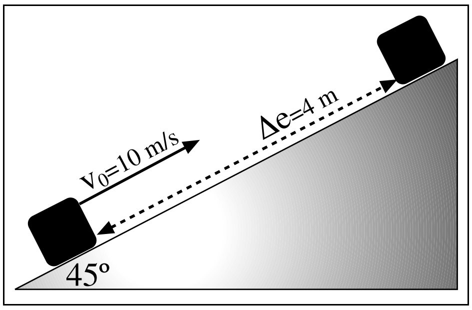
Problemas de Física 1º Bachillerato

Principio de conservación de la energía mecánica

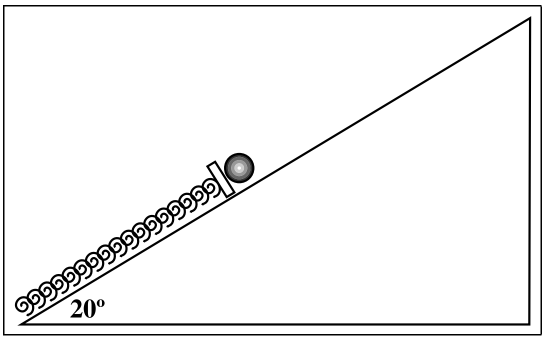
1. Desde una altura h dejamos caer un cuerpo. Hallar en qué punto de su recorrido se cumple
$$E_c = \frac{1}{4}\,E_p$$

2. Desde la parte inferior de un plano inclinado lanzamos hacia arriba un cuerpo con una velocidad inicial de 10 m/s, tal y como indica la figura. El cuerpo recorre una distancia de 4 metros sobre el plano hasta que se detiene. Calcular, aplicando el principio de conservación de la energía mecánica, cual es el valor del coeficiente de rozamiento.



3. Desde el suelo lanzamos hacia arriba un cuerpo con una velocidad inicial de 20 m/s. Vamos a suponer que el rozamiento con el aire es una fuerza constante y de valor 10 N. Hallar a qué altura máxima llega, y que ésta es menor que si no hubiera rozamiento. (Masa del cuerpo 10 kg)

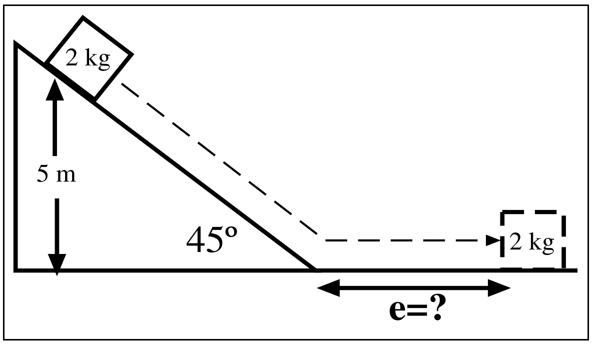
4. Una masa de 30 g comprime un muelle de constante elástica 100 N/m una longitud de 15 cm, ver figura. Cuando se suelta, el muelle empuja la masa hacia arriba de un plano inclinado 20^o. El coeficiente de rozamiento en todo el recorrido es μ=0.2. Calcula la velocidad que tiene la masa en el momento en el que el muelle recupera su longitud natural.



5. Un automóvil de 1200 kg sube una pendiente del 10% a 90 km/h. Si el coeficiente de rozamiento dinámico es μ=0.4, calcular cual es la potencia en caballos desarrollada por el motor.

6. Si dejamos caer un cuerpo desde una altura H llega al suelo con una velocidad v. ¿Si duplicamos la altura se duplicará la velocidad con qué llega al suelo? Justificar usando el principio de conservación de la energía mecánica. (El rozamiento se considera despreciable)

7. Desde un plano inclinado 45°, tal y como muestra la figura se deja caer un cuerpo. Usando el principio de conservación de la energía calcular qué distancia recorre el cuerpo sobre el plano horizontal hasta que se detiene. Hay rozamiento tanto en el plano inclinado como en el tramo horizontal. h=5 m, μ=0.2, m=2 kg.



Resolución de los problemas

Problema 1

Como nos preguntan en que punto de su recorrido ocurre la relación indicada, es decir, que su energía cinética es la cuarta parte de la energía potencial, vamos a suponer que la altura máxima a la que asciende el cuerpo es H. En el punto más alto la velocidad a la que llega es nula, por lo tanto, usando el principio de conservación de la energía mecánica, en ese punto tendremos que

$$E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2}\ mv^2 + mgh = \frac{1}{2}\ m\ 0^2 + mgH = mgH \tag{1}$$

Sustituyendo en la fórmula de la energía mecánica la condición del problema

$$E_M = E_c + E_p = \frac{1}{4}\ E_p + E_p = \frac{5}{4}\ E_p = \frac{5}{4}\ mgh \tag{2}$$

Como la energía mecánica según la ecuación (1) es mgH, sustituyendo en la ecuación (2)

$$mgH = \frac{5}{4}\, mgh$$

de donde simplificando m y g calculamos h

$$h = \frac{4}{5}\, H$$

$\boxed{\text{Problema 2}}$

Como ahora existe rozamiento, el principio de conservación de la energía toma ahora la forma

$$E_{M_i} = E_{M_f} + W_R \tag{3}$$

La energía mecánica inicial E_{M_i} será la suma de la energía cinética más la potencial. Como el cuerpo parte desde el suelo su energía potencial es nula, por lo tanto su energía mecánica vendrá dada sólo por la cinética, es decir

$$E_{M_i} = \frac{1}{2}\, mv_0^2$$

De la misma manera, en el instante final el cuerpo se detiene después de subir una altura h, por lo que su energía mecánica final sólo será energía potencial gravitatoria

$$E_{M_f} = mgh$$

La altura h que asciende el cuerpo puede hallarse sabiendo la distancia Δe que recorre sobre el plano. Por trigonometría, la altura a la que sube el cuerpo no es más que el cateto opuesto del triángulo y la hipotenusa la distancia recorrida sobre el plano, luego

$$\sin\alpha = \frac{h}{\Delta e}, \quad \text{de donde despejando,} \quad h = \Delta e\ \sin\alpha \tag{4}$$

El trabajo de rozamiento, W_R, se calcula con la fórmula

$$W_R = F_R\ \Delta e$$

pues el desplazamiento y la fuerza en este caso son paralelos y llevan el mismo sentido ($\cos\varphi = 1$). Sustituyendo en la ecuación (3) todo lo obtenido y teniendo en cuenta que $F_R = \mu mg \cos\alpha$ llegamos a que

$$\frac{1}{2}\, mv_0^2 = mgh + \mu\ mg\cos\alpha\Delta e$$

En esta última ecuación, simplificando las masas de todos los miembros, sustituyendo el valor de h de la ecuación (4) y multiplicando todo por dos, llegamos a

$$v_0^2 = 2\ g \sin\alpha \Delta e + 2\ \mu g \cos\alpha \Delta e$$

Despejando μ de esta última

$$\mu = \frac{v_0^2 - 2\ g \sin\alpha\Delta e}{2\ g\cos\alpha\Delta e} \tag{5}$$

Sustituyendo en la ecuación (5) los datos del problema

$$\mu = \frac{10^2 - 2\cdot 9,8\cdot \sin 45\cdot 4}{2\cdot 9,8\cdot\cos 45\cdot 4} = \frac{44,563}{55,437} = 0,803$$

Problema 3

En este problema también interviene la fuerza de rozamiento del aire, así pues, una vez más

$$E_{M_i} = E_{M_f} + W_R$$

La fuerza de rozamiento es constante y su valor nos lo dan. En nuestro caso, la distancia sobre la que actúa el rozamiento es igual a la altura que asciende el cuerpo ($\Delta e = h$). La energía mecánica inicial será sólo energía cinética y la final sólo energía potencial ya que el cuerpo se detiene. Sustituyendo todo esto en la ecuación anterior

$$\frac{1}{2}\ mv_0^2 = mgh + F_R\ h$$

Sacando factor común a h

$$\frac{1}{2}\ mv_0^2 = h\ (mg + F_R)$$

y despejando

$$h = \frac{mv_0^2}{2(mg+F_R)} \tag{6}$$

Sustituyendo los valores del problema en la ecuación (6)

$$h = \frac{10\cdot 20^2}{2\cdot(10\cdot 9,8+10)} = \frac{4000}{216} = 18,51\ \text{ m}$$

Para demostrar el último apartado del problema, al no haber fuerza de rozamiento, si hacemos $F_R = 0$ en la ecuación (6) nos queda

$$h = \frac{mv_0^2}{2mg} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{20^2}{2\cdot 9,8} = \frac{400}{19,6} = 20,4\ \text{ m}$$

altura que es mayor que cuando considerábamos la fuerza de rozamiento.

$\boxed{\text{Problema 4}}$

A diferencia de los problemas considerados antes, ahora, al tener un muelle hemos de considerar la energía potencial elástica que posee cuando está comprimido. Si un muelle se comprime una distancia y respecto de su posición de equilibrio, la energía potencial que almacena es, como ya sabemos,

$$E_p = \frac{1}{2}\ k\ y^2 \tag{7}$$

donde k es la constante elástica del muelle. Como también tenemos rozamiento una vez más el principio de conservación de la energía se escribe

$$E_{M_i} = E_{M_f} + W_R \tag{8}$$

con la diferencia de que en la energía mecánica hemos de contar esta vez la energía cinética, la energía potencial gravitatoria (pues el cuerpo asciende por el plano) y la energía potencial elástica. Nos piden hallar qué velocidad adquiere el cuerpo cuando el muelle se destensa. Tomando como origen de alturas el punto donde se halla el cuerpo unido al muelle, la energía inicial vendrá dada por la energía potencial elástica, ya que el cuerpo no posee velocidad. Por lo tanto

$$E_{M_i} = \frac{1}{2}\ k\ y^2$$

La energía mecánica final vendrá dada por la potencial gravitatoria y por la cinética, pues al destensarse el muelle, éste no tiene energía elástica, luego

$$E_{M_f} = \frac{1}{2}\ mv^2 + mgh$$

El trabajo de rozamiento será como siempre $W_R = F_R\ \Delta e$. Sustituyendo todo en la ecuación (8)

$$\frac{1}{2}\ ky^2 = \frac{1}{2}\ mv^2 + mgh + F_R\ \Delta e \tag{9}$$

Vamos a hacer ahora algunas consideraciones respecto a la ecuación (9). La distancia y que está comprimido el muelle es igual al espacio Δe que recorre el cuerpo, entonces $y = \Delta e$. Por otra parte la distancia recorrida sobre el plano inclinado y la altura h están relacionadas por el $\sin\alpha$, como ya demostramos en el Problema 2, fórmula (4), de donde por lo dicho se deduce que

$$h = \Delta e\ \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad h = y\ \sin\alpha$$

Teniendo en cuenta todo esto, la ecuación (9) se convierte en

$$\frac{1}{2}\,ky^2 = \frac{1}{2}\,mv^2 + mg\;y\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha\;y \tag{10}$$

en la que hemos sustituido el valor de de F_R. Multiplicando la ecuación (10) por dos

$$ky^2 = mv^2 + 2mg\;y\sin\alpha + 2\mu mgy\cos\alpha$$

y despejando la velocidad

$$v = \sqrt{\frac{ky^2 - 2mg\;y\sin\alpha - 2\mu mgy\cos\alpha}{m}} \tag{11}$$

Sustituyendo en (11) los datos del problema, expresados en unidades del SI (30 g=0,03 kg y 15 cm =0,15 m)

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{100\cdot 0,15^2 - 2\cdot 0,03\cdot 9,8\cdot 0,15\cdot\sin 20 - 2\cdot 0,2\cdot 0,03\cdot 9,8\cdot 0,15\cdot\cos 20}{0,03}} \\ &= \sqrt{\frac{2,20325}{0,03}} = \sqrt{73,441} = 8,57\quad \text{m/s} \end{aligned}$$

Problema 5

Como el coche sube con velocidad constante, la potencia $\mathcal{P}$ desarrollada por el motor es

$$\mathcal{P} = F\cdot v \tag{12}$$

Al ascender por la pendiente, la fuerza necesaria para conseguirlo vendrá de sumar la componente tangencial del peso y la fuerza de rozamiento

$$F = F_T + F_R = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha \tag{13}$$

La pendiente es de un 10%, lo cual significa que por cada 100 m subidos a lo largo del plano se suben 10 m en altura, o sea, el porcentaje de la pendiente nos da el valor del seno del ángulo de la pendiente,

$$\sin\alpha = \frac{10}{100} = 0,1,\;\Rightarrow\;\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-0,1^2} = \sqrt{0,99} = 0,9949$$

Sustituyendo los datos en la ecuación (13)

$$F = 1200\cdot 9,8\cdot 0,1 + 0,4\cdot 1200\cdot 9,8\cdot 0,9949 = 5856,42\quad \text{N}$$

Y con la velocidad, 90 km/h $\Rightarrow$ 25 m/s, sustiuyendo en (12)

$$\mathcal{P} = 5856,42 \cdot 25 = 146410,52 \ \ \text{W}$$

Para pasar la potencia a caballos, como 1 CV=735 W, dividiendo el último resultado entre 735

$$\mathcal{P} = \frac{146410,52}{735} = 199,19 \ \ \text{CV}$$

Problema 6

En un punto situado a una altura H, la energía mecánica de un cuerpo en reposo (v=0) será

$$E_{M_i} = E_c + E_p = \frac{1}{2}\,mv^2 + mgH = 0 + mgH = mgH \tag{14}$$

Cuando el cuerpo llega al suelo toda la energía mecánica será ahora energía cinética pues la altura es nula

$$E_{M_f} = E_c + E_p = \frac{1}{2}\,mv^2 + mg \cdot 0 = \frac{1}{2}\,mv^2 \tag{15}$$

Como la energía mecánica se conserva, $E_{M_i} = E_{M_f}$, igualando (14) y (15)

$$\frac{1}{2}\,mv^2 = mgH$$

Eliminando m, podemos determinar con qué velocidad llega el cuerpo al suelo, resultando ser

$$v = \sqrt{2gH} \tag{16}$$

Ahora nos dicen que la altura la multiplicamos por 2, por lo tanto la velocidad, llamémosla v', con que el cuerpo llega ahora al suelo será

$$v' = \sqrt{2g \cdot 2H} = \sqrt{4gH} = 2\sqrt{gH} \tag{17}$$

Dividiendo (17) entre (16) sabremos la relación entre las velocidades

$$\frac{v'}{v} = \frac{2\sqrt{gH}}{\sqrt{2gH}} = \frac{2\sqrt{gH}}{\sqrt{2}\sqrt{gH}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

y entonces

$$v' = \sqrt{2}v$$

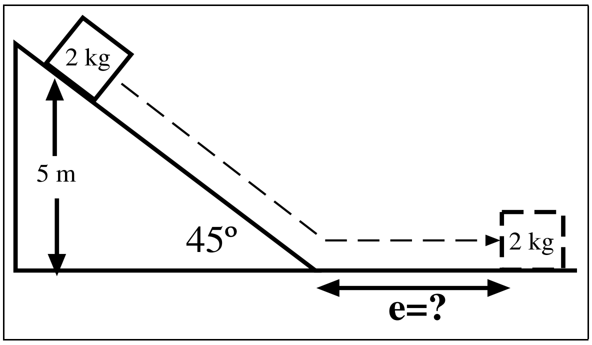
Al multiplicar la altura por 2, la velocidad **no** se multiplica por 2 sino por $\sqrt{2}$

Problema 7

La conservación de la energía mecánica, como tenemos rozamiento, será de nuevo

$$E_{M_i} = E_{M_f} + W_R$$

Vamos a fijarnos en el dibujo para comprender bien cuales son los valores iniciales y finales. Al principio el cuerpo se halla en reposo y a una altura de 5 m por lo que su energía mecánica será sólo potencial gravitatoria.



Al final el cuerpo ha vuelto al suelo y está en reposo por lo que su energía potencial es nula y la cinética también, luego la energía mecánica final será cero.

El trabajo de rozamiento habrá que dividirlo en dos partes ya que la fuerza de rozamiento no vale lo mismo sobre el plano inclinado y sobre el plano horizontal. Por todo ello, el principio de conservación de la energía mecánica se escribe ahora

$$mgh = W_{R_1} + W_{R_2}$$

donde W_{R_1} es el trabajo sobre el plano inclinado y W_{R_2} sobre el plano horizontal. En función de estos trabajos pues

$$mgh = F_{R_1}\Delta e_1 + F_{R_2}\Delta e_2 \tag{18}$$

El espacio que hemos de calcular es Δe_2 y es el que en la figura hemos representado por e. El espacio Δe_1 podemos ponerlo una vez más en función de la altura con la ecuación (4), $h = \Delta e\ \sin\alpha$, de donde

$$\Delta e_1 = \frac{h}{\sin\alpha} \tag{19}$$

Teniendo en cuenta el valor de la fuerza de rozamiento en cada plano y sustituyendo en (18)

$$mgh = \mu mg\cos\alpha\ \frac{h}{\sin\alpha} + \mu mg\Delta e_2 \tag{20}$$

En la ecuación (20) podemos eliminar el factor mg de todos sus miembros, obteniendo

$$h = \mu h \, \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \mu \Delta e_2 = \mu h \cot\alpha + \mu \Delta e_2 \tag{21}$$

Y finalmente el valor del espacio recorrido sobre el plano horizontal es

$$\Delta e_2 = \frac{h - \mu h \cot\alpha}{\mu} \tag{22}$$

Sustituyendo en (22) todos los valores

$$\Delta e_2 = \frac{5 - 0,2 \cdot 5 \cdot \cot 45}{0,2} = \frac{5 - 0,2 \cdot 5 \cdot 1}{0,2} = \frac{4}{0,2} = 20 \quad \mathrm{m}$$

FÓRMULAS USADAS EN LOS PROBLEMAS

Trabajo

$$W = F \Delta e \cos\varphi$$

Energía cinética

$$E_c = \frac{1}{2} \, mv^2$$

Energía potencial gravitatoria

$$E_p = mgh$$

Energía potencial elástica

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \, ky^2$$

Trabajo de rozamiento

$$W_R = F_R \Delta e$$

Energía mecánica

$$E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2} \, mv^2 + mgh$$

Conservación de la energía mecánica

$$E_{M_i} = E_{M_f}$$

Conservación de la energía mecánica en presencia de fuerzas de rozamiento no conservativas

$$E_{M_i} = E_{M_f} + W_R$$