Cálculo de funciones e incrementos

7. Dadas las funciones

$$f(x, y, z) = \frac{x + y^2}{z^3}, \qquad Q(p, q) = \sqrt[5]{p + q^2}, \qquad H(r, s, t) = (r + 2s)t^3 + 3,$$

$$K(u, v) = \frac{1}{u} + \frac{3}{v}, \qquad L(m, n, t) = \frac{\frac{3}{t} - \sqrt{t}}{m^2 + n^2 + 5}, \qquad P(Q) = \frac{Q}{Q + 5}\left(7 - \frac{\sqrt{Q^2 + 2}}{Q + 1}\right),$$

(a) Comprueba los resultados siguientes:

$f(3,5,2) = 3.5$	$f\left(\frac{3}{7}, 0.2, 0.01\right) = 468\,571.43$	$Q(5, \sqrt{5}) = 1.58$
$Q(\sqrt{5}, 5) = 1.936$	$H(4,-4,-5) = 503$	$H\left(3, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right) = 3.425$
$K(5,7) = 0.628$	$K\left(-2, \frac{2}{5}\right) = 7$	$L(1,-5,9) = -0.086$
$L(\sqrt{2}, 1+\sqrt{3}, 7) = -0.153$	$P(4) = 2.73$	$P(-10) = 16.24$

(b) Comprueba que

$\Delta_x f(5,2,1)(-2) = -2$	$\Delta f(1,1,1)(0.2, 0.1, -0.3) = 5.026$
$\Delta Q(1,-4)(-10,2) = -3.14$	$\Delta_s H(6,-3,5)(0.7) = 175$
$\Delta K\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{7}\right)\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{7}\right) = -6$	$\Delta_t L(-3,4,9)(1/12) = -5.6 \cdot 10^{-4}$
$\Delta P(3)(3.2) = 1.072$	

(c) Calcula (y expresa correctamente) el incremento de Q que se produce al pasar de $(p,q) = (3,-2)$ a $(p,q) = (5,-1.5)$.

(d) Calcula (y expresa correctamente) el incremento de K que se produce si partimos de $(u,v) = (5,3)$ e $\Delta u = 2$.

(e) Calcula (y expresa correctamente) el incremento de L que se ha producido si ahora $(m,n,t) = (4,8,16)$ y antes las variables valían la cuarta parte que ahora.

(f) Calcula (y expresa correctamente) el incremento de P que se produce si $Q = 3$ y aumenta un 10%.

8. Comprueba con la calculadora los resultados siguientes:

(a) $2^{\sqrt{5}} - 3^{\ln 2} = 2.57$,

(b) $\cos\pi + \operatorname{sen}\sqrt{\pi} = -0.02$,

(c) $\dfrac{e^{\sqrt[7]{1000}}}{1+\ln 5} = 5.6$,

(d) $e^5 = 148.41$,

(e) $\dfrac{\operatorname{sen}(\pi/4)}{\cos(\pi/4)} = 1$,

(f) $\operatorname{sen}^3 \pi = 0$,

(g) $\operatorname{sen}\pi^3 = -0.398$,

(h) $\ln^4(\cos(\pi/3)) = 0.23$,

(i) $\ln(\cos^4(\pi/3)) = -2.77$,

(j) $\ln(\cos(\pi/3)^4) = -1.02$,

(k) $\ln(\cos(\pi^4/3)) = -0.7$.

Análisis de funciones elementales

9. Descompón las funciones siguientes en las funciones básicas que las componen:

a) $\operatorname{sen}(x+2y)-2\cos(x^2y)$	*b*) $\dfrac{x(y^2+z^2)\ln z}{xy^2+z^2\ln z}$	*c*) $\ln^5(xy)$
d) $\ln(\cos^4 x)$	*e*) $5(x+y-z)e^{z/10}$	*f*) $\dfrac{40}{\frac{\operatorname{sen} xy}{z}}$
g) $\dfrac{\frac{40}{\operatorname{sen} xy}}{z}$	*h*) $\dfrac{\sqrt{x^2y+z^3}}{7xy-5}$	*i*) $\dfrac{x\operatorname{sen} y+5}{x^5\cos z-1}$
j) $(x\ln y)^{5+\operatorname{sen} x}$	*k*) $\dfrac{(y+3y^2)\operatorname{sen} x}{z^4\operatorname{sen} x}$	*l*) $\dfrac{\ln^3 x}{\cos^4(xy)}$

Ecuaciones

10. Resuelve las ecuaciones siguientes:

1) $p^2+2p=5p-1$	2) $(5t-3)t=2t-8$	3) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x}=5x$
4) $L^5+9=0$	5) $\sqrt[3]{c+3}-2=5$	6) $\sqrt{4-x}-x=2$
7) $x+2=\sqrt{4x+13}$	8) $p=2+\sqrt{p^2-2}$	9) $T^3-10T=0$
10) $\dfrac{15}{p^2}-\dfrac{8}{p}+1=0$	11) $10p\left(15-\dfrac{3}{p}\right)=0$	12) $10p\left(15-\dfrac{3}{p}\right)=1$

11. Calcula el precio de equilibrio de un producto cuyas funciones de oferta y demanda son

$$S(p)=25p, \qquad D(p)=\frac{2\,000}{p}-50.$$

12. El coste de producir q unidades de un artículo viene dado por la función

$$C(q)=5000+q+\frac{q^2}{500}\text{ €}.$$

(a) Calcula el coste fijo de la empresa, es decir, el coste en el que incurre la empresa aunque no produzca ninguna unidad de producto.

(b) Calcula la producción que puede conseguirse con un presupuesto de $15\,000$ €.

Cuestiones

13. La función $B(q,p)$ representa el beneficio anual de una empresa en función de la cantidad q que produce de un artículo y el precio p al que lo vende. Explica qué significa que $B(10\,000,500)=6\,000\,000$ u.m.

14. Dada una función $h(p,q)$, di con palabras lo que significa $\Delta h(3,2)(1,-1)$.

15. Dada una función $g(x, y, z)$, explica la diferencia entre $\Delta_y g(3, 1, -1)(2)$ e $\Delta_z g(3, 1, -1)(2)$. En la expresión $\Delta g(1, 2, 3)(0.1, 0.2, 0.3)$, ¿cuál es el valor inicial de x?, ¿cuánto vale Δx?, ¿cuál es el valor final de x?

16. Si nos dicen que
$$P = 3s^2x + xks,$$
¿Por qué no podemos calcular $P(1, 3, -2)$? ¿Qué información nos falta?

17. Una empresa fabrica dos productos en cantidades q_1 y q_2, para lo cual utiliza tres materias primas cuyos precios son p_1, p_2 y p_3. Imagina que tenemos una expresión para calcular el coste C de la producción a partir de estos datos. ¿Cómo se expresa esto? ¿Cómo expresarías, más concretamente, el coste de producir 100 unidades del primer producto y 500 del segundo si las tres materias primas tienen un precio de 3 u.m.? ¿Y el incremento de coste si p_3 pasa a ser de 3.5 u.m?

18. Una empresa fabrica un artículo en cantidad Q y C es el coste de su producción. Si tenemos un criterio para calcular C a partir de Q, ¿esto significa que Q es función de C o que C es función de Q? ¿Dicha función se representará por $Q(C)$ o $C(Q)$?

2 Funciones de varias variables

Tras haber introducido la noción básica de función de varias variables, aquí precisaremos la notación que usaremos al tratar con funciones e introduciremos algo más del vocabulario básico sobre ellas.

2.1 Vectores en $\mathbb{R}^n$

- Suponemos que conoces el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, que contiene a todos los números naturales $(0, 1, 2, \ldots)$, *enteros* $(-5, -2, 0, 3, 7, \ldots)$, *racionales* $(\frac{3}{5}, \frac{9}{3}, \ldots)$ y también a los *irracionales,* $(e, \pi, \sqrt{2}, \ldots)$.

  Pero a menudo necesitaremos tratar con varios números reales al mismo tiempo. Por ejemplo, si $f(x, y, z)$ es una función de tres variables, para calcularla necesitamos tener, no uno, sino tres números reales no necesariamente distintos. Esto nos lleva al concepto de vector:

- Llamaremos $\mathbb{R}^2$ al conjunto de todos los *pares* (x, y) de números reales, es decir, expresiones como $(3, -2)$, $(\pi, \sqrt[3]{2})$, $(0.45, 23.8)$, etc.

  Similarmente, $\mathbb{R}^3$ será el conjunto de todas las *ternas* (x, y, z) de números reales, como $(0, 0, 0)$, $(2, -3, 7)$ o $(4.2, 3/5, 8)$.

  En general, si $n \geq 1$ es un número natural, llamaremos $\mathbb{R}^n$ al conjunto de todos los *vectores* de n componentes, es decir, expresiones de la forma $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, donde $x_1, \ldots, x_n$ son números reales.

  Así podemos decir que, para calcular una función de dos variables, necesitamos tener como dato un vector de $\mathbb{R}^2$, para calcular una función de tres variables necesitamos como dato un vector de $\mathbb{R}^3$, etc.

- A menudo necesitaremos seleccionar algunos vectores dentro de todo el espacio $\mathbb{R}^n$ que cumplan determinadas condiciones. La notación que emplearemos para ello será la siguiente:

$$\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{ condiciones}\}.$$

  Esta expresión se lee: "El conjunto de los vectores $\bar{x}$ que pertenecen a $\mathbb{R}^n$ tales que cumplen las condiciones que se indican".

Ejemplo 1 Un consumidor tiene 6 € con los que se propone comprar refrescos y hamburguesas. Cada refresco vale 1 €, mientras que cada hamburguesa vale 2 €. Si compra r refrescos y h hamburguesas, escribe el conjunto de pares (r, h) que corresponden a consumos posibles según su presupuesto.

SOLUCIÓN: El gasto del consumidor será $r + 2h$, y este gasto no puede exceder el presupuesto, luego el conjunto de los consumos posibles será

$$C = \{(r, h) \in \mathbb{R}^2 \mid r + 2h \leq 6, \; r \geq 0, \; h \geq 0\}.$$

> Si recuerdas cómo debes leer la respuesta te será más fácil recordar la notación correcta:
> *"El conjunto de todos los pares (r, h) que pertenecen a $\mathbb{R}^2$ tales que $r + 2h \leq 6$, $r \geq 0$ y $h \geq 0$".*

> No debes confundir los signos $\in$ y $\subset$. Ten presente que, en todos los casos que consideraremos, para que tenga sentido una expresión como $\bar{x} \in S$ será necesario que el término de la izquierda sea un vector y el de la derecha un conjunto, mientras que en la expresión $S \subset T$ los dos miembros tienen que ser conjuntos.

- En general, un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ es una expresión que selecciona determinados vectores de $\mathbb{R}^n$ (en el ejemplo anterior, C es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que selecciona los vectores que corresponden a consumos posibles).

  Para expresar que S es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ usaremos la notación $S \subset \mathbb{R}^n$, y en tal caso, si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, escribiremos $\bar{x} \in S$ o $\bar{x} \notin S$ para indicar que el vector $\bar{x}$ está o no está en el conjunto S.

Ejemplo 2 En estos términos podemos escribir lo siguiente (donde C es el conjunto del ejemplo 1):

$$(4,3) \in \mathbb{R}^2, \qquad (1,3,-2,1) \notin \mathbb{R}^3, \qquad (1,2) \in C, \qquad (40,20) \notin C, \qquad C \subset \mathbb{R}^2.$$

- Conviene introducir las operaciones siguientes con vectores:

> La palabra "escalar" significa lo mismo que "número", pero se usa en oposición a "vector". Así, decimos que 5 es un escalar y que $(5,4,1)$ es un vector.
>
> El producto escalar de vectores se llama así porque el resultado del producto es un escalar y no un vector. Fíjate en que
>
> $$(2,3)(1,6) = 2 + 18 = 20$$
>
> y no
>
> $$(2,3)(1,6) = (2,18).$$

Suma de vectores Dados dos vectores $\bar{x}$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$, definimos la suma $\bar{x} + \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ como

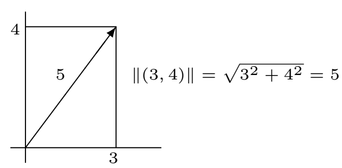
$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Producto por un escalar Si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se define el producto $\alpha\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ como

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

Producto escalar de vectores Si $\bar{x}$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$, se define su producto $\bar{x} \cdot \bar{y} \in \mathbb{R}$ como

$$(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

> Geométricamente, la norma de un vector es su longitud, como se sigue del teorema de Pitágoras:
>
> 
>

Norma de un vector Si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, se define su *norma* como el escalar $\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Ejemplos: $(2,4,1) + (-1,1,2) = (1,5,3)$.

$$3(1,2,2) = (3,6,6), \qquad (1,-2,5)(2,0,2) = 2+0+10 = 12.$$

$$\|(2,1,-2)\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

2.2 Funciones escalares y vectoriales. Dominios.

- Si f es una función, como por ejemplo

$$f(x,y,z) = \frac{x+y}{x+z},$$

para calcularla necesitamos como dato un vector de $\mathbb{R}^n$, en este caso un $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, pero eso no significa que f pueda ser calculada para cualquiera de ellos. Por ejemplo, tenemos que

$$f(1, 2, 3) = \frac{3}{4},$$

y decimos entonces que f está definida en $(1, 2, 3)$, mientras que

$$f(2, 1, -2) = \frac{3}{0} = ?$$

no se puede calcular, y decimos que la función f no está definida en $(2, 1, -2)$.

> El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ donde una función f de n variables está definida (se puede calcular) se llama *dominio* de la función f.

Ahora ya podemos introducir la notación general con la que representaremos las funciones que vamos a estudiar:

> Una *función vectorial* de n variables y m coordenadas de dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ es cualquier criterio que a cada vector $\bar{x} \in D$ le asigna un vector $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^m$. Cuando esto sucede lo representaremos con la notación $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. En el caso particular en que $m = 1$, es decir, si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, diremos que la función f es una *función escalar*.

Ejemplo 3 Consideremos de nuevo la función dada por $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{x + z}$. Su dominio es el conjunto

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z \neq 0\},$$

pues lo único que podría impedir el cálculo de $f(x, y, z)$ es que el denominador $x + z$ se hiciera cero. Por lo tanto, podemos decir que $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. En particular, f es una función escalar de tres variables.

Ejemplo 4 La función $g(x, y) = (x/y, xy, x + 3y)$ es vectorial, pues, por ejemplo,

$$g(3, 1) = (3, 3, 6),$$

es decir, transforma vectores de $\mathbb{R}^2$ en vectores de $\mathbb{R}^3$. Su dominio es el conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\},$$

pues $g(x, y)$ puede calcularse salvo si $y = 0$, ya que entonces no tiene sentido la fracción x/y.

En este caso $g : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y g es una función vectorial de dos variables y tres coordenadas. Las funciones coordenadas de g son las tres funciones escalares

$$g_1(x, y) = x/y, \qquad g_2(x, y) = xy, \qquad g_3(x, y) = x + 3y.$$

> Observa que, al igual que un vector $(4, 7, 1)$ consiste en varios escalares (tres en este caso) en un cierto orden, una función vectorial como g puede pensarse como un "vector" de funciones, es decir, como tres funciones escalares g_1, g_2, g_3 en un cierto orden.

En general:

Una *función vectorial* $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ está determinada por m funciones $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ llamadas sus *funciones coordenadas*, de modo que $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

El argumento de un logaritmo es "lo que hay dentro" del logaritmo (por ejemplo, el argumento de $\ln x^3$ es x^3), del mismo modo que el radicando de una raíz es "lo que hay dentro" de la raíz.
La razón para exigir la cuarta condición es que la función x^y, es decir, la función potencia con variables tanto en la base como en el exponente, se define como

$$x^y = e^{y \ln x},$$

por lo que la cuarta condición es un caso particular de la segunda.

Evita usar las fórmulas del recuadro de la derecha cuando el exponente es variable. En tal caso aplica directamente el criterio cuarto. Por ejemplo, si tienes

$$\operatorname{sen}^{1/4}(xy^2)$$

debes tener en cuenta que esto es lo mismo que

$$\sqrt[4]{\operatorname{sen}(xy^2)},$$

mientras que es inútil transformar

$$\operatorname{sen}^{x^2/y}(x+y) = \sqrt[y]{(x+y)^{x^2}}.$$

En general, no escribas nunca una raíz si su índice no es un número natural fijo. Fíjate que en el ejemplo 5 no hemos escrito $\sqrt[x]{5}$.

Observa que la función seno no afecta al dominio, ni la raíz cúbica, porque es de índice impar, ni la potencia x^2, porque no tiene exponente variable, sino fijo igual a 2. Por tanto, no debes aplicar la regla 4 y pedir $x > 0$.

La potencia $5^{1/x}$ tiene exponente variable, pero no tiene sentido pedir $5 > 0$. Sólo tienes que exigir condiciones sobre las variables de la función, no sobre números.

A la hora de calcular el dominio de una función definida a partir de las funciones usuales con las que vamos a trabajar basta tener en cuenta los hechos siguientes:

- El denominador de una fracción debe ser $\neq 0$.
- El argumento de un logaritmo debe ser > 0.
- El radicando de una raíz de índice par debe ser ≥ 0.
- La base de una potencia de exponente variable debe ser > 0.

Además hay que tener presente que los exponentes negativos y fraccionarios pueden ocultar fracciones y raíces que hay que tener en cuenta para aplicar las condiciones anteriores. Para ello hay que recordar las relaciones

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \qquad x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Ejemplo 5 Calcula el dominio de la función

$$f(x,y,z) = \frac{(x^2y)^{1/4} + \sqrt[3]{\ln(y/z)}}{\operatorname{sen}(x+y)^z + 5^{1/x}}.$$

Solución: Como hay un exponente $1/4$ reescribimos la función para mostrar la raíz equivalente:

$$f(x,y,z) = \frac{\sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[3]{\ln(y/z)}}{\operatorname{sen}(x+y)^z + 5^{1/x}}.$$

Ahora aplicamos los criterios anteriores:

- El denominador de una fracción debe ser $\neq 0 \Rightarrow$
  $z \neq 0$, $x \neq 0$, $\operatorname{sen}(x+y)^z + 5^{1/x} \neq 0$.
- El argumento de un logaritmo debe ser $> 0 \Rightarrow y/z > 0$.
- El radicando de una raíz de índice par debe ser $\geq 0 \Rightarrow$ $x^2y \geq 0$.
- La base de una potencia de exponente variable debe ser $> 0 \Rightarrow x + y > 0$.

Por lo tanto el dominio es

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 0,\ x \neq 0,\ \operatorname{sen}(x + y)^z + 5^{1/x} \neq 0,\ y/z > 0,\ x^2 y \geq 0,\ x + y > 0\}.$$

Ejemplo 6 Calcula el dominio de la función

$$f(x, y) = \operatorname{sen} x^4 + \sqrt[7]{x + e^y}$$

SOLUCIÓN: $D = \mathbb{R}^2$.

Observa que en el ejemplo 6 la potencia e^y tiene exponente variable, pero la base es el número $e = 2.71\ldots > 0$, luego no hay que exigir $e > 0$. Cuando la función se puede calcular en cualquier punto, su dominio es simplemente $\mathbb{R}^n$. En el caso del ejemplo 6 es $\mathbb{R}^2$ porque la función tiene dos variables. Evita expresiones incorrectas como

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad \},$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbb{R}^2\ \}.$$

- De entre las funciones que manejaremos habitualmente, las más sencillas son las siguientes:

Funciones lineales Una *función lineal* es una función de la forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n,$$

es decir, una función de la forma

"número $\times$ variable $+$ número $\times$ variable $+ \cdots$ "

Polinomios Un *polinomio* es una función escalar definida mediante sumas y productos entre variables y números, sin que aparezca ninguna otra operación.

- Conviene destacar que las funciones vectoriales cuyas funciones coordenadas son lineales se consideran también lineales, mientras que los polinomios son por definición funciones escalares.

Ejemplo 7 Indica si las funciones siguientes son lineales y si son polinomios:

a) $f(x, y) = 3x^2 y + 2x^6 y^3 - 3x + 2$ *b*) $g(x, y, z) = 3x + 2y - 5z$
c) $h(u, v, w) = u^2 v + w^{-3} - \sqrt{u + v}$ *d*) $p(x, t) = \ln(x^2 + 3xt + 3)$
e) $q(a, b, c) = (a^2 b, a + b - c)$ *f*) $t(r, s) = (r + 2s, -r)$

SOLUCIÓN:

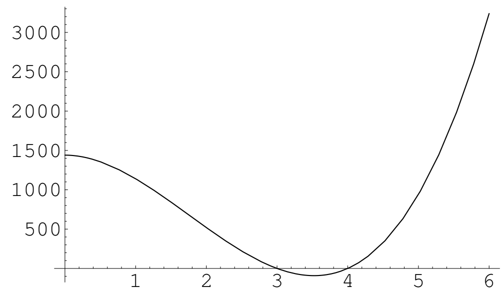
a) Sí que es un polinomio, pero no es lineal.
b) Es lineal (y también un polinomio).
c) No es un polinomio, porque tiene una potencia con exponente negativo (w^{-3}) y una raíz cuadrada. Tampoco es lineal.
d) No es un polinomio porque contiene un logaritmo. Tampoco es lineal.
e) No es un polinomio porque es una función vectorial. Sus dos funciones coordenadas sí que son polinomios. La primera no es lineal, pero la segunda sí.
f) No es un polinomio porque es vectorial, pero sí que es lineal, pues sus dos funciones coordenadas son lineales.

Observa que en los polinomios pueden aparecer potencias con exponente natural, como $y^3 = y \cdot y \cdot y$, porque son productos, pero no potencias con cualquier otro exponente fijo o variable, como w^{-3}, pues ésta por ejemplo equivale a un cociente.
Por otra parte, una función como $\sqrt{3}x + y \ln 7$ sí que es un polinomio (y de hecho es lineal) porque $\sqrt{3}$ y $\ln 7$ son números que multiplican a las variables. La funciones de los apartados c) y d) no son polinomios porque la raíz y el logaritmo contienen variables, no sólo números.

2.3 Gráficas, límites y continuidad

Muchas de las propiedades de una función se pueden poner de manifiesto claramente a través de su representación gráfica, por lo que es importante que seas capaz de comprender la correspondencia entre las características matemáticas de las funciones y las propiedades que puedes observar en sus gráficas.

Ejemplo 8 El saldo de la cuenta corriente de un cliente de un banco en el periodo 2000-2005 ha venido dado por la función $A(t) = 70t^3 - 370t^2 + 1440$ €, donde el tiempo está en años y $t = 0$ corresponde al 1 de enero de 2000. La figura muestra la gráfica de esta función.



a) Explica en líneas generales la evolución del saldo: a la vista de la gráfica, ¿el cliente ingresaba a menudo dinero en su cuenta o más bien lo gastaba?

b) ¿En qué momento fue mayor el saldo de la cuenta corriente?

c) Haz una estimación a partir de la gráfica del incremento de los ahorros correspondiente al año 2001 (es decir, desde el 1 de enero de 2001 hasta el 1 de enero de 2002). ¿Fue positivo o negativo?

d) Calcula el incremento del apartado anterior de forma exacta y compáralo con tu estimación.

e) Deduce de la gráfica en qué periodo el ahorrador estuvo en “números rojos”. Comprueba analíticamente que al principio y al final de ese periodo sus ahorros eran nulos.

f) ¿En qué periodo de tiempo el saldo de la cuenta varió más rápidamente?

SOLUCIÓN:

a) En la gráfica observamos que durante los primeros años el saldo fue disminuyendo hasta que la cuenta llegó incluso a estar en “números rojos”, pero a partir de mediados de 2003 empezó a recuperarse y el saldo fue creciendo hasta superar el saldo disponible al principio del periodo.

b) El saldo fue mayor al final del periodo, cuando superó los 3000 €.

c) A principios de 2001 el saldo fue $A(1) \approx 1200$ €, mientras que al terminar el año fue $A(2) \approx 600$ €. Por lo tanto

$$\Delta A(1)(1) = A(2) - A(1) \approx 600 - 1200 = -600 \text{ €}.$$

El incremento fue negativo, como también se ve en la gráfica: el capital ahorrado disminuyó en dicho periodo.

d) Los saldos exactos fueron

$$A(1) = 70 \cdot 1^3 - 370 \cdot 1^2 + 1440 = 1140, \qquad A(2) = 70 \cdot 2^3 - 370 \cdot 2^2 + 1440 = 520,$$

luego $\Delta A(1)(1) = A(2) - A(1) = 520 - 1140 = -620$ €.

Vemos que la estimación era bastante ajustada.

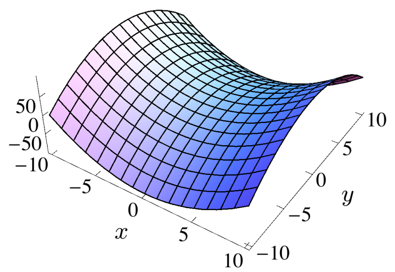
e) El saldo estuvo en "números rojos" entre $t = 3$ y $t = 4$. En efecto, comprobamos que

$$A(3) = 70 \cdot 3^3 - 370 \cdot 3^2 + 1440 = 0, \qquad A(4) = 70 \cdot 4^3 - 370 \cdot 4^2 + 1440 = 0.$$

f) En la gráfica observamos que el saldo creció más rápidamente en el último año, entre $t = 5$ y $t = 6$, pues se observa que en ese periodo la pendiente de la gráfica (su inclinación respecto de la horizontal) es mayor.

- No podemos representar gráficamente funciones de varias variables, pero para estudiar gráficamente el comportamiento de tales funciones podemos considerar las funciones que resultan de dar valores fijos a todas las variables menos una, como en el ejemplo siguiente, donde representamos la demanda en función del precio para valores fijos de la renta:

En realidad sí es posible representar tridimensionalmente funciones de dos variables. Por ejemplo, la figura muestra la gráfica de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$:

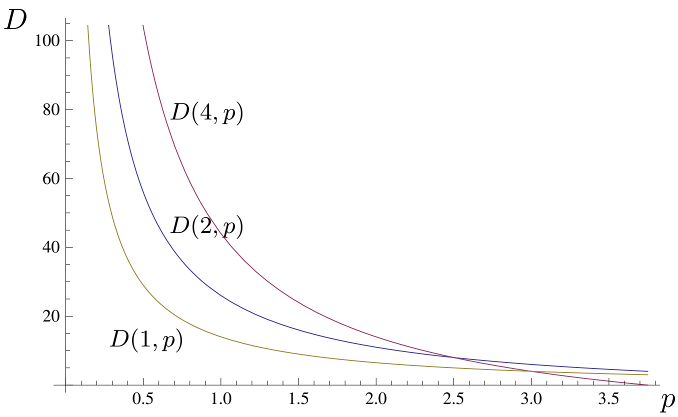


No obstante, nosotros no trabajaremos con este tipo de gráficas.

Ejemplo 9 Consideremos de nuevo la función del problema 1 de la página 27:

$$D(r, p) = \frac{15r}{p} - r^2 \text{ l/mes},$$

que representa el consumo de cerveza en función de la renta r de un consumidor y del precio p del litro de cerveza. La renta actual del consumidor es $r = 2$ miles de € y la cerveza se vende a 2 €/litro. La gráfica siguiente muestra las funciones $D(1, p)$, $D(2, p)$ y $D(4, p)$.



Observa que cada gráfica muestra la evolución de la demanda en función del precio manteniendo constante la renta. En general, cuando los economistas estudian la influencia de una magnitud sobre otra suponiendo constantes las demás magnitudes que podrían influir, indican esto mediante la expresión latina *"ceteris paribus"*, que significa "permaneciendo lo demás igual". Así, por ejemplo, la gráfica muestra que, cuando aumenta el precio *"ceteris paribus"*, la demanda disminuye. Aquí hay que entender *"ceteris paribus"* como "manteniendo la renta constante".

a) Escribe las funciones representadas en la gráfica.

b) Localiza en la gráfica la situación actual.

c) Razona a partir de la gráfica si una disminución del precio de 0.5 € hace aumentar o disminuir la demanda. Localiza en la gráfica la situación resultante.

d) ¿Y si el precio disminuye 0.5 € y a la vez la renta del consumidor disminuye $1\,000$ €?

e) ¿Existe algún precio p para el que la demanda del consumidor sea la misma tanto si su renta es $r = 1$ como si es $r = 4$? Deduce la respuesta de la gráfica y, en caso afirmativo, calcúlalo analíticamente.

f) ¿Puede ocurrir que (partiendo de una situación que no sea necesariamente la actual) un aumento de renta dé lugar a una disminución de la demanda sin que haya variación de precio?

g) Explica el comportamiento de la demanda que muestran las gráficas a medida que el precio se acerca a cero.

h) Calcula $D(2, 10^{-50})$ ¿Tiene sentido económico?

Solución:

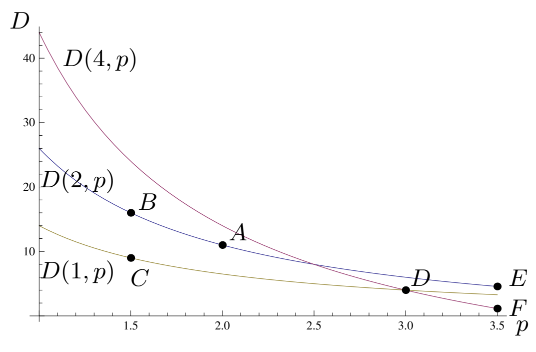
a) La función $D(1, p)$ se obtiene de sustituir $r = 1$ en la expresión de $D(r, p)$, es decir:

$$D(1, p) = \frac{15}{p} - 1 \quad \text{l/mes}.$$

Igualmente:

$$D(2, p) = \frac{30}{p} - 4, \qquad D(4, p) = \frac{60}{p} - 16.$$

b) La situación actual es el punto A de la figura, que corresponde al precio actual $p = 2$ y está sobre la gráfica de la función $D(2, p)$ correspondiente a la renta actual $r = 2$.



c) Si $\Delta p = -0.5$, el precio final pasa a ser $p = 1.5$, luego la situación final es la correspondiente al punto B de la figura, situado sobre la gráfica correspondiente a $r = 2$. Vemos que su altura es mayor que la del punto A, y esto significa que la demanda aumenta.

d) Si $\Delta p = -0.5$ y $\Delta r = -1$, pasamos al punto C de la figura, correspondiente a $p = 1.5$ y situado sobre la gráfica de la función $D(1, p)$. Vemos que la altura de C es menor que la de A, luego, en este caso, la demanda disminuye.

e) Si nos fijamos en las gráficas de las funciones $D(1, p)$ y $D(4, p)$, vemos que coinciden en el punto D de la figura. Se observa que corresponde a un precio $p = 3$, para el cual tenemos la misma demanda tanto si $r = 1$ como si $r = 4$. Para calcularlo analíticamente resolvemos la ecuación $D(1,p) = D(4,p)$, es decir:

$$\frac{15}{p} - 1 = \frac{60}{p} - 16 \Rightarrow 15 - p = 60 - 16p \Rightarrow 16p - p = 60 - 15 \Rightarrow 15p = 45$$

$$\Rightarrow p = \frac{45}{15} = 3.$$

f) La gráfica muestra que sí que es posible. Por ejemplo, al pasar de la situación correspondiente al punto E a la correspondiente al punto F estamos pasando de $r = 2$ a $r = 4$ sin modificar el precio $p = 3.5$, y sin embargo la demanda disminuye, pues el punto F está a menor altura que E.

g) Observamos que, cuanto más se acerca el precio a 0, la demanda se hace cada vez más grande. De hecho, de la expresión que define a D se deduce que la demanda "tiende a infinito", en el sentido de que podemos conseguir una demanda tan grande como queramos a base de fijar un precio suficientemente pequeño.

h) $D(2, 10^{-50}) = 2\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,996$ l/mes

Obviamente, esto no tiene sentido económico, aunque sólo sea porque la producción mundial de cerveza es de 120 000 000 000 l/año aproximadamente o que el precio $p = 10^{-50} = 0.00000000000000000000000000000000000000000000000001$ € es literalmente imposible. Vemos que el dominio con sentido económico de la función D no es realmente el formado por los pares (r,p) que cumplan $r \geq 0$ y $p > 0$, sino que habría que poner condiciones más finas sobre las rentas y los precios para que sean realmente viables. La relación observada entre precio y renta cerca de cero sólo puede interpretarse como una "tendencia", en el sentido de que para precios muy pequeños la demanda sería muy grande.

- El comportamiento de la función de demanda del ejemplo anterior cerca de cero se expresa matemáticamente así:

$$\lim_{p \to 0^+} D(r,p) = +\infty.$$

- En general, la expresión

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

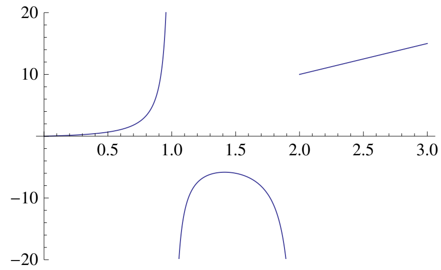
se lee *"el límite cuando x tiende a a de $f(x)$ es $+\infty$"* y significa que podemos conseguir que $f(x)$ sea tan grande como queramos siempre que tomemos x suficientemente cerca de a.

> Con más precisión, dada una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y un punto $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ que sea punto de acumulación del dominio D (es decir, que podamos acercarnos a $\bar{a}$ por puntos de D), se dice que
>
> $$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = +\infty$$
>
> si para todo número $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(\bar{x}) > M$ siempre que $\|\bar{x} - \bar{a}\| < \delta$.
>
> La definición de límite igual a $-\infty$ se obtiene cambiando $f(\bar{x}) > M$ por $f(\bar{x}) < -M$.

- Si esto sucede únicamente para valores de x mayores que a, lo expresamos con $x \to a^+$ (y se lee *"x tiende a a por la derecha")*, mientras que si sucede únicamente para valores de x menores que a se expresa con $x \to a^-$ (y se lee *"x tiende a a por la izquierda"*).

Ejemplo 10 Considera la función $f(x)$ cuya gráfica muestra la figura y razona a partir de ella el valor de los límites siguientes:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x), \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x), \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x), \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x).$$



Solución: En la gráfica se ve que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 10.$$

- Observa que el último límite del ejemplo anterior es finito, y se interpreta como que cuanto más se parece x a 2 (pero siendo $x > 2$), más se parece $f(x)$ al valor límite 10.

- En general, la expresión

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

significa que podemos conseguir que $f(x)$ sea tan parecido a l como queramos siempre que tomemos x suficientemente cerca de a. En particular:

$$\text{Si } x \approx a, \quad \text{entonces } f(x) \approx l.$$

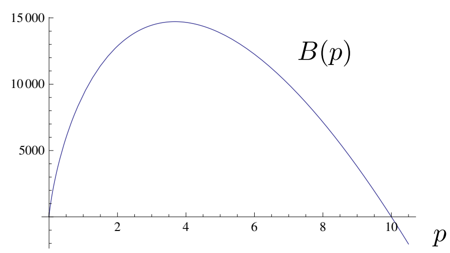
Como en el caso anterior, también podemos distinguir entre límites por la izquierda y la derecha.

> Con más precisión, dada una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y un punto $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ que sea punto de acumulación del dominio D, se dice que
>
> $$\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{l}$$
>
> si para todo número $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|f(\bar{x}) - \bar{l}\| < \epsilon$ siempre que $\|\bar{x} - \bar{a}\| < \delta$.

Ejemplo 11 La función $B(p) = 1000p \ln \frac{10\,000}{p^4}$ representa los beneficios de una empresa en función del precio p al que vende su producto.

a) Según la figura, ¿cuál es aproximadamente el máximo beneficio que puede conseguir la empresa? ¿Con qué precio de venta aproximadamente?

b) Siempre según la figura, ¿cuál es el precio máximo al que la empresa puede vender su producto sin tener pérdidas?



c) Calcula analíticamente dicho precio.

d) ¿Está definido $B(0)$?

e) Deduce de la figura el valor de $\lim_{p\to 0^+} B(p)$. Interpreta el resultado.

Solución:

a) Vemos que el máximo beneficio es de unos 15 000 u.m., que se consigue con un precio ligeramente inferior a las 4 u.m.

b) El beneficio de la empresa se hace cero cuando p alcanza las 10 u.m.

c) Tenemos que resolver la ecuación $B(p) = 0$. Concretamente:

$$1000p \ln \frac{10\,000}{p^4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1\,000\,p = 0 \\ \ln \frac{10\,000}{p^4} = 0 \end{cases}$$

Ésta es una situación que puede aparecerte en muchas ocasiones al resolver una ecuación:

Si un producto es igual a 0, uno de los factores tiene que ser 0.

Esto nos permite desdoblar la ecuación en tantas ecuaciones como factores tenga el producto. En este ejemplo tenemos dos ecuaciones alternativas que hay que resolver por separado.

La ecuación $1\,000p = 0$ tiene solución $p = 0$, que claramente no es la que estamos buscando (de hecho, la ecuación ni siquiera está definida en $p = 0$).

$$\ln \frac{10\,000}{p^4} = 0 \Rightarrow \frac{10\,000}{p^4} = e^0 = 1 \Rightarrow p^4 = 10\,000$$

$$\Rightarrow p = \sqrt[4]{10\,000} = 10$$

d) $B(0)$ no está definido, porque la expresión que define a $B(p)$ tiene una fracción cuyo denominador se anula en 0.

e) La figura muestra que $\lim_{p\to 0^+} B(p) = 0$. Esto significa que, aunque la función de beneficio no está definida para un precio $p = 0$, sí lo está para precios positivos cualesquiera y podemos lograr que se reduzca todo lo que queramos sin más que fijar un precio lo suficientemente pequeño.

Ejemplo 12 Una editorial lanzó al mercado una nueva novela cuyo precio en euros ha variado según la función $p(t) = 4 + 4e^{-t}$, donde t es el tiempo en meses desde el día del lanzamiento.

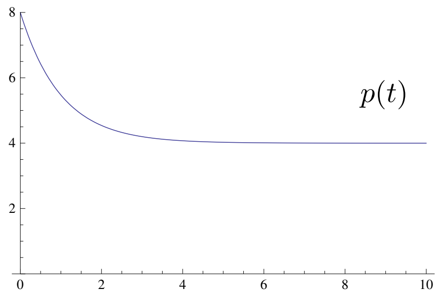
a) Calcula el precio inicial del libro (en $t = 0$).

b) Calcula el precio al que se vendía al cabo de 6 meses.

c) Describe la evolución del precio a largo plazo que muestra la gráfica.

d) ¿Llegará el precio a ser igual a 4 en algún momento?

e) Calcula el precio al cabo de un año ($t = 12$). Interpreta el resultado.



SOLUCIÓN:

a) $p(0) = 4 + 4e^0 = 8$ €.

b) $p(6) = 4 + 4e^{-6} = 4.0099$ €. Observamos que este precio no tiene sentido literalmente, pues no es posible pagar menos de un céntimo de euro. En la práctica habrá que interpretar este resultado como que el precio fue de 4.01 €.

c) La gráfica muestra que, desde que el libro se lanzó a 8 €, su precio ha ido descendiendo, pero no hasta valores arbitrariamente pequeños, sino que la tendencia que muestra a largo plazo es hacia un precio de $p = 4$ €.

Conviene que recuerdes que, en general, una función exponencial a^x, para $a > 0$, toma exclusivamente valores positivos, es decir, que $a^x > 0$ tanto si x es positivo como si es negativo.

d) Tenemos que resolver la ecuación $p(t) = 4$, es decir, $4 + 4e^{-t} = 4 \Rightarrow 4e^{-t} = 0 \Rightarrow e^{-t} = 0$, pero esto es imposible, pues una función exponencial nunca toma el valor 0. Así pues, aunque el precio del libro toma valores tan parecidos como se quiera a 4 €, desde un punto de vista puramente matemático la función $p(t)$ nunca llega a tomar el valor exacto 4 €.

e) $p(12) = 4.0000245$ €. Naturalmente, esto pone de manifiesto que, desde un punto de vista económico, el precio del libro es prácticamente igual a 4 a partir de un instante dado.

- El comportamiento a largo plazo de la función $p(t)$ del ejemplo anterior se expresa matemáticamente así:

$$\lim_{t\to+\infty} p(t) = 4.$$

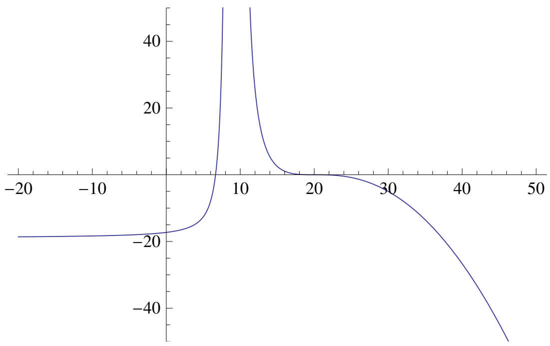
- En general, las expresiones

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l, \quad \text{o} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$$

significan que la función f se parece cada vez más al límite l a medida que la variable x toma valores más y más grandes (en el primer caso), o que $f(x)$ toma valores cada vez más grandes, si el límite es $+\infty$, o más pequeños (más grandes en valor absoluto, pero negativos) si el límite es $-\infty$. Los límites cuando $x \to -\infty$ se interpretan análogamente.

Ejemplo 13 Considera la función $f(x)$ cuya gráfica muestra la figura y razona a partir de ella el valor de los límites siguientes:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to 10} f(x).$$



Solución: En la gráfica se ve que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -20, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 10} f(x) = +\infty.$$

Hasta ahora nos hemos preocupado únicamente de los límites en puntos donde las funciones consideradas no estaban definidas. La razón es que, cuando las funciones que manejamos normalmente están definidas en un punto, su límite es simplemente el valor que toman en el punto. Para precisar esta idea conviene introducir la noción de continuidad.

Una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en un punto $\bar{p}$ de acumulación del dominio D si cumple:

a) Existe $f(\bar{p})$.

b) Existe $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{p}} f(\bar{x})$.

c) Se da la igualdad $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{p}} f(\bar{x}) = f(\bar{p})$.

La definición de continuidad expresa que el valor que toma la función en el punto coincide con su "tendencia", es decir, que lo que vale la función coincide con lo que "parece que va a valer".

Una interpretación alternativa es que para puntos $\bar{x} \approx \bar{p}$ obtenemos valores $f(\bar{x}) \approx f(\bar{p})$ o, también, que un incremento $\Delta\bar{x}$ pequeño a partir de $\bar{p}$ da lugar a un incremento pequeño $\Delta f(\bar{p})(\Delta\bar{x})$.

• Aunque la definición de continuidad contiene tres condiciones, es importante tener presente que, para las funciones que manejamos habitualmente, es decir, las formadas por composición de polinomios, raíces, exponenciales, logaritmos, senos, cosenos, etc., en cuanto cumplen la primera condición (estar definidas en el punto) cumplen automáticamente las otras dos y son continuas.

Una función formada por composición de funciones usuales (polinomios, exponenciales, logaritmos, senos, cosenos, raíces, etc.) es continua en todos los puntos en los que está definida.

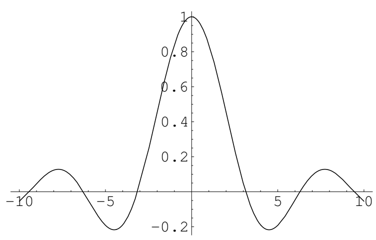
Ejemplo 14 Calcula

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{10e^{x-2y}}{x^2+y^2}.$$

Solución: La función que aparece en el límite es composición de funciones usuales y está definida en el punto $(2,1)$, por lo que es continua en dicho punto, es decir, el límite no es más que el valor de la función:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{10e^{x-2y}}{x^2+y^2} = \frac{10e^{2-2\cdot 1}}{2^2+1^2} = 2.$$

Ejemplo 15 La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ no está definida en $x = 0$, pero sí en todos los demás números reales, por lo que podemos dibujar su gráfica excepto en el punto 0. A la vista de la gráfica, nadie diría que f no se puede calcular en $x = 0$. "Parece" que $f(0) = 1$. Lo que hay de verdad en esto es que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Por eso, si definimos



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

podemos decir que la función $f(x)$ es continua en $x = 0$, porque el valor que "parece" que va a tomar en 0 (es decir, 1) es el valor que realmente toma en 0, mientras que $g(x)$ es discontinua en 0, porque, a la vista de la gráfica alrededor de 0, parece que g vaya a tomar el valor 1 en 0 (es decir, se cumple que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$), pero $g(0) = 0$.

Observa que no podemos decir que "f es continua en $\mathbb{R}^2$ porque está compuesta por polinomios". Cuando hablamos de "funciones compuestas a partir de otras" queremos decir funciones que resultan de poner "unas dentro de otras", como $\ln\sqrt{x^2+y}$, que consta de un polinomio dentro de una raíz dentro de un polinomio, pero no incluimos las funciones a trozos.

Ejemplo 16 Considera la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+2y & \text{si } x \le y, \\ x+y+15 & \text{si } x > y. \end{cases}$$

Puede justificarse que no es continua, por ejemplo, en el punto $(0,0)$. La idea es que $f(0,0) = 0^2 + 2\cdot 0 = 0$ mientras que, por poco que incrementemos el valor de x, por ejemplo, $\Delta x = 0.001$, la función pasa a valer $f(0.001, 0) = 0.001 + 0 + 15 = 15.001$, con lo que Δf es siempre grande.

2.4 Gráficas y límites de funciones elementales

Conviene que conozcas el comportamiento básico de las funciones usuales con las que trabajamos:

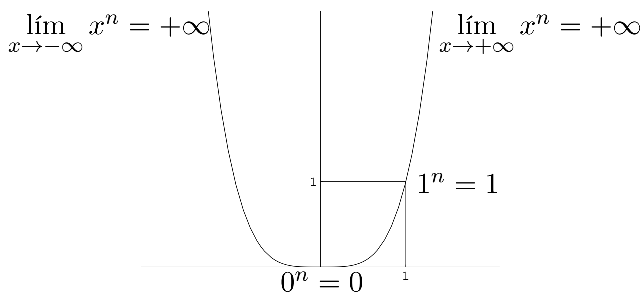
- **Funciones potenciales** Son las funciones de la forma $f(x) = x^\alpha$. Su comportamiento es muy distinto según cuál sea el exponente α. Destacamos los casos más relevantes:

El comportamiento en $\pm\infty$ en ambos casos es fácil de predecir:

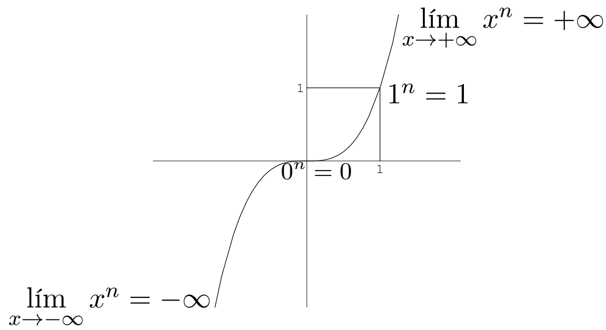
Si $x > 0$, entonces x^n es positivo, tanto si n es par o impar, por lo que el límite en $+\infty$ es $+\infty$ en ambos casos, mientras que si $x < 0$, se cumple que x^n es positivo cuando n es par (por lo que el límite en $-\infty$ es $+\infty$), pero x^n es negativo cuando n es impar (por lo que el límite en $-\infty$ es $-\infty$).

Exponente natural La gráfica de la función $f(x) = x^n$ cuando $n = 1, 2, 3, 4\ldots$ es diferente según que n sea par o impar.

n par



n impar



- Propiedades de las potencias

$$(xy)^n = x^n y^n, \qquad (x^n)^m = x^{nm}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}, \qquad x^m x^n = x^{m+n}$$

Observa que $(xy)^n = x^n y^n$ es válido cuando la base de la potencia es un producto, pero no lo es cuando se trata de una suma, es decir, en general

$$(x+y)^n \neq x^n + y^n.$$

Para $n = 2$, la fórmula correcta es

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy.$$

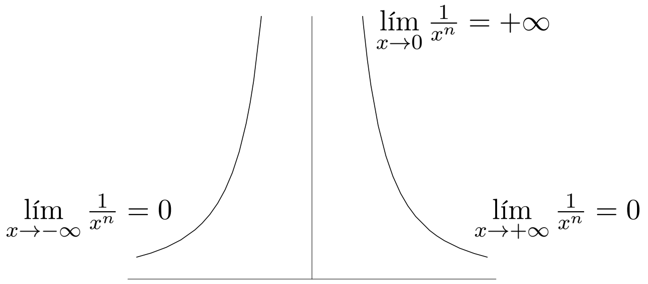
- Vemos que el dominio de x^n es $\mathbb{R}$, como ya sabíamos.

Exponente entero negativo Cuando el exponente es negativo, tenemos que

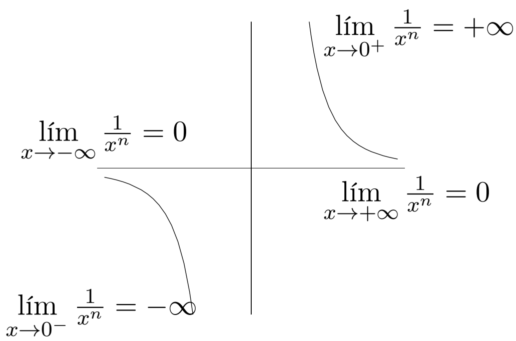
$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n},$$

por lo que ahora la potencia no está definida para $x = 0$, aunque sí que existe el límite en 0 (y es infinito). El comportamiento de la potencia en este caso es también distinto según que n sea par o impar:

n par



n impar



- Propiedades de las potencias

  Las fórmulas que hemos visto para potencias de exponente natural valen también cuando el exponente es un entero negativo, salvo que hay que exigir que la base sea distinta de 0 para que estén definidas las potencias. Además podemos añadir la siguiente propiedad sobre cocientes de potencias:

  $$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}.$$

- Como ya sabemos, el dominio de la función x^{-n} es $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

Para comprender el comportamiento en $\pm\infty$ de la función $1/x^n$ basta tener presente que

$$\lim_{n\to\pm\infty} x^n = \pm\infty$$

junto con el hecho de que una fracción es más pequeña cuanto mayor es su denominador, por ejemplo:

$$\frac{1}{10} = 0.1, \quad \frac{1}{100} = 0.01,$$

$$\frac{1}{1\,000\,000} = 0.000001, \text{ etc.}$$

Por eso, cuanto mayor es x (sin contar el signo), mayor es x^n (sin contar el signo) y x^{-n} se parece más a 0, por lo que el límite es 0, tanto si n es par como si es impar.

Para entender el límite en 0 hay que tener presente que una fracción es mayor cuanto menor es su denominador (sin contar el signo), por ejemplo:

$$\frac{1}{0.1} = 10, \quad \frac{1}{0.01} = 100,$$

$$\frac{1}{0.000001} = 1\,000\,000, \text{ etc.}$$

Por lo tanto, cuanto más se parece x a 0, más se parece x^n a 0 y mayor es x^{-n} (sin contar el signo), por lo que el límite en 0 es $\pm\infty$.

El signo concreto sí que depende de que n sea par o impar, y a este respecto basta recordar que x^{-n} es positivo siempre que $x > 0$, pero, cuando $x < 0$, se cumple que x^{-n} es positivo si n es par y negativo si n es impar. Por eso, para n impar, el límite por la izquierda en 0 es distinto del límite por la derecha.

En la práctica, puedes recordar resumidamente los límites de los cocientes mediante las relaciones

$$\frac{a}{0} = \pm\infty, \qquad \frac{a}{\pm\infty} = 0,$$

donde a es cualquier número distinto de 0.

Observa que el hecho de que $\sqrt[n]{x}$ no esté definida para $x < 0$ cuando n es par hace que la gráfica no exista a la izquierda de 0, mientras que para n impar existe tanto a la izquierda como a la derecha de 0.

Naturalmente, se cumple que $\sqrt[n]{0} = 0$, tanto si n es par como impar, y cabe destacar que la pendiente de la gráfica es completamente vertical en 0.

Para comprender los límites en $\pm\infty$ basta tener presente que, aunque $\sqrt[n]{x}$ es menor que x cuando x es grande, lo cierto es que, a medida que x crece, lo mismo le sucede a $\sqrt[n]{x}$, por lo que los límites en $\pm\infty$ son infinitos.

El signo concreto se sigue de que $\sqrt[n]{x}$ es positiva cuando x es positivo y negativa cuando x es negativo (y n es impar).

Podemos resumir este comportamiento mediante la relación

$$\sqrt[n]{\pm\infty} = \pm\infty$$

teniendo en cuenta que los signos negativos sólo tienen sentido si n es impar.

Nuevamente debes recordar que la propiedad que permite separar una raíz en dos requiere que el radicando sea un producto, y no es válida cuando es una suma. En general

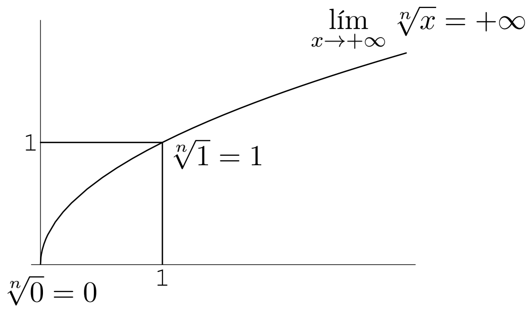
$$\sqrt[n]{x+y} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}.$$

Exponente fraccionario Consideramos ahora las potencias

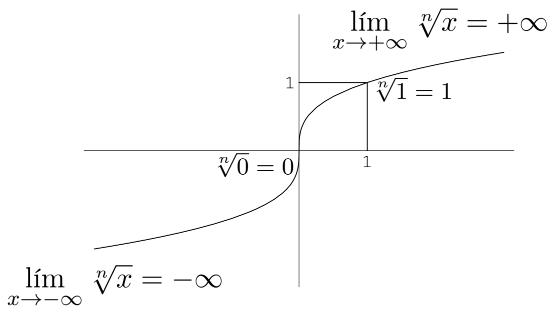
$$f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x},$$

donde $n = 2, 3, 4, \ldots$ En este caso sabemos que las raíces no están definidas para $x < 0$ cuando el índice n es par y, por consiguiente, las gráficas también son distintas según que n sea par o impar.

n par



n impar



- Propiedades de las raíces

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}, \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}, \qquad (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m},$$

$$\sqrt[n]{x^n} = x, \qquad (\sqrt[n]{x})^n = x,$$

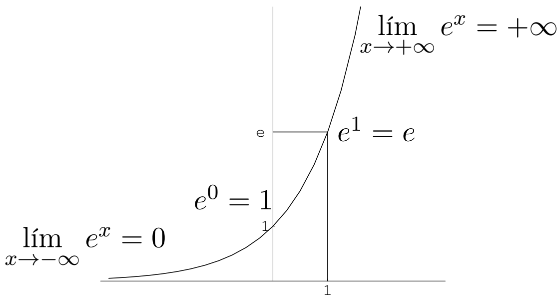
donde x e y tienen que ser positivas si n es par.

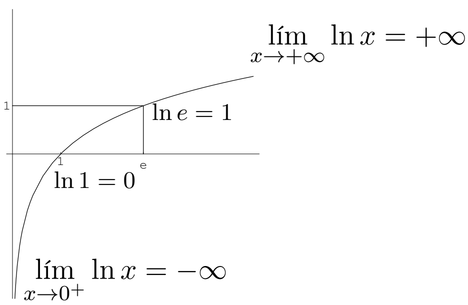
- Las dos últimas propiedades expresan que la función $\sqrt[n]{x}$ es la inversa de x^n, es decir, que si partimos de un número x, le aplicamos la función x^n y luego $\sqrt[n]{x}$ (o al revés), volvemos a obtener el mismo número x de partida.

- Esto se aplica a la hora de despejar potencias o raíces en ecuaciones: si un miembro de una ecuación es una potencia, podemos pasar el exponente al otro miembro como raíz, y viceversa:

$$(\sqrt[3]{x} + 7)^4 = 20 \Rightarrow \sqrt[3]{x} + 7 = \sqrt[4]{20} \Rightarrow \sqrt[3]{x} = \sqrt[4]{20} - 7 = -4.88 \Rightarrow x = (-4.88)^3 = -116.21.$$

- **Exponencial y logaritmo** La función exponencial e^x y la función logaritmo $\ln x$ tienen las gráficas siguientes:





En general, se llaman funciones exponenciales a las de la forma a^x, donde la variable está en el exponente y la base $a > 0$ es un número cualquiera, no necesariamente el número e, por oposición a las funciones potenciales x^a, donde la variable está en la base.

La gráfica de a^x, para $a > 1$ presenta las mismas características que la gráfica de e^x que muestra la figura.

Observa que la exponencial es siempre positiva (la gráfica nunca toca al eje x ni pasa a estar por debajo del mismo), mientras que $\ln x$ es negativo a la izquierda de 1 y positivo a la derecha de 1.

Advierte también que, como $\ln x$ no está definido para números negativos, su gráfica sólo existe a la derecha de 0, mientras que la exponencial existe sobre toda la recta.

En la práctica puedes recordar los límites de estas funciones como

$$a^{+\infty} = +\infty, \quad a^{-\infty} = 0, \ (a > 1)$$

$$\ln 0^+ = -\infty, \quad \ln +\infty = +\infty.$$

- Propiedades de las funciones exponenciales

  La función exponencial con base $a > 0$ se define como $a^x = e^{x \ln a}$ (por eso a las potencias con exponente variable hay que exigirles que la base sea $a > 0$). Si las bases de las potencias son positivas, se cumplen las propiedades siguientes:

$$(ab)^x = a^x b^x, \qquad a^x a^y = a^{x+y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$

  (pero en general $(a+b)^x \neq a^x + b^x$).

- Propiedades del logaritmo

  Aunque pueden definirse logaritmos en otras bases, nosotros consideraremos únicamente logaritmos neperianos. Sus propiedades son:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \qquad \ln(x^y) = y \ln x, \qquad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y,$$

$$\ln e^x = x, \qquad e^{\ln x} = x$$

- Las dos últimas propiedades expresan que la función $\ln x$ es la inversa de e^x, es decir, que si partimos de un número x, le aplicamos la función $\ln x$ y luego e^x (o al revés), volvemos a obtener el mismo número x de partida.

- Esto se aplica a la hora de despejar exponenciales y logaritmos en ecuaciones: si un miembro de una ecuación es una exponencial, podemos pasar la exponencial al otro miembro como logaritmo, y viceversa:

$$e^{3\ln x+7} = 8 \Rightarrow 3\ln x + 7 = \ln 8 \Rightarrow 3\ln x = \ln 8 - 7$$

$$\Rightarrow \ln x = \frac{\ln 8 - 7}{3} = -1.64 \Rightarrow x = e^{-1.64} = 0.19.$$

- Para despejar exponentes con base distinta de e tomamos logaritmos en ambos miembros:

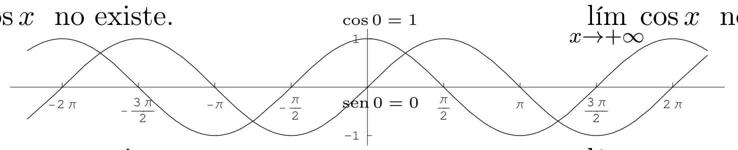
$$1.03^t = 2 \Rightarrow \ln 1.03^t = \ln 2 \Rightarrow t\ln 1.03 = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln 1.03} = 23.45.$$

- **Seno y coseno** El número π es

$$\pi = 3.141592654\ldots$$

Las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ oscilan periódicamente y toman valores entre -1 y 1, como muestra la gráfica siguiente:

$\lim\limits_{x\to-\infty} \cos x$ no existe. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ no existe.



$\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sen} x$ no existe. $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ no existe.

- A partir de los límites de las funciones básicas que acabamos de estudiar es fácil calcular límites de composiciones de estas funciones, como mostramos en el ejemplo siguiente:

El cálculo puede razonarse así:

En el primer límite, la primera operación que le hacemos a x es $1/x^2$ y sabemos que si $x \to 0$, $1/x^2$ tiende a $1/0 = \infty$, y el signo es $+\infty$ porque $x^2 \geq 0$. Después usamos que $2^{+\infty} = +\infty$ y por último que si sumamos un número (8 en este caso) a una función que se hace cada vez más grande, el resultado se hace también cada vez más grande, luego $2^{1/x^2} + 8 \to +\infty$.
(En general, se cumple que $\pm\infty + c = \pm\infty$ para cualquier número c, positivo o negativo). Por último usamos que $\sqrt[3]{+\infty} = +\infty$.

El segundo límite se razona igualmente. La única diferencia es que ahora usamos $2^{-\infty} = 0$, que si sumamos 8 a algo que tiende a 0 el límite es 8, y que si una función tiende a 8, su raíz cúbica tiende a $\sqrt[3]{8} = 2$, porque es continua.

Ejemplo 17 Calcula los límites siguientes:

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{2^{1/x^2} + 8}, \qquad \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{2^{1/x^5} + 8}.$$

SOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} 2^{1/x^2} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{2^{1/x^2} + 8} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^5} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} 2^{1/x^5} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{2^{1/x^5} + 8} = 2.$$

2.5 Problemas resueltos

1. Una empresa estima que la demanda diaria de su producto depende de su precio p, del precio p' de un bien sustitutivo y de la renta media r de los consumidores. En función de estos datos, la demanda esperada es
$$D(r,p,p') = \frac{\sqrt{rp'}}{2p}.$$
   (a) Calcula, si es posible, $D(-6,6,1)$ y $D(-6,6,-1)$. Interpreta el resultado.
   (b) Calcula el dominio D_0.
   (c) Escribe el subdominio con sentido económico S_0.
   (d) Pon un ejemplo de punto $\bar{x} = (r,p,p') \in \mathbb{R}^3$ que cumpla $\bar{x} \in D_0$ y a la vez $\bar{x} \notin S_0$.

   Solución:

   (a) $D(-6,6,1) = \frac{\sqrt{-6}}{12}$ no puede calcularse, porque no existen las raíces cuadradas de números negativos.

   $D(-6,6,-1) = \frac{\sqrt{6}}{12} = 0.2$. La función está definida, pero el resultado no tiene interpretación económica, ya que no tiene sentido que la renta de los consumidores o el precio del bien sustitutivo sean negativos.

   (b) $D_0 = \{(r,p,p') \in \mathbb{R}^3 \mid p \neq 0, rp' \geq 0\}$.

   (c) $S_0 = \{(r,p,p') \in \mathbb{R}^3 \mid r \geq 0,\ p > 0, p' > 0\}$.

   (d) Sirve como ejemplo el punto considerado en el apartado (a): $\bar{x} = (-6,6,-1)$. Hemos visto que D está definida en el punto (es decir, $\bar{x} \in D_0$), pero que el cálculo no tiene sentido económico, (es decir, que $\bar{x} \notin S_0$).

> En general, el subdominio con sentido económico de una función que tenga una interpretación en un contexto concreto es el conjunto de puntos donde la función, no sólo se puede calcular, sino que además el cálculo tiene sentido en el contexto considerado.
>
> Además del caso del problema 1, en el que no tiene sentido considerar precios y rentas negativas, hemos visto también el caso del Ejemplo 9, apartado (h) (página 41), en el que el precio no tenía sentido por ser demasiado pequeño y la demanda no lo tenía por ser demasiado grande.
>
> Otra situación típica es la de una función ajustada para un rango concreto de sus variables. Así, si nos dan que el beneficio de una empresa ha sido $B(t) = 50 + 3t^2$ en el periodo $[0,3]$, donde t es el tiempo en años, tenemos que el subdominio con sentido económico es
> $$S_0 = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 3\}$$
> porque, aunque se puede calcular, por ejemplo, $B(7)$, no se nos asegura que B represente el beneficio de la empresa para $t \geq 3$.

2. Calcula el dominio de la función $f(x,y,z) = \frac{\ln(x+y)}{e^x+\sqrt{z}}$.

   Solución:

   - El denominador de la fracción debe ser $\neq 0$: $e^x + \sqrt{z} \neq 0$,
   - El argumento del logaritmo debe ser > 0: $x + y > 0$,
   - El radicando de la raíz cuadrada (índice par) debe ser ≥ 0: $z \geq 0$.
   - La potencia e^x con exponente variable tiene base $e > 0$, luego no hay que exigir nada.

   Por lo tanto:
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid e^x + \sqrt{z} \neq 0,\ x + y > 0,\ z \geq 0\}.$$

En realidad la primera condición es redundante porque $e^x > 0$ y $\sqrt{z} \geq 0$, por lo que el dominio puede simplificarse hasta

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y > 0,\ z \geq 0\}.$$

3. Calcula el dominio de la función $f(x,y) = \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{y}}}{\ln(0.5+2^{x+y})}$.

   Solución:

   - El denominador de una fracción debe ser $\neq 0$: $x \neq 0$, $\sqrt{y} \neq 0$, $\ln(0.5 + 2^{x+y}) \neq 0$,
   - El argumento del logaritmo debe ser > 0: $0.5 + 2^{x+y} > 0$,
   - El radicando de la raíz cuadrada (índice par) debe ser ≥ 0: $y \geq 0$,
   - La base de la potencia con exponente variable 2^{x+y} es $2 > 0$, luego no hay que exigir nada.

   Por consiguiente:

   $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0,\ \sqrt{y} \neq 0,\ \ln(0.5 + 2^{x+y}) \neq 0,\ 0.5 + 2^{x+y} > 0,\ y \geq 0\}.$$

   Como $2^{x+y} > 0$, podemos suprimir la cuarta condición. Además, la segunda y la última se pueden combinar en $y > 0$, con lo que queda

   $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0,\ y > 0,\ \ln(0.5 + 2^{x+y}) \neq 0\}.$$

4. Calcula el dominio de la función $f(x, y, z) = \dfrac{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{y})^z}{x + 3}$.

   Solución:

   - El denominador de una fracción debe ser $\neq 0$: $x + 3 \neq 0$,
   - El radicando de una raíz de índice par debe ser ≥ 0: $x \geq 0$,
   - La base de una potencia de exponente variable debe ser > 0: $\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{y} > 0$.

   Por consiguiente:

   $$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3 \neq 0, x \geq 0, \sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{y} > 0\}.$$

5. Calcula el dominio de la función $f(x, y, z) = \dfrac{\ln(x + \sqrt[3]{y})}{x^z - y}$.

   Solución:

   - El denominador de una fracción debe ser $\neq 0$: $x^z - y \neq 0$,
   - El argumento de un logaritmo debe ser > 0: $x + \sqrt[3]{y} > 0$,
   - No hay raíces de índice par.
   - La base de una potencia de exponente variable debe ser > 0: $x > 0$.

   Por lo tanto: $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^z - y \neq 0, x + \sqrt[3]{y} > 0, x > 0\}$.

6. Calcula el dominio de la función $f(x,y) = \left(\ln(x/y) + \sqrt[5]{x}\right)^{3+\sqrt{y}}$.

   SOLUCIÓN:

   - El denominador de una fracción debe ser $\neq 0$: $y \neq 0$.
   - El radicando de una raíz de índice par debe ser ≥ 0: $y \geq 0$ (Esta condición se puede agrupar con la anterior y reducirse a $y > 0$.)
   - El argumento de un logaritmo debe ser > 0: $x/y > 0$ (Teniendo en cuenta la condición anterior esto puede simplificarse a $x > 0$.)
   - La base de una potencia de exponente variable debe ser > 0: $\ln(x/y) + \sqrt[5]{x} > 0$.

   Por consiguiente:

   $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0,\ y \geq 0,\ x/y > 0,\ \ln(x/y) + \sqrt[5]{x} > 0\},$$

   o, más simplificado:

   $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, \ln(x/y) + \sqrt[5]{x} > 0\}.$$

7. Calcula el dominio de la función $f(x,y) = (\sqrt{x} + \sqrt[3]{y})^{\ln(x-y)} + \cos(\frac{x}{x^2-y})$.

   SOLUCIÓN:

   - El denominador de una fracción debe ser $\neq 0$: $x^2 - y \neq 0$.
   - El argumento de un logaritmo debe ser mayor que 0: $x - y > 0$.
   - El radicando de una raíz de índice par debe ser ≥ 0: $x \geq 0$.
   - La base de una potencia con exponente variable debe ser > 0: $\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} > 0$.

   Por lo tanto:

   $$D = \{(x,y,) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y \neq 0\ \ x - y > 0,\ x \geq 0,\ \sqrt{x} + \sqrt[3]{y} > 0\}.$$

8. Calcula el dominio de las funciones siguientes:

   $$f(x,y,z) = \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt[7]{x-y}} \ln(z^{x^2-3} - \frac{5}{z+3}), \qquad g(x,y) = e^{\operatorname{sen} xy} + \sqrt[3]{\cos x}$$

   SOLUCIÓN:

   - El denominador de una fracción debe ser $\neq 0$: $\sqrt[7]{x-y} \neq 0$, $z + 3 \neq 0$
   - El argumento de un logaritmo debe ser > 0: $z^{x^2-3} - \frac{5}{z+3} > 0$
   - El radicando de una raíz de índice par debe ser ≥ 0: $x + y \geq 0$
   - La base de una potencia de exponente variable debe ser > 0: $z > 0$

Por lo tanto

$$D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt[7]{x-y} \neq 0, z+3 \neq 0, z^{x^2-3} - \frac{5}{z+3} > 0, x+y \geq 0, z > 0\}$$

o también:

$$D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y \neq 0, z+3 \neq 0, z^{x^2-3} - \frac{5}{z+3} > 0, x+y \geq 0, z > 0\}$$

$D_g = \mathbb{R}^2$.

9. Calcula el dominio de las funciones siguientes:

$$f(x,y,z) = \sqrt[5]{2^x - yz} \qquad g(x,y) = \ln\left(\frac{x^y + y^x}{\sqrt{x-y} + \sqrt[3]{x^2-y}}\right)$$

Solución:

$D_f = \mathbb{R}^3$

- El denominador de una fracción debe ser $\neq 0$: $\sqrt{x-y} + \sqrt[3]{x^2-y} \neq 0$
- El argumento de un logaritmo debe ser > 0: $\frac{x^y+y^x}{\sqrt{x-y}+\sqrt[3]{x^2-y}} > 0$
- El radicando de una raíz de índice par debe ser ≥ 0: $x-y \geq 0$
- La base de una potencia de exponente variable debe ser > 0: $x > 0,\ y > 0$

$$D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x-y} + \sqrt[3]{x^2-y} \neq 0,\ \frac{x^y + y^x}{\sqrt{x-y} + \sqrt[3]{x^2-y}} > 0,$$
$$x-y \geq 0, x > 0, y > 0\}$$

10. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la función dada por

$$f(x,y) = \left(\frac{\ln(x^2-3)}{x^2+y^2},\ (y+1)^{2x},\ \sqrt[3]{\operatorname{sen} y}\right).$$

Completa: $n =$ $m =$ $D =$.

Solución: $n = 2$ $m = 3$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \neq 0, x^2-3 > 0, y+1 > 0\}$.

- El denominador de una fracción debe ser $\neq 0$: $x^2+y^2 \neq 0$,
- El argumento de un logaritmo debe ser > 0: $x^2-3 > 0$,
- No hay raíces de índice par,
- La base de una potencia de exponente variable debe ser > 0: $y+1 > 0$.

11. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la función dada por

$$f(x,y,z) = \left((x+y+z)^{\ln z},\ \frac{z}{x - \sqrt[3]{\cos y}}\right).$$

Completa: $n =$ $m =$ $D =$.

Solución: $n = 3$ $m = 2$

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - \sqrt[3]{\cos y} \neq 0, z > 0, x+y+z > 0\}$$

- El denominador de una fracción debe ser $\neq 0$: $x - \sqrt[3]{\cos y} \neq 0$,
- El argumento de un logaritmo debe ser > 0: $z > 0$,
- No hay raíces de índice par.
- La base de una potencia de exponente variable debe ser > 0: $x + y + z > 0$.

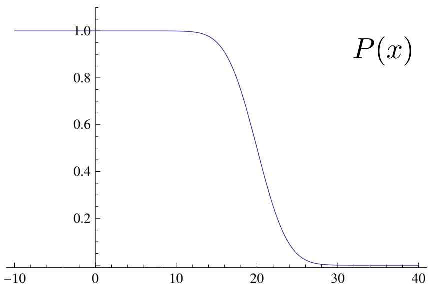
12. La figura muestra, para cada x, la probabilidad $P(x)$ de que la edad de un estudiante de cierta universidad tomado al azar tenga edad $\geq x$.

    (a) Deduce de la figura qué edad x cumple que la probabilidad de que un alumno tomado al azar tenga menos de x años sea la misma que la de que tenga más de x años.

    (b) Deduce de la figura el valor de los límites

    $$\lim_{x\to-\infty} P(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} P(x).$$

    ¿Es razonable el resultado?



SOLUCIÓN:

(a) Nos preguntan para qué valor de x las probabilidades de tener más y menos de x años son ambas del 50%, es decir, de 0.5, y en la gráfica se ve que esto sucede cuando $x = 20$.

(b) Claramente $\lim_{x\to-\infty} P(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} P(x) = 0$. Esto significa que la probabilidad de que la edad de un universitario sea mayor o igual que un número muy pequeño (y, con mayor razón, un número negativo) es prácticamente 1, mientras que la probabilidad de que su edad sea mayor o igual que un número muy grande es prácticamente nula.

13. Calcula los límites siguientes:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{10}{2^{\ln x}+5} - 3, \qquad \lim_{x\to0^+} \frac{10}{2^{\ln x}+5} - 3.$$

SOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} 2^{\ln x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{10}{2^{\ln x}+5} - 3 = -3$$

$$\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x\to0^+} 2^{\ln x} = 0 \qquad \lim_{x\to0^+} \frac{10}{2^{\ln x}+5} - 3 = -1$$

14. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to-\infty} 7 + e^{3-x^2}$ *b*) $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x-2}$ *c*) $\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{1}{x^3}$ *d*) $\lim_{x\to-\infty} 2^{\sqrt[3]{x}}$

e) $\lim_{t\to0^-} 6 - 2e^{1/t}$ *f*) $\lim_{t\to0^+} 6 - 2e^{1/t}$ *g*) $\lim_{x\to0^-} \sqrt{4 + e^{\frac{4}{x^5}}}$ *h*) $\lim_{t\to0^+} 3 - 2^{\sqrt[3]{\ln t}}$

i) $\lim_{t\to0^+} \frac{3}{\sqrt[3]{\ln t}} - 4$ *j*) $\lim_{x\to5^+} 2 - \sqrt[3]{\ln(x-5)}$

Solución:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 7+e^{3-x^2}=7,$

porque $x^2\to+\infty$, luego $3-x^2\to-\infty$, luego $e^{3-x^2}\to 0$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x-2}=+\infty,$

porque $\ln x\to-\infty$ y $x-2\to-2$, luego el cociente (al ser el numerador y el denominador negativos) tiende a $+\infty$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{1}{x^3}=-\infty$

porque $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0^+$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2^{\sqrt[3]{x}}=0,$

porque $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x}=-\infty$.

(e) $\lim_{t\to0^-}\frac{1}{t}=-\infty\Rightarrow\lim_{t\to0^-}e^{1/t}=0\Rightarrow\lim_{t\to0^-}6-2e^{1/t}=6-2\cdot 0=6.$

(f) $\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}=+\infty\Rightarrow\lim_{t\to0^+}e^{1/t}=+\infty\Rightarrow\lim_{t\to0^+}6-2e^{1/t}=-\infty.$

(g) $\lim_{x\to0^-}\frac{4}{x^5}=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to0^-}e^{\frac{4}{x^5}}=0\Rightarrow\lim_{x\to0^-}4+e^{\frac{4}{x^5}}=4\Rightarrow\lim_{x\to0^-}\sqrt{4+e^{\frac{4}{x^5}}}=2.$

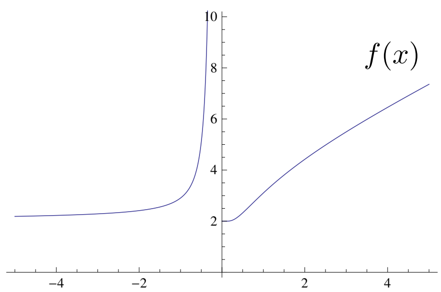
(h) $\lim_{t\to0^+}\ln t=-\infty\Rightarrow\lim_{t\to0^+}\sqrt[3]{\ln t}=-\infty\Rightarrow\lim_{t\to0^+}2^{\sqrt[3]{\ln t}}=0\Rightarrow\lim_{t\to0^+}3-2^{\sqrt[3]{\ln t}}=3.$

(i) $\lim_{t\to0^+}\ln t=-\infty\Rightarrow\lim_{t\to0^+}\sqrt[3]{\ln t}=-\infty\Rightarrow\lim_{t\to0^+}\frac{3}{\sqrt[3]{\ln t}}=0\Rightarrow\lim_{t\to0^+}\frac{3}{\sqrt[3]{\ln t}}-4=-4.$

(j) $\lim_{x\to5^+}x-5=0^+\Rightarrow\lim_{x\to5^+}\ln(x-5)=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to5^+}\sqrt[3]{\ln(x-5)}=-\infty\Rightarrow$

$$\lim_{x\to5^+}2-\sqrt[3]{\ln(x-5)}=+\infty.$$

15. Considera la función $f(x)=2+\dfrac{3^{\sqrt[3]{x}}}{e^{1/x}}$.



(a) Deduce de la gráfica los valores de los límites

$$\lim_{x\to-\infty}f(x),\quad \lim_{x\to0^-}f(x),$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x),\quad \lim_{x\to+\infty}f(x).$$

(b) Comprueba analíticamente que los límites son los que has deducido de la gráfica.

Solución:

(a) En la gráfica se observa que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} 3^{\sqrt[3]{x}} = 0, \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} 1/x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{1/x} = e^0 = 1,$
luego

$$\lim_{x\to-\infty} 2 + \frac{3^{\sqrt[3]{x}}}{e^{1/x}} = 2 + \frac{0}{1} = 2.$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} 3^{\sqrt[3]{x}} = 3^0 = 1, \qquad \lim\limits_{x\to 0^-} 1/x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0,$
luego

$$\lim_{x\to 0^-} 2 + \frac{3^{\sqrt[3]{x}}}{e^{1/x}} = +\infty.$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} 3^{\sqrt[3]{x}} = 3^0 = 1, \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} 1/x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty,$
luego

$$\lim_{x\to 0^+} 2 + \frac{3^{\sqrt[3]{x}}}{e^{1/x}} = 2 + 0 = 2.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 3^{\sqrt[3]{x}} = +\infty, \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} 1/x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x} = e^0 = 1,$
luego

$$\lim_{x\to+\infty} 2 + \frac{3^{\sqrt[3]{x}}}{e^{1/x}} = +\infty.$$

2.6 Problemas propuestos

1. Calcula el dominio de las funciones siguientes:

$$f(x,y) = \frac{x^{\ln y} \operatorname{sen} \frac{y}{x-2}}{\sqrt{5^x + \sqrt[3]{1-y}}}, \qquad g(u,v,w) = \ln\left(\frac{\sqrt{u+1} - \sqrt[4]{v-1}}{(\cos w)^{u+3}}\right),$$

$$h(p,q,r,s) = \operatorname{sen}^5 \sqrt[3]{pq - qr^4} - e^{s^4}, \qquad k(a,b) = (a^{\sqrt{b}} + 1, \frac{a}{b+3}, \ln(a^4+7)).$$

2. Considera las funciones siguientes:

$$f(x,y,z) = 30 + xy^2 - zy^{-2}, \quad g(u,v) = \frac{uv^2 + v^6}{v + 3u}, \quad p(w) = 3w^4 - 2w + 5,$$

$$h(r,s,t) = (r + s^4, st + 3, rst - 3rt^2, t), \quad P(m,n) = 4m^3n - 2m + 7m^2n^5,$$

$$F(u,v,w) = u + 5v - w, \quad G(x,y) = (5x+2y)^2 + \frac{3}{x}, \quad H(p,q,r) = 8,$$

$$R(x,y,z,w) = \sqrt[4]{5x - 3y + z + 2w}, \qquad S(x,y,z,w) = \sqrt[4]{5}x - 3y + z + 2w.$$

(a) Indica cuáles son polinomios y cuáles no lo son. En caso de que no lo sean explica por qué.

(b) De entre todas las funciones sólo hay una que es lineal. Indica cuál es.

(c) Calcula sus dominios.

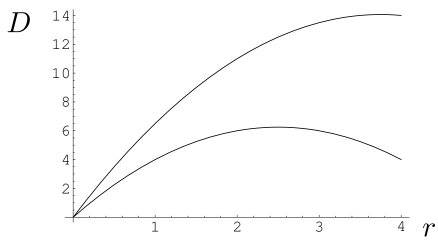
(d) Particulariza para cada una de ellas la expresión $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

3. Consideremos de nuevo la función del problema 1 de la página 27:

$$D(r, p) = \frac{15r}{p} - r^2 \text{ l/mes},$$

que representa el consumo de cerveza en función de la renta r de un consumidor y del precio p del litro de cerveza. Los valores actuales son $p = 2$ € y $r = 2$ miles de €.

La figura muestra las gráficas de las funciones $D(r, 2)$ y $D(r, 3)$ (o, como dicen los economistas, dos gráficas de D como función de r "*ceteris paribus*"):



(a) Razona qué curva corresponde a $D(r, 2)$ y cuál a $D(r, 3)$.

(b) Determina si el número de litros consumidos aumentará o disminuirá si el consumidor pasa a tener una renta de 4 000 €.

(c) Si el precio es de 2 u.m., ¿qué renta daría lugar al mayor consumo mensual de cerveza aproximadamente? ¿Cuántos litros consumiría aproximadamente con dicha renta?

(d) Determina si, en caso de que, partiendo de los valores iniciales $(r, p) = (2, 2)$ la renta pase a ser de $r = 2.5$ u.m. y el precio pase a $p = 3$ u.m., el consumo de cerveza aumentará o disminuirá.

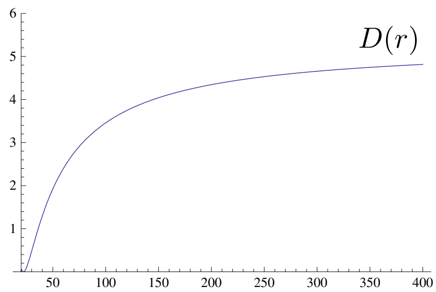
(e) Un bien se dice *normal* si cuando los consumidores tienen más renta aumentan el consumo, y se dice *inferior* en caso contrario. Razona a partir de las gráficas si la cerveza es un bien normal o inferior para nuestro consumidor.

(f) Calcula la función $D(2, p)$.

(g) Calcula $\lim_{p \to 0^+} D(2, p)$ e interpreta el resultado. ¿Depende el resultado de que la renta actual sea precisamente $r = 2$?

4. A partir de un estudio econométrico, un economista ha construido una función que se ajusta a la cantidad mensual de un bien que consume cada individuo de una población en función de su nivel de renta. La función resulta ser

$$D(r) = \left(1 - \frac{20}{r}\right) \ln^2 \left(10 - \frac{200}{r}\right).$$



(a) Comprueba que el dominio de D es el conjunto $D_0 = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 20\}$. ¿Tiene esto una interpretación económica?

(b) ¿Está definida la función D para $r = 20$?

(c) A la vista de la gráfica, ¿tiene sentido hablar de la demanda del producto cuando la renta es de 20 u.m.?

(d) ¿Cómo expresarías el apartado anterior matemáticamente?

(e) ¿Qué cabe suponer que sucede con los consumidores cuya renta es menor de 20 u.m.?

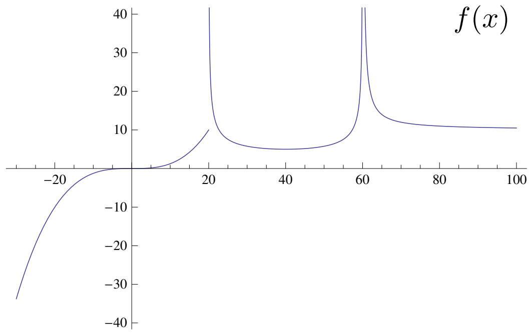
(f) Deduce de la gráfica el valor aproximado de $\lim\limits_{r\to+\infty} D(r)$. Interprétalo.

(g) Calcula el límite del apartado anterior.

5. A partir de la gráfica, determina los límites siguientes:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to 0} f(x), \quad \lim_{x\to 20^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to 20^+} f(x), \quad \lim_{x\to 60} f(x), \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$



6. Calcula los límites siguientes:

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{t^4}{3} - 5\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} 2 + \sqrt[3]{4-2x}\,, \qquad \lim_{h\to+\infty} \frac{1}{\ln^3(h^2+2)}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{1}{x}\,,$$

$$\lim_{t\to 0^+} e^{2/t^3}\,, \qquad \lim_{t\to 0^-} e^{2/t^3}\,, \qquad \lim_{y\to 1}(y^2-1)^{2/3}\,, \qquad \lim_{y\to 1}(y^2-1)^{-2/3}\,.$$

Dominios

7. Calcula el dominio de las funciones siguientes y particulariza para cada una de ellas la expresión $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$:

$$f(x,y,z) = \frac{\sqrt{x+3y} + \frac{\ln(x-y)}{z}}{e^{x-5y}}, \qquad h(u,v) = \left(\sqrt{\ln(u^2+v^2+3)},\ (u+v)^{\sqrt[3]{u}},\ 3^{u-v}\right),$$

$$f(x,y) = (\cos 2^y,\ y^5 \operatorname{sen} \sqrt[5]{x}), \qquad P(a,b,c,d) = \frac{\sqrt[4]{a}}{a^2+b^2+1} - \frac{\sqrt[3]{c}}{c^3+d^3+1},$$

$$h_1(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)+3, \qquad h_2(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2+3),$$

$$h_3(x,y,z) = \ln(x+y+z+3), \qquad h(t) = \left(\sqrt{t^2-t^3},\ (t+1)^t\right).$$

8. Calcula el dominio de las funciones siguientes:

$$\frac{(x+y)^{3/4}}{x-y}, \qquad \sqrt{x^2+y^2}, \qquad 2^{x/\sqrt{y}}, \qquad y^{x^2}, \qquad (y^2)^x, \qquad \frac{x\ln(x+y+1)}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\sqrt[4]{x-y^2}}{\sqrt[3]{x^3-2y}}, \qquad \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^3+y^3}, \qquad e^{\operatorname{sen} xy}, \qquad \operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}, \qquad f(x,y) = (x^2+2y^3)^{-3},$$

$$L(x,y) = x^{-2}\cos xy, \qquad r(t) = \frac{t}{t+1}, \qquad h(x,y,z) = (x\ln(y+z), e^{1/y}, x+y^2-3z),$$
$$f(m,n) = 3m^2 - 2mn + 7, \qquad p(u,v) = (\sqrt{u+v},\ \ln u), \qquad T(u,v) = \sqrt{e^{u/v}},$$
$$s(p,q,r) = (p+q)^{\ln r}, \qquad f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 - e^y).$$

Límites

9. Calcula los límites siguientes:

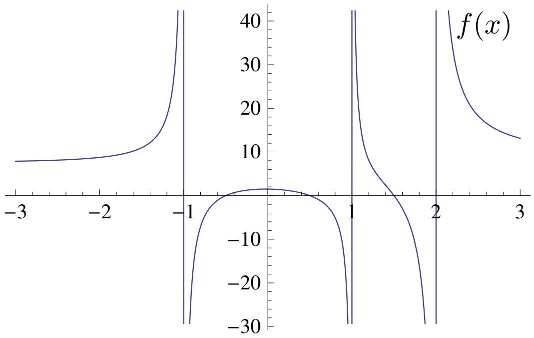
1) $\lim\limits_{t\to 0^-} -\dfrac{1}{5t^3}$	2) $\lim\limits_{x\to -\infty} 2 + \dfrac{x^5}{4}$	3) $\lim\limits_{m\to +\infty} e^{-2m} + 3$
4) $\lim\limits_{z\to -\infty} 3^{-5z} - 100$	5) $\lim\limits_{t\to 0^+} 5^{-2/t}$	6) $\lim\limits_{y\to 1^-} \ln(1-y)$
7) $\lim\limits_{y\to 1^-} \ln^4(1-y)$	8) $\lim\limits_{k\to 0^+} \sqrt{1-e^{-5k}}$	9) $\lim\limits_{s\to 7^+} \sqrt[5]{\ln(s-7)}$
10) $\lim\limits_{a\to -\infty} \sqrt{1-2^{a^3}}$	11) $\lim\limits_{x\to 2^+} 5 - \ln(x^2-4)$	12) $\lim\limits_{b\to 2^+} \dfrac{1}{2-b}$
13) $\lim\limits_{t\to 0^-} \left(3 - \dfrac{1}{t^2}\right)^{1/3}$	14) $\lim\limits_{t\to 0^-} \left(3 - \dfrac{1}{t^2}\right)^{-1/3}$	15) $\lim\limits_{z\to +\infty} \cos\dfrac{1}{z}$
16) $\lim\limits_{r\to -\infty} \ln(2^{-r} - 6)$	17) $\lim\limits_{s\to +\infty} 4s^{-3} + s^{-1}$	18) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^{-3}}{x+1}$

10. Razona el valor de los límites siguientes:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2000 + 2e^{-1/x}}, \qquad \lim_{x\to +\infty} 3 - \ln\frac{2}{x+5}.$$

11. Razona el valor de los límites siguientes:

$$\lim_{t\to -\infty} 5 + \sqrt{1 + \frac{3}{e^{t^2}}}, \qquad \lim_{t\to 2^+} e^{10 + \frac{1}{\ln(t-2)}}.$$



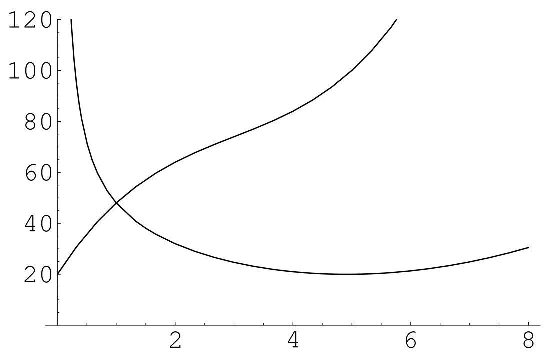
12. A partir de la gráfica, determina los límites de la función f en los puntos -1, 1, 2 y $1/2$.

Gráficas

13. Una fábrica produce diariamente q toneladas de detergente en polvo. El coste de la producción depende de q según la función

$$C(q) = q^3 - 9q^2 + 36q + 20 \text{ u.m.},$$

donde q es el nivel de producción diaria. El nivel de producción actual es de $q = 2$ toneladas.



(a) Calcula el coste de la producción actual.

(b) Si la empresa aumenta su nivel de producción, ¿es de esperar que el coste aumente o disminuya?

(c) Comprueba tu conjetura calculando $\Delta C(1)(1)$ y $\Delta C(2)(1)$. Interpreta ambos resultados.

(d) De las dos gráficas representadas en la figura, una corresponde a la función $C(q)$. Razona cuál es.

(e) ¿Cuándo crece más lentamente el coste, para producciones pequeñas, medias o grandes?

(f) Calcula $\lim\limits_{q\to+\infty} C(q)$ e interprétalo.

(g) En el apartado (c) has podido comprobar que el coste de producir una tonelada más de detergente no es siempre el mismo o, dicho de otro modo, que no todas las toneladas producidas tienen el mismo coste. Por ello es razonable calcular el *coste medio* de la producción (lo que cuesta de media cada tonelada producida), que es

$$\mathrm{CMe}(q) = \frac{C(q)}{q} = q^2 - 9q + 36 + \frac{20}{q} \text{ u.m./t.}$$

Calcula el coste medio actual e interprétalo.

(h) La otra gráfica que aparece en la figura es la de la función $\mathrm{CMe}(q)$. A partir de ella explica cómo se comporta el coste medio al aumentar la producción: ¿aumenta, disminuye, o depende?

(i) Expresa matemáticamente el comportamiento del coste medio que observas en la figura para producciones q próximas a 0.

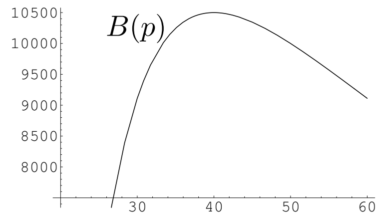
(j) ¿Cuál es aproximadamente, según la gráfica, la producción para la que el coste medio es el menor posible?

14. Una empresa va a lanzar al mercado un nuevo producto tecnológico para el cual no tiene competencia, así que puede fijar el precio p que considere más conveniente. Un estudio de mercado indica que la demanda diaria del producto vendrá dada aproximadamente por la función

$$D(p) = \frac{1\,000\,000}{p^2}.$$

El coste unitario de fabricación es de 20 €, y además hay un coste fijo de 2 000 €.

(a) Calcula la función de beneficios diarios de la empresa $B(p)$ en términos del precio de venta p (entendiendo que la cantidad diaria q que fabricará la empresa es la demanda esperada).



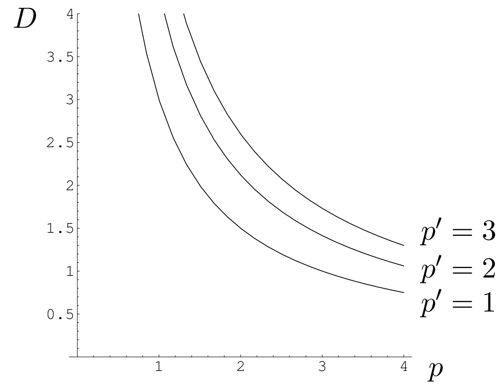
(b) Calcula el precio mínimo p_0 y el precio máximo p_1 a los que puede vender la empresa su producto para obtener beneficios (los que cumplen $B(p) = 0$).

(c) Según la figura, ¿a qué precio le conviene a la empresa vender su producto?

15. Consideremos de nuevo la función de demanda del producto X del problema 6 (pág. 29):

$$D(r, p, p') = \frac{\sqrt{rp'}}{2p},$$

donde p es el precio de X, p' el precio de un bien sustitutivo y r es la renta de los consumidores. Supongamos que la renta de los consumidores permanece fija en $r = 36$ u.m. La figura siguiente muestra las gráficas de las funciones $D(36, p, p')$ para $p' = 1$, $p' = 2$ y $p' = 3$.



(a) Calcula las tres funciones $D(36, p, 1)$, $D(36, p, 2)$ y $D(36, p, 3)$.

(b) A la vista de las gráficas, si el precio p' se mantiene constante y p aumenta, ¿qué le sucede a la demanda, aumenta o disminuye? Interpreta la respuesta.

(c) A la vista de las gráficas, si el precio p se mantiene constante y p' aumenta de 1 a 2 o de 2 a 3, ¿qué le sucede a la demanda, aumenta o disminuye? Interpreta la respuesta.

(d) Calcula $\lim_{p\to 0^+} D(36, p, 2)$ y $\lim_{p\to +\infty} D(36, p, 2)$. Interpreta los resultados.

(e) Señala en la figura el punto inicial y el punto final del incremento $\Delta D(36, 2, 1)(0, 1, 2)$. ¿Cómo será este incremento según la figura, positivo o negativo?

(f) Calcula analíticamente el incremento del apartado anterior y comprueba que su signo es el que muestra la gráfica.

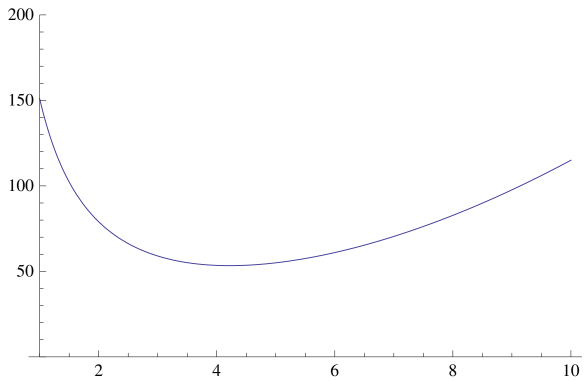
16. El ahorro mensual de un cierto trabajador viene dado por la función

$$A(r,p,l)=\frac{r}{p^2 l}+l^2\,€,$$

donde r es su salario, p un indicador del precio de los artículos de primera necesidad y l un indicador del precio de los artículos de lujo que interesan al trabajador. Actualmente, el trabajador cobra 2 400 € mensuales y los indicadores son $p=4$ y $l=3$.

   (a) La gráfica muestra el ahorro en función de l para los valores actuales de r y p. Escribe dicha función y representa el punto que corresponde a la situación actual.

   (b) A la vista de la gráfica, indica sin hacer cálculos el signo de $\Delta_l A(2400,4,3)(1)$ y $\Delta_l A(2400,4,3)(5)$. Razona tu respuesta.

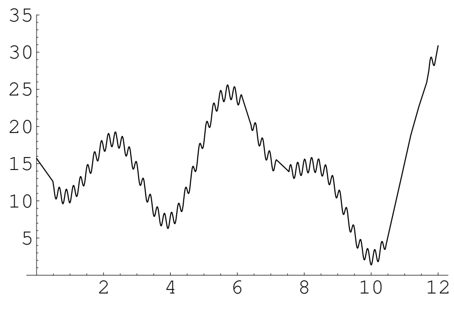
A


l

17. La cotización en bolsa de las acciones de una empresa durante el último año ha sido la dada por la función

$$C(t)=15+5\,\mathrm{sen}(2t+3)+t\cos t+\mathrm{sen}(30t),$$

donde t es el tiempo en meses, de modo que el año empieza en $t=0$. (Así, 1 día $=1/30$ mes. Un año financiero tiene 360 días.) La figura muestra la gráfica de la función $C(t)$:



   (a) Calcula el dominio de C y el subdominio con sentido económico.

   (b) Calcula la cotización inicial y la cotización final de las acciones en el año considerado.

   (c) ¿Cuál hubiera sido el mejor momento para invertir en ellas? ¿Y el peor?

   (d) Si hubiéramos comprado acciones el 1 de abril ($t=4$), ¿hubiera sido rentable venderlas tres días más tarde? Calcula el incremento ΔC correspondiente.

Cuestiones

18. ¿Qué es el dominio de una función?

19. ¿Qué significa $f : D \subset \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Pon un ejemplo concreto en el que

$$D = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x \neq 0\}.$$

¿Cómo se lee esto último?

20. Si $f(u, v) = 5 + u/v$, explica qué le sucede a f en el punto $(5, 0)$. Relaciona tu respuesta con el dominio de f.

21. ¿Por qué el dominio de $f(x, y) = e^{x+y}$ es $\mathbb{R}^2$ y no $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid e > 0\}$?

22. Razona sin usar la calculadora si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:

    (a) $e^{-5} > 0$,
    (b) $\ln 10 > 0$,
    (c) $\operatorname{sen} 5\,000 > 5$,
    (d) $\ln(0.001) > 0$,
    (e) $\ln(-2) < 0$,
    (f) $3^{-8} < 0$,
    (g) $\sqrt[3]{-15} < 0$,
    (h) $\sqrt[4]{-15} < 0$,
    (i) $(-17)^4 > 0$.