EXTENSIÓN DE UN TEOREMA DE LA TEORÍA DE LAS SERIES TRIGONOMÉTRICAS

POR
G. CANTOR
Halle

Traducción y comentarios por J. Bares y J. Climent.

(Traducción de una memoria publicada en los Math. Annalen de Leipzig, t. V, pág. 123)

Quisiera dar a conocer en este trabajo una extensión del teorema según el cual una función no puede ser desarrollada más que de una sola manera en serie trigonométrica.

Procuré demostrar en el Journal de Crelle t. 72, pág. 139 [Beweis, daß eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Function $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt], que dos series trigonométricas:

$$\tfrac{1}{2}b_0 + \sum(a_n \sin nx + b_n \cos nx) \quad \text{y} \quad \tfrac{1}{2}b'_0 + \sum(a'_n \sin nx + b'_n \cos nx)$$

tales que, para todos los valores de x, convergen y tienen la misma suma, tienen los mismos coeficientes; después mostré, en una nota [Notiz zu dem Aufsatze: Beweis, daß eine für jeden reellen Wert... Crelles Journal für Mathematik, vol. 73, 1871, pp. 294–296] relativa a este trabajo, que este teorema sigue siendo verdadero, si, para un número finito de valores de x, se renuncia, sea a la convergencia, sea a la igualdad de las sumas de las dos series.

La extensión que quiero considerar aquí consiste en que para un número infinito de valores de x en el intervalo $[0 \ldots (2\pi)]$ se puede renunciar a la convergencia o a la concordancia de las sumas de las series, sin que el teorema deje de ser verdadero.

Pero para alcanzar este objetivo estoy obligado a empezar dando explicaciones, o más bien dando algunas indicaciones simples destinadas a sacar a la luz las diversas maneras de las que se pueden comportar las magnitudes numéricas en número finito o infinito; soy llevado de ese modo a dar algunas definiciones, con el fin de hacer tan breve como sea posible la exposición del teorema en cuestión, cuya demostración se haya en el §3.

§1.

Los números racionales sirven de fundamento para llegar a la noción más vasta de magnitud numérica; los designaré bajo el nombre de sistema A, incluyendo el cero.

Se haya una primera generalización de la noción de magnitud numérica en el caso en el que se tenga, obtenida mediante una ley, una sucesión infinita de números racionales:

$$(1) \qquad a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

constituida de tal modo que la diferencia $a_{n+m} - a_n$ se haga infinitamente pequeña a medida que aumenta n, sea cual sea el número entero positivo m, o, en otros términos, que con ε (racional positivo) tomado arbitrariamente se tiene un número entero n_1 tal que $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, si $n \geq n_1$, y si m es un número entero positivo arbitrario.

Expreso de este modo esta propiedad de la sucesión (1): "La sucesión (1) tiene un límite determinado b".

Estas palabras no sirven pues más que para enunciar aquella propiedad de la sucesión, sin expresar en principio otra cosa, y lo mismo que ligamos la sucesión (1) con un signo particular b, del mismo modo se deben también adscribir signos diferentes b, b', b'', ... a sucesiones diferentes de la misma especie.

Sea una segunda sucesión:

$$(1') \qquad a'_1,\ a'_2,\ \ldots,\ a'_n,\ \ldots,$$

que tenga un límite determinado b', entonces se haya que las dos sucesiones (1) y (1′) tienen constantemente una de las tres relaciones siguientes, que se excluyen mutuamente: O bien: 1º $a_n - a'_n$ se hace infinitamente pequeño a medida que n aumenta, o bien: 2º $a_n - a'_n$, a partir de un cierto n, permanece siempre superior a una magnitud positiva (racional) ε, o por último 3º $a_n - a'_n$, a partir de un cierto n permanece siempre inferior a un número negativo (racional) $-\varepsilon$.

En el caso de la primera relación, pongo: $b = b'$, en el caso de la segunda: $b > b'$, y, en el caso de la tercera: $b < b'$.

Se haya del mismo modo que una sucesión (1), que tenga un límite b, no tiene con un número racional a más que una de las tres relaciones siguientes. O bien: 1º $a_n - a$ se hace infinitamente pequeño a medida que n aumenta, o bien: 2º $a_n - a$, a partir de un cierto n, permanece siempre superior a una magnitud positiva (racional) ε, o por último 3º $a_n - a$, a partir de un cierto n permanece siempre inferior a un número negativo (racional) $-\varepsilon$.

Para expresar la existencia de estas relaciones, escribimos resp.:

$$b = a,\ b > a,\ b < a.$$

A partir de estas definiciones y de las que siguen inmediatamente, resulta (y se puede demostrar rigurosamente esta consecuencia) que, siendo b el límite de la sucesión (1), $b - a_n$ se hace infinitamente pequeño a medida que n aumenta, lo cual justifica por consiguiente de una manera precisa la designación de "límite de la sucesión (1)" dado a b.

Designemos por B el conjunto de las magnitudes numéricas b.

Según las convenciones precedentes, se pueden extender las operaciones elementales efectuadas con los números racionales a los dos sistemas A y B reunidos.

Sean en efecto b, b', b'' tres magnitudes numéricas del sistema B, entonces las fórmulas:

$$b \pm b' = b'',\ bb' = b'',\ \frac{b}{b'} = b''$$

sirven para expresar que entre las sucesiones correspondientes a los tres números b, b', b'':

$$\begin{gathered} a_1,\ a_2,\ \ldots \\ a'_1,\ a'_2,\ \ldots \\ a''_1,\ a''_2,\ \ldots \end{gathered}$$

se verifican resp. las relaciones:

$$\begin{aligned} \text{lím}(a_n \pm a'_n - a''_n) &= 0, \\ \text{lím}(a_n a'_n - a''_n) &= 0, \\ \text{lím}\left(\frac{a_n}{a'_n} - a''_n\right) &= 0, \end{aligned}$$

donde ya no tengo necesidad, según lo que precede, de explicar más extensamente el significado del signo lím. Se tiene definiciones semejantes para los casos en los que uno o dos de los tres números pertenecen al sistema A.

En general toda ecuación obtenida mediante un número finito de operaciones elementales

$$F(b, b', \ldots, b^{(p)}) = 0$$

se presentará como expresión de una relación determinada entre las sucesiones que engendran las magnitudes numéricas b, b',..., $b^{(p)}$.([1])

El sistema A ha engendrado el sistema B; del mismo modo los dos sistemas B y A reunidos, engendrarán, mediante el mismo procedimiento, un nuevo sistema C.

Sea en efecto una sucesión infinita:

$$(2) \qquad b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots,$$

de números elegidos en los sistemas A y B y que no pertenezcan todos al sistema A, y esta sucesión estando constituida de tal modo que $b_{n+m} - b_n$ se hace infinitamente pequeña a medida que n aumenta, sea cual sea por lo demás m (y esta condición, según las definiciones precedentes, puede concebirse como algo perfectamente determinado), entonces diré que esta sucesión tiene un límite determinado c.

Las magnitudes numéricas c constituyen el sistema C.

Las definiciones de la equivalencia, de la superioridad y la inferioridad, y las de las operaciones elementales sea entre las magnitudes c, sea entre estas magnitudes mismas y aquéllas de los sistemas B y A, son análogas a las definiciones dadas más arriba.

Mientras que los sistemas B y A son tales que se puede igualar cada uno de los a a un b, pero no cada uno de los b a un a, se puede por el contrario igualar no solamente cada uno de los b a un c, sino también cada uno de los c a un b.

[1]Cuando se dice, por ejemplo, que una ecuación de μ-ésimo grado con coeficientes enteros: $f(x) = 0$ tiene una raíz real ω, esto significa que se tiene una sucesión: a_1, a_2,..., a_n, ... de la misma naturaleza que la sucesión (1) que tiene como límite el signo ω, y que posee además la propiedad de que:

$$\text{lím}\, f(a_n) = 0.$$

Aunque de ese modo los sistemas B y C puedan en una cierta medida ser considerados como idénticos, en la teoría que aquí expongo (y según la cual la magnitud numérica, no teniendo en principio en ella misma, en general, ningún objeto, no interviene más que como elemento de teoremas que tienen una cierta objetividad, e. g., del teorema, de que la magnitud numérica sirve de límite para la sucesión correspondiente) es esencial mantener la distinción abstracta entre los dos sistemas B y C; puesto que la equivalencia de dos magnitudes numéricas b, b' tomadas del sistema B no implica su identidad, sino que expresa solamente una relación determinada entre las sucesiones a las cuales se refieren.

El sistema C y aquéllos que le preceden producen de una manera análoga un sistema D, éstos a su vez, otro sistema E, y así sucesivamente; mediante λ de estas operaciones (considerando la operación en virtud de la cual se pasa de A a B como la primera) se llega a un sistema L de magnitudes numéricas.

Si se realiza la sucesión de las definiciones dadas para la equivalencia, superioridad e inferioridad de estas diferentes magnitudes numéricas y para las operaciones elementales, de un sistema a otro, entonces tendrá lugar la misma relación con aquéllos que le preceden, con la excepción de A, de manera que se podrá siempre igualar una magnitud numérica ℓ a una magnitud numérica k, i, ..., c, b, y recíprocamente.

Se pueden reconducir a la forma de igualdades de este género los resultados del análisis (haciendo abstracción de algunos casos conocidos) aunque (y no lo indico aquí más que en atención a estas excepciones) la noción de número, como ha sido desarrollada aquí, lleva en sí el principio de una extensión necesaria en sí misma y absolutamente infinita.

Parece legítimo, dada una magnitud en el sistema L, que nos podamos servir de esta expresión: Es una magnitud numérica, un valor, o un límite, de λ-ésima especie; de donde se ve que empleo en general las palabras magnitud numérica, valor y límite en el mismo sentido.

Una ecuación $F(\ell, \ell', \ldots, \ell^{(p)}) = 0$ formada por los números ℓ, ℓ',..., $\ell^{(p)}$ mediante un número finito de operaciones elementales aparece precisamente, en la teoría en cuestión, como la expresión de una relación determinada entre $p+1$ sucesiones λ veces infinitas de números racionales; estas sucesiones están producidas a partir de las sucesiones simplemente infinitas que definen en primer lugar a las magnitudes ℓ, ℓ',..., $\ell^{(p)}$; se las obtiene reemplazando, en las primeras, los elementos por las sucesiones que las definen, tratando del mismo modo las sucesiones así obtenidas, que en general serán doblemente infinitas, y continuando este procedimiento hasta que no se tenga ya ante sí más que números racionales.

En otra circunstancia volveré con más detalle sobre todas estas relaciones. No es éste el lugar para explicar de qué manera las convenciones y las operaciones de las que he hablado en este § pueden servir al análisis infinitesimal. En lo que sigue, al exponer la relación de las magnitudes numéricas con la geometría de la línea recta, me limitaré casi exclusivamente a los teoremas necesarios, a partir de los cuales se puede, si no me equivoco, deducir el resto por medio de una demostración puramente lógica. Indico, para compararlo con los §1 y §2, el 10° libro de los Elementos de Euclides; que puede servir de punto de comparación en este asunto.

§2.

Los puntos de una línea recta están determinados cuando, tomando como base una unidad de medida, se indican sus distancias a un punto fijo 0 de la línea recta, las abscisas, con el signo + o −, según que el punto en cuestión se encuentre en la parte (fijada por adelantado) positiva o negativa de la línea a partir de 0.

Si esta distancia tiene con la unidad de medida una razón racional, entonces está expresada mediante una magnitud numérica del sistema A; en el otro caso, si el punto es conocido mediante una construcción, se puede siempre imaginar una sucesión:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots, \tag{1}$$

que cumple las condiciones enunciadas en el §1, y que tiene con la distancia en cuestión una relación tal que los puntos de la recta, a los cuales corresponden las distancias a_1, a_2, ..., a_n, ..., se aproximan infinitamente al punto a determinar, a medida que n aumenta.

Lo que expresamos, diciendo: La distancia del punto a determinar al punto 0 es igual a b, donde b es la magnitud numérica correspondiente a la sucesión (1).

Se demuestra a continuación que las condiciones de equivalencia y de superioridad e inferioridad entre distancias conocidas concuerda con las condiciones de equivalencia y de superioridad e inferioridad (definidas en el §1), de las magnitudes numéricas correspondientes, que representan a estas distancias.

Se sigue ahora sin dificultad que las magnitudes numéricas de los sistemas C, D, ... son también capaces de determinar distancias conocidas. Pero para acabar de completar la conexión que observamos entre los sistemas de las magnitudes numéricas definidas en el §1 y la geometría de la línea recta, es necesario agregar además un axioma, del que he aquí su simple enunciado: A cada magnitud numérica le corresponde también, recíprocamente, un punto determinado de la recta, cuya coordenada es igual a esta magnitud numérica en el sentido expuesto en este §.([2])

Llamo a este teorema un axioma, porque está en su naturaleza no poder ser demostrado de una manera general.

Este teorema sirve también para dar suplementariamente a las magnitudes numéricas una cierta objetividad, de las que ellas son, no obstante, completamente independientes.

---

[2]A cada magnitud numérica le corresponde un punto determinado, pero a cada punto le corresponden, como coordenadas, en el sentido anterior, una cantidad innumerable de magnitudes numéricas iguales; pues, como ya pusimos de manifiesto más arriba, se sigue, de fundamentos puramente lógicos, que a magnitudes numéricas iguales no pueden corresponder puntos distintos, y que a magnitudes numéricas desiguales, como coordenadas, no puede corresponder un solo y mismo punto.

Según lo que precede, considero que un punto de la recta está determinado, cuando su distancia desde 0, precedida del signo conveniente, está dada como una magnitud numérica, valor o límite de λ-ésima especie.

Entremos ahora de lleno en nuestro asunto y consideremos las relaciones que se presentan cuando se dan, en número finito o infinito, magnitudes numéricas.

Según lo que precede se pueden considerar a las diferentes magnitudes numéricas como correspondiendo una a una con los diferentes puntos de una línea recta. Para mayor claridad, y sin que eso sea esencial, nos serviremos, en lo que sigue, de este modo de representación, y, cuando hablemos de puntos, tendremos siempre presentes los valores mediante los que se los obtiene.

Para mayor brevedad, llamo sistema de valores a un número dado, finito o infinito, de magnitudes numéricas, y sistema de puntos a un número dado, finito o infinito, de puntos de una recta. Lo que se diga en lo que sigue de los sistemas de puntos, puede aplicarse inmediatamente, según lo que ha sido dicho, a los sistemas de valores.

Dado, en un intervalo finito, un sistema de puntos, hay ocasión, en general, para considerar un sistema de puntos deducido del primero de una cierta manera, luego un tercero deducido del segundo de la misma manera, etc.; es necesario estudiarlos todos si se quiere comprender la naturaleza del primero.

Para definir estos nuevos sistemas de puntos, definamos en primer lugar la noción de punto límite de un sistema de puntos.

Por punto límite de un sistema de puntos P, entiendo un punto de la recta tal que en su entorno [en el original Cantor dice "en todo entorno"], hay un número infinito de puntos del sistema P; por lo demás, puede ocurrir que el punto límite pertenezca a este sistema. Y llamo entorno de un punto a todo intervalo en el cual este punto está incluido. Según esto es fácil demostrar que un sistema [acotado] compuesto por un número infinito de puntos tiene al menos un punto límite. Llamamos punto *aislado* de P a todo punto que, perteneciendo a P, no es al mismo tiempo un punto límite de P.

Entonces está determinada, para todo punto de la recta con respecto a un sistema de puntos dado P, la condición de ser o no ser un punto límite de este sistema y se tiene también definido, al mismo tiempo que el sistema P, el sistema de sus puntos límite, que designo por P' y que llamo el primer sistema derivado de P.

Si el sistema P' no está compuesto por un número finito de puntos, entonces se puede deducir mediante el mismo procedimiento otro sistema P'', al que llamo el segundo sistema derivado de P. Mediante ν operaciones análogas se llega a la noción del ν-ésimo sistema $P^{(\nu)}$ derivado de P.

Si por ejemplo el sistema P está compuesto por todos los puntos de la recta cuyas abscisas son racionales e incluidas entre 0 y 1 (incluidos, o no, los límites), entonces el sistema derivado P' estará compuesto por todos los puntos del intervalo $(0 \dots 1)$, incluidos los límites 0 y 1. Los sistemas siguientes P'', P''', ... no difieren de P'. O bien, si la cantidad [?] P se compone de los puntos cuyas abscisas son respectivamente 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{n}$, ..., entonces el sistema P' estará compuesto por el único punto 0 y no dará origen él mismo, por deducción [?], a ningún otro.

Puede ocurrir, y éste es el caso que sólo nos interesa aquí, que después de ν operaciones el sistema $P^{(\nu)}$ esté compuesto por un número finito de puntos y por consiguiente no de origen él mismo, por deducción [?], a ningún otro sistema; en este caso llamaremos al sistema primitivo P de ν-ésima especie; se sigue de ahí que P', P'', ... son entonces de $(\nu-1)$-ésima, de $(\nu-2)$-ésima, ... especie.

En esta teoría, el conjunto de todos los sistemas de alguna especie determinada es por consiguiente considerado como un género particular en el conjunto de todos los sistemas de puntos imaginables, y los sistemas de puntos que hemos llamado de ν-ésima especie constituyen una especie particular en este género.

Un único punto proporciona ya un ejemplo de un sistema de puntos de ν-ésima especie si su abscisa se da como una magnitud numérica de ν-ésima especie que satisfaga a ciertas condiciones fáciles de establecer. Si, en efecto, se descompone entonces esta magnitud numérica para obtener los términos (de $(\nu-1)$-ésima especie) de la sucesión que le corresponde, si se descomponen estos miembros ellos mismos, para llegar a los términos (de $(\nu-2)$-ésima especie) que los constituyen, y así sucesivamente, se acaba por obtener un número infinito de números racionales; y, si se imagina el sistema de puntos correspondiente a estos números, entonces será de ν-ésima especie.([3])

§3.

Teorema. Si una ecuación que tenga la forma:

$$0 = C_0 + C_1 + \ldots + C_n + \ldots \tag{1}$$

donde $C_0 = \frac{1}{2}d_0$; $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$, es satisfecha por todos los valores de x, con la excepción de aquéllos que corresponden a los puntos de un sistema de puntos P de ν-ésima especie dado en el intervalo $[0 \ldots (2\pi)]$, donde ν designa un número entero tan grande como se quiera, entonces digo que se tendrá:

$$d_0 = 0, \; c_n = d_n = 0.$$

Demostración. En esta demostración, como lo que sigue hará ver, al hablar de P se considera no solo el sistema dado de ν-ésima especie de puntos excepcionales en el intervalo $[0 \ldots (2\pi)]$, sino también el sistema producido sobre la línea completa infinita mediante su repetición periódica.

Consideremos ahora la función:

$$F(x) = C_0 \frac{xx}{2} - C_1 - \frac{C_2}{4} - \ldots - \frac{C_n}{nn} - \ldots.$$

Entonces resulta de la naturaleza de un sistema P de ν-ésima especie que debe haber un intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, en el cual no se haya ningún punto de este

---

[3] Pongo de relieve expresamente, que éste no es siempre el caso. En general el sistema de puntos así engendrado por una magnitud numérica de ν-ésima especie puede ser de una especie inferior o superior a la ν-ésima especie o incluso no ser de ninguna especie determinada.

sistema; para todos los valores de x incluidos en este intervalo se tendrá, debido a la convergencia de nuestra serie (1) que hemos supuesto, pues que:

$$\text{lím}(c_n \sin nx + d_n \cos nx) = 0,$$

por consiguiente, según un conocido teorema (v. Math. Ann. vol. 4, p. 139 [Über trigonometrische Reihen]):

$$\text{lím}\, c_n = 0, \ \text{lím}\, d_n = 0.$$

La función F goza pues de las siguientes propiedades (v. Riemann, Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, §8):

1ª Es continua para todos estos valores de x.

2ª Si $\text{lím}\,\alpha = 0$, entonces $\text{lím}\,\frac{F(x+\alpha)+F(x-\alpha)-2F(x)}{\alpha\alpha} = 0$, para todos los valores de x, con la excepción de aquéllos que corresponden a los puntos del sistema P.

3ª Si $\text{lím}\,\alpha = 0$, entonces $\text{lím}\,\frac{F(x+\alpha)+F(x-\alpha)-2F(x)}{\alpha} = 0$, para todos los valores de x sin excepción.

Voy a mostrar ahora que $F(x) = cx + c'$. Para ello considero en primer lugar un intervalo cualquiera $(p \dots q)$ en el que no hay más que un número finito de puntos del sistema P; sean $x_0, x_1, \dots, x_n$ estos puntos escritos según su orden de sucesión.

Digo que $F(x)$ es lineal en el intervalo $(p \dots q)$; porque $F(x)$, debido a las propiedades 1ª y 2ª, es una función lineal en cada uno de los intervalos obtenidos al dividir $(p \dots q)$ por los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$; en efecto, puesto que no hay puntos excepcionales en ninguno de estos intervalos, las conclusiones aplicadas en la memoria (v. Journal de Borchardt, t. 72, p. 159) tienen aquí toda su fuerza; no queda más que demostrar que estas funciones lineales son idénticas.

Voy ha hacerlo para dos funciones contiguas y las elijo en los intervalos $(x_0 \dots x_1)$ y $(x_1 \dots x_2)$.

Sea en $(x_0 \dots x_1)$, $F(x) = kx + \ell$ y en $(x_1 \dots x_2)$, $F(x) = k'x + \ell'$.

Debido a la 1ª se tiene que $F(x_1) = kx_1 + \ell$; luego, para valores bastante pequeños de α:

$$F(x_1 + \alpha) = k'(x_1 + \alpha) + \ell' \text{ y } F(x_1 - \alpha) = k(x_1 - \alpha) + \ell.$$

Se tiene así, por la 3ª, que:

$$\text{lím}\,\frac{(k' - k)x_1 + \ell' - \ell + \alpha(k' - k)}{\alpha} = 0,$$

si $\text{lím}\,\alpha = 0$, lo cual solo es posible si:

$$k = k', \ \ell = \ell'.$$

En resumen, podemos enunciar el resultado siguiente:

A) “Sea $(p \dots q)$ un intervalo cualquiera, en el que no hay más que un número finito de puntos del sistema P, entonces $F(x)$ será lineal en este intervalo.”

Considero a continuación un intervalo cualquiera $(p' \dots q')$ que no contiene más que un número finito de puntos $x'_0, x'_1, \dots, x'_n$ del primer sistema derivado P'; — y digo en primer lugar que en cada uno de los intervalos parciales obtenidos al dividir $(p \dots q)$ por los puntos $x'_0, x'_1, \dots$, e.g., en $(x'_0 \dots x'_1)$, la función $F(x)$ es lineal [FALTA UNA FIGURA]

Puesto que cada uno de estos intervalos parciales contiene en verdad en general un número infinito de puntos de P, de manera que el resultado A) no puede aplicarse aquí inmediatamente; pero cada intervalo $(s \dots t)$ incluido en los límites de $(x'_0 \dots x'_1)$ no incluye más que un número finito de puntos de (P) (porque en caso contrario tendría también entre x'_0 y x'_1 otros puntos del sistema P') y por consiguiente la función es lineal en $(s \dots t)$ debido a A). Pero como se pueden aproximar arbitrariamente los puntos extremos s y t a los puntos x'_0 y x'_1, se concluye sin más que la función continua $F(x)$ es también lineal en $(x'_0 \dots x'_1)$.

Después de haberlo demostrado para cada uno de los intervalos parciales de $(p' \dots q')$, se obtiene el siguiente resultado mediante los mismos razonamientos que aquéllos que han conducido al resultado A):

A$'$) "Sea $(p' \dots q')$ un intervalo cualquiera que no incluya más que un número finito de puntos del sistema P', entonces $F(x)$ es lineal en este intervalo."

La demostración prosigue de la misma manera. Porque, una vez establecido que $F(x)$ es una función lineal en un intervalo cualquiera $(p^{(k)} \dots q^{(k)})$, que no contenga más que un número finito de puntos del k-ésimo sistema $P^{(k)}$ derivado de P, resulta, como en el paso de A) a A$'$), que $F(x)$ también es una función lineal en un cualquier intervalo $(p^{(k+1)} \dots q^{(k+1)})$ que no incluya más que un número finito de puntos del $k+1$-ésimo sistema $P^{(k+1)}$.

Concluimos de este modo, mediante un número finito de deducciones sucesivas, que $F(x)$ es lineal en todo intervalo que no contenga más que un número finito de puntos del sistema $P^{(\nu)}$. Pero siendo el sistema P de ν-ésima especie, tal como se ha supuesto, un intervalo arbitrario $(a \dots b)$ en la recta no incluirá más que un número finito de puntos de $P^{(\nu)}$. $F(x)$ es pues lineal en todo intervalo $(a \dots b)$ arbitrario, y de ello se sigue, como es fácil de ver, que $F(x)$ toma la forma $F(x) = cx + c'$ para todos los valores de x. Estando este punto puesto en evidencia, la demostración prosigue como en el trabajo ya citado dos veces, a partir del momento en el que la forma lineal ha sido establecida.

Se puede también enunciar el teorema que hemos demostrado aquí de la siguiente manera:

"Una función discontinua $f(x)$, distinta de cero o indeterminada para todos los valores de x correspondientes a los puntos de un sistema de puntos P de ν-ésima especie dado en el intervalo $[0 \dots (2\pi)]$, pero igual a 0 para todos los demás valores de x, no puede ser representada mediante una serie trigonométrica."

Halle, 8 de Noviembre de 1871.

Comentario. En este artículo, Cantor, a partir del conjunto de los números racionales, considerado como dado, define el conjunto de los números reales, usando las "sucesiones fundamentales (i.e., las sucesiones de Cauchy) dadas mediante una ley", e itera el proceso un número finito, pero arbitrario, de veces, aunque, no se olvida de señalar que los conjuntos obtenidos después de la segunda iteración son isomorfos al obtenido mediante la primera de ellas. El motivo por el cual considera tales iteraciones parece estar relacionado con la necesidad que tuvo de mostrar que hay conjuntos derivados de ν-ésima especie que no son vacíos, para ν un número entero positivo arbitrario.

Hay que hablar acerca del concepto de "ley" en Cantor. Tal concepto, evidentemente, no se puede interpretar en un sentido constructivo en este autor y en esta fase de su desarrollo intelectual, porque en tal caso no podría obtener en absoluto el conjunto infinito no numerable de las sucesiones de Cauchy de números racionales. También hay que comentar sobre el uso del concepto de "regla" en Cantor.

Cantor considera el conjunto formado por, lo que hoy llamamos, las sucesiones de Cauchy de números racionales y asocia, unívocamente, a cada sucesión de Cauchy (a_ν) un signo b, pero de manera que sucesiones de Cauchy diferentes tienen asociados signos diferentes. Ahora bien, no parece que, en esta fase, Cantor considere que como resultado de tal asignación se obtenga simplemente un conjunto. Lo que parece que obtiene Cantor es un conjunto, el formado por los signos b asociados a las sucesiones de Cauchy (a_ν) de números racionales, llamado por él B, junto con una relación de equivalencia sobre tal conjunto B. Tal relación de equivalencia es la que subsiste entre dos signos b y b' precisamente cuando las sucesiones de Cauchy (a_ν) y (a'_ν), respectivamente asociadas a ellos, son equivalentes, i.e., tales, como él dice, que:

> "$a_n - a'_n$ se hace infinitamente pequeño a medida que n aumenta".

Previamente a esto Cantor ha puesto de manifiesto que entre dos sucesiones de Cauchy de números racionales (a_ν) y (a'_ν) puede subsistir una y sólo una de las siguientes relaciones:

1. Las dos sucesiones son equivalentes.
2. Las dos sucesiones no son equivalentes y la diferencia $a_\nu - a'_\nu$, desde un cierto n en adelante, es mayor que un determinado número racional estrictamente positivo.
3. Las dos sucesiones no son equivalentes y la diferencia $a_\nu - a'_\nu$, desde un cierto n en adelante, es menor que un determinado número racional estrictamente negativo.

La misma relación que tiene lugar entre las dos sucesiones de Cauchy de números racionales (a_ν) y (a'_ν) también tiene lugar entre cualquier par de sucesiones equivalentes a ellas.

A esto hay que añadir que Cantor dice lo siguiente:

> "la equivalencia [igualdad] de dos magnitudes numéricas b, b' tomadas del sistema B no implica su identidad, sino que expresa solamente una relación determinada entre las sucesiones a las cuales se refieren".

Dicho de otro modo, Cantor parece que necesita disponer, para poder especificar completamente a ciertos conjuntos, de un criterio adicional que le permita dilucidar cuándo dos elementos de uno de tales conjuntos son o no esencialmente el mismo. De modo que un tal conjunto, usando la terminología actual, vendría dado por un par (A, Φ) en el que A es un conjunto y Φ una relación de equivalencia sobre A.

Si ello fuera así, entonces para que, por ejemplo, una operación estuviera bien definida sobre A se debería verificar su independencia de los representantes de clase elegidos para su definición.

Aunque sea un anacronismo, debemos señalar al respecto que, en 1883, Cantor dice que la gran ventaja del método de Dedekind, respecto del suyo y el de Weierstrass, reside en que a cada número b le corresponde sólo una única cortadura. De manera que en Dedekind la igualdad entre dos números coincide con la identidad, mientras que en Cantor no sucede tal cosa, y, de hecho, hay números b a los que no les corresponde una única sucesión de Cauchy. Además hay que tener también en cuenta que, en 1882, dice, hablando del concepto de conjunto, lo siguiente:

> "Digo que un conjunto de elementos pertenecientes a una esfera abstracta cualquiera, está *bien definido* cuando, como consecuencia del principio lógico del tercero excluido, se le puede considerar determinado de tal manera que 1º siendo elegido un objeto cualquiera perteneciente a esta esfera abstracta, se pueda considerar como *intrínsecamente* determinado si pertenece o no al sistema en cuestión y que 2º estando dados dos objetos pertenecientes al conjunto se pueda considerar como *intrínsecamente* determinado si son iguales o no, a pesar de las diferencias que puedan presentarse en la manera como estén dados".

Hay que hablar de la teoría de los números reales que expone Heine, en un trabajo de 1872, y que reconoce ha tomado en préstamo de Cantor, y, sobre todo, de aquéllos teoremas y lemas enunciados, y demostrados, por Heine en dicho trabajo, que son necesarios para demostrar un hecho fundamental de la teoría de Cantor de los números reales (cuando b es límite de la sucesión de Cauchy (a_ν) en $\mathbb{Q}$, entonces $b-a_\nu$ se hace infinitamente pequeño a medida que aumenta ν), que éste último autor no demuestra.

Heine define las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$ (sin mencionar, como hace Cantor, que estén dadas mediante una *ley*) y distingue las que convergen a cero, a las que llama *elementales*. Enuncia un lema que afirma que toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ está acotada, pero ni él ni Cantor demuestran tal lema. Heine define la igualdad de dos sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$ estipulando que su diferencia sea una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ elemental. La definición indicada tiene una doble finalidad, por una parte, demostrar que todas las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$ elementales son iguales entre sí, y, recíprocamente, que ninguna sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que no sea elemental es igual a una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ elemental, y, por otra, definir, de manera derivada, la igualdad entre dos números reales. Dice Heine que "La justificación de considerar como magnitudes las introducidas mediante sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$ la encontró el Sr. Cantor en el hecho de que también es posible determinar aquí los conceptos de ser mayor que, ser menor que, ser igual que".

En el sistema de Cantor la identificación entre el signo y la magnitud numérica se fundamenta en la demostración que proporcionó Heine del teorema: Cuando b es límite de la sucesión de Cauchy (a_ν) en $\mathbb{Q}$, entonces $b-a_\nu$ se hace infinitamente pequeño a medida que aumenta ν. Que a su vez presupone los lemas siguientes: Si $b > 0$, entonces existe un número racional a tal que $0 < a < b$, y, si (a_ν) es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$, entonces (a_ν) es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \mathcal{C}(A) \arrow[d] & & \\
& B \arrow[d] \arrow[ddr, leftrightarrow] & & \\
& A+B \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathcal{C}(A+B) \arrow[d] & \\
& & C \arrow[d] \arrow[ddr, leftrightarrow] & \\
& & (A+B)+C \arrow[r] \arrow[ddr, dashed] & \mathcal{C}((A+B)+C) \arrow[d] \\
& & & D \arrow[d, dashed] \\
& & & {}
\end{tikzcd}
$$

El *principio de la continuidad* de Cantor *para el continuo numérico* viene expresado por: *Cualquier sucesión de Cauchy de números reales es convergente.* Este principio lo estableció en su trabajo de 1883. Para el continuo numérico el principio de la continuidad no es un axioma, sino una consecuencia de la propia definición del concepto de número real.

Cantor convierte el principio de la continuidad para el continuo numérico en axioma cuando considera la línea recta. Entonces el *axioma de la continuidad* de Cantor, bajo la forma métrica (porque hay que usar la noción de distancia para definir el concepto de sucesión de Cauchy de puntos de una línea recta), lo expresa como: *Cualquier sucesión de Cauchy de puntos de una línea recta converge a un punto de la misma.*

El axioma de la continuidad de Cantor, bajo la forma métrica, a diferencia del axioma de la continuidad de Dedekind, según el cual: *Cualquier cortadura de una línea recta tiene un elemento de separación*, no tiene como consecuencia el axioma de Eudoxo-Arquímedes, y es por lo tanto compatible con la negación de éste último. De modo que, contrariamente a lo que afirmaba el propio Cantor, sí pueden existir continuos lineales no arquimedianos. A este respecto hay que hablar de du Bois-Reymond, Stolz, Veronese, Hausdorff, Hilbert, Hölder, Hahn, etc. Parece ser que Cantor creía que el axioma de Eudoxo-Arquímedes era consecuencia del suyo (hay que especificar lo que diga al respecto).

Del axioma de la continuidad de Dedekind se deduce el de Cantor, no siendo cierto el recíproco. Además, el axioma de la continuidad de Dedekind es equivalente a la conjunción del axioma de la continuidad de Cantor y del axioma de Eudoxo-Arquímedes. Para la recta ordinaria, que es un sistema arquimediano, los axiomas de Dedekind y Cantor son equivalentes.

Cantor también introdujo, en 1895, para los conjuntos simplemente [totalmente] ordenados, otro axioma de la continuidad bajo la forma ordinal que expresa como: *Cualquier sucesión fundamental acotada del conjunto simplemente ordenado tiene un elemento límite.* Pero los dos axiomas de Cantor no son equivalentes puesto que, por una parte, hay sistemas de magnitudes no arquimedianos que cumplen axioma de la continuidad de Cantor bajo la forma métrica, y, por otra, se puede demostrar que cualquier sistema de magnitudes que cumpla el axioma de la continuidad de Cantor bajo la forma ordinal es necesariamente arquimediano, estando esto último relacionado con el hecho de usa sucesiones *numerables* en la definición de las sucesiones fundamentales relativas a los conjuntos simplemente ordenados.

Por otra parte, a partir del concepto de punto de acumulación de un subconjunto del conjunto de los números reales, obtiene la operación de derivación que permite asociar a cada subconjunto del conjunto de los números reales otro subconjunto del mismo: el derivado del dado; y considera legítimo la iteración (un número arbitrario, pero finito, de veces) de tal operador.

Hay que hablar de una carta de H. A. Schwarz en la que le proporcionó una demostración de la linealidad de F.

Merece la pena comentar la frase de Cantor: "En esta teoría, el conjunto de todos los sistemas de alguna especie determinada es por consiguiente considerado como un género particular en el *conjunto de todos los sistemas de puntos imaginables*, y los sistemas de puntos que hemos llamado de ν-ésima especie constituyen una especie particular en este género." Porque, contrariamente a alguna manifestación, un tanto ambigua, de algún autor, Cantor sí considera, en este caso, el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado. Además, en otros artículos, también considera, contrariando, una vez más, alguna manifestación al respecto, conjuntos formados por entidades que no son de la misma naturaleza, como: puntos, rectas, planos, etc.

J. W. Dauben: Georg Cantor ..., Chapter 2. (page 38, lines 6–7 (from top))

Instead of: "... if there exists an integer N such that for any positive, rational value of ε, ..."

is: "... if for any positive rational value of ε there exists an integer N such that ..."

Como es bien sabido la fórmula:

$$\exists x \forall y \varphi(x,y) \to \forall y \exists x \varphi(x,y),$$

es válida, pero no lo es la fórmula:

$$\forall y \exists x \varphi(x,y) \to \exists x \forall y \varphi(x,y).$$

La condición definitoria del concepto de "sucesión fundamental" o de "Cauchy" hace uso de un fragmento inicial de la forma

$$\forall y \exists x \varphi(x,y)...,$$

y no de la forma

$$\exists x \forall y \varphi(x,y)...$$

Es extraño que siendo el libro de Dauben una reimpresión, publicada en el año 1990, del libro publicado, por primera vez, en el año 1979, no se haya tomado el Prof. Dauben la molestia de haber corregido semejante barbaridad. En cualquier Universidad a un alumno de primero de carrera que hubiera dicho tal cosa en un examen se le habría fulminado automáticamente, sin embargo ....

J. W. Dauben: Georg Cantor ..., Chapter 2. (page 39, lines 21–22 (from top))

Instead of: “he likewise built the domain C in terms of fundamental sequences of elements from B.”

is: “he likewise built the domain C in terms of fundamental sequences of elements from A or B ....”

J. W. Dauben: Georg Cantor ..., (page 319, note 22, lines 16–18 (from top))

Dice J. W. Dauben: “It should be noted that the first published mention of Cantor’s work on the irrationals referred to the fundamental sequences as *elementarreihen*. See Heine (1872), 173–174.”

Tal cosa no es cierta, porque Heine, después de definir las sucesiones fundamentales, con otra terminología, define las sucesiones elementales que son un tipo particular de sucesiones fundamentales.

Lo que dice J. W. Dauben en la nota 25 es todavía peor ...

Grattan-Guinness: The search for mathematical roots ..., (page 77, lines 26–29 (from top))

Dice el Sr. Grattan-Guinness: “After his death in 1918 Cantor studies were favoured ... and a moderate edition Cantor *Papers* (1932) of his writings on *Mengenlehre* prepared by Ernst Zermelo ...”. En una nota a pie de página el autor citado explica su “falta de entusiasmo” respecto de la edición preparada por Zermelo, (esencialmente) en los siguientes términos: “... Zermelo’s omission of some important footnotes from his papers...”.

Además, para rematar la faena, el Sr. Grattan-Guinness, en la página 548 del libro antes citado, dice: “... rather sloppily [chapuceramente] prepared by Zermelo”.

La crítica que el Sr. Grattan-Guinness dirige a la edición preparada por Zermelo es, sin duda, hasta cierto punto procedente, pero tiene guasa que el Sr. Grattan-Guinness, en sus comentarios a los trabajos de Cantor, diga cosas como las siguientes (y sin indicar las erratas).

Grattan-Guinness: The search for mathematical roots ..., (page 84): “Drawing on his previous concern with irrational numbers, Cantor showed a fine grasp of the requirements that such a theorem would make upon him; for he gave a *definition* of them [los irracionales], basically following and developing that of Heine ... Taking the rational numbers (but excluding zero) ... In addition, he did not properly treat the fact that the same irrational number could be produced by different sequences of rationals ... he again followed Heine by allowing that ‘now it generates in a similar way together with the domain A a new domain C’...”

Si el Sr. Grattan-Guinness hubiera leído, o, si lo hizo, hubiera entendido, lo que escribió Heine en 1872, no podría haber dicho en absoluto que Cantor *siguió* a Heine. Por otra parte, Cantor dice explícitamente que *incluye* al cero entre los racionales y distingue entre igualdad e identidad.

Grattan-Guinness: The search for mathematical roots ..., (page 88): “The simplicity of his approach must have appealed: he structured the real line with his theory of cuts, and then associated real numbers with each cut, whereas other definitions took the real line for granted and obtained the irrational numbers via a process of construction (in Cantor’s case the fundamental sequences).”

Esto no es así. De hecho, tanto Dedekind como Cantor introducen explícitamente un axioma que relaciona la recta con el conjunto de los números reales. El axioma de Dedekind-Cantor, que podría denominarse la hipótesis de Dedekind-Cantor, por su semejanza formal con la hipótesis de Church-Turing-Kleene (que identifica las funciones mecánicamente computables con las aplicaciones parciales recursivas), identifica la recta (entidad geométrica) con el conjunto de los números reales (entidad aritmética).

Grattan-Guinness: The search for mathematical roots ..., (page 95): “The need for both properties to define continuity was a major advance, and characteristically Cantor crowed over the inadequacy of two of his predecessors: Bolzano 1851, for requiring only connectivity...”

Bolzano impuso la densidad.

Grattan-Guinness: The search for mathematical roots ..., (page 96): “He presented it [el conjunto ternario] as a countable and perfect set ...”

Esto no necesita ni comentario.

No deja de sorprender que muchos de los que son tan despiadados, exigentes e intransigentes enjuiciando a los demás, sean, a su vez, tan caritativos, complacientes y magnánimos para con ellos mismos. Es menester no solo ser un guasón sino, lo que es peor, tener la cara muy dura para, con urgencia, acusar, por ejemplo, a Zermelo, esencialmente, del gran “crimen”, sin perdón ni remisión de condena posibles, de omitir algunas notas a pie de página de algunos trabajos de Cantor (hablaremos sobre ello), y, al mismo tiempo, decir las barbaridades antes mencionadas, con la mayor naturalidad, sin perder el empaque, y sin dar, obviamente, ninguna importancia a la que es la obligación primordial del intelectual: reflexionar con seriedad y cuidadosamente sobre el trabajo de los demás (en este caso sobre el del mismo Cantor). Pudiera ser que tenga razón Confucio cuando dijo:

> “Estamos tan ocupados llevando a cabo lo urgente, que no tenemos tiempo para hacer lo importante”.

Aunque también podría decirse que “the author’s understanding of technical points in set theory sometimes seems rather weak”.

SOBRE UNA PROPIEDAD DEL SISTEMA DE TODOS LOS NÚMEROS REALES ALGEBRAICOS

POR
G. CANTOR
Halle

Traducción y comentarios por J. Bares y J. Climent.

(Traducción de una memoria publicada en el Journal de Borchardt, t. 77, pág. 258)

Se llama, en general, número real *algebraico* a un número real ω que es raíz de una ecuación no idéntica de la forma

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{1}$$

donde n, a_0, a_1, $\ldots$, a_n son números enteros; podemos suponer que los números n y a_0 son positivos, que los coeficientes a_0, a_1, $\ldots$, a_n no tienen divisores comunes y que la ecuación (1) es irreducible; estando hechas estas suposiciones, resulta, de los teoremas fundamentales de la aritmética y del álgebra, que la ecuación (1), que admite como raíz un número real algebraico determinado, es una ecuación completamente determinada; inversamente, a una ecuación de la forma (1) corresponden a lo sumo tantos números reales algebraicos raíces de esta ecuación, como unidades hay en el grado n.

Los números reales algebraicos constituyen en su conjunto un sistema de números que designaremos por (ω); según resulta de consideraciones elementales, este sistema (ω) es de tal naturaleza que existe una infinidad de números de (ω) cuya diferencia con un número cualquiera α es menor que una cantidad dada por pequeña que sea. Esta observación hace tanto más sorprendente, a primera vista, la siguiente propiedad: *se pueden hacer corresponder uno a uno los números del sistema* (ω), a los números ν pertenecientes a la sucesión de los enteros positivos, sucesión que será designada por (ν), de tal manera que a cada número real algebraico ω corresponde un número entero positivo determinado ν, y que, inversamente, a cada número entero positivo ν corresponde un número real algebraico ω completamente determinado; en otros términos, se pueden imaginar los números del sistema (ω) dispuestos según una cierta ley en una sucesión infinita

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots \tag{2}$$

en la cual figuran todos los números de la categoría (ω), cada uno de ellos encontrándose en la sucesión (2) en un lugar determinado indicado por el índice correspondiente. Una vez que se ha encontrado una ley que permita disponer de este modo a los números de (ω), se deducirán a partir de aquélla otras mediante modificaciones que se podrán elegir arbitrariamente; así pues, será suficiente que indiquemos, tal como lo hacemos en el §1, el modo de ordenación que nos parece que reposa sobre el mínimo número de consideraciones.

Para dar una aplicación de esta propiedad del sistema de todos los números reales algebraicos añado al §1 el §2, en el cual muestro que, cuando se considera como dada bajo la forma (2) una sucesión cualquiera de números reales, entonces se puede determinar, en cada intervalo $(\alpha \ldots \beta)$ dado de antemano, números η que no están contenidos en esta sucesión (2). Combinando las proposiciones contenidas en los §§1 y 2, se obtiene de este modo una nueva demostración del siguiente teorema demostrado por primera vez por Liouville (Jour. de Math. réd. p. Liouville I[a] série, t. XVI, 1851): en cada intervalo $(\alpha \ldots \beta)$ dado de antemano hay una infinidad de números trascendentes, i.e., de números que no son reales algebraicos. Además el teorema del §2 proporciona la razón por la cual no se puede hacer corresponder uno a uno a los números enteros de la sucesión (ν) los números reales que constituyen un sistema continuo de números, i.e., por ejemplo, todos los números reales que son ≥ 0 y ≤ 1. Así llegué a encontrar de una manera neta la diferencia esencial que hay entre un sistema continuo de números y un sistema de números de la especie del que está formado por el conjunto de todos los números reales algebraicos.

§1.

Volvamos a la ecuación (1) satisfecha por un número real algebraico ω y que, según las suposiciones hechas más arriba, es una ecuación completamente determinada; llamemos *altura* del número ω a la suma de los valores absolutos de los coeficientes aumentada por el número $n-1$, siendo n el grado de la ecuación; designando esta altura por N y aplicando una notación conocida para designar los valores absolutos de los números, se tiene, como consecuencia, que

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n| \,. \tag{3}$$

Esta altura N es, por consiguiente, para cada número real algebraico, un número entero positivo determinado; inversamente, a un número entero positivo dado N no corresponde más que un número limitado de números reales algebraicos que tengan como altura N; sea $\varphi(N)$ este número, entonces se tendrá, por ejemplo, que $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 2$, $\varphi(3) = 4$. Los números del sistema (ω), i.e., todos los números reales algebraicos, pueden pues ser dispuestos en el siguiente orden: se tomará como primer número ω_1, el único número de altura $N = 1$; se escribirán seguidamente por orden de magnitudes crecientes los dos números reales algebraicos de altura $N = 2$ y se les designará por ω_2, ω_3; luego, a continuación y por orden de magnitudes crecientes, se escribirán los cuatro números reales algebraicos de altura $N = 3$; de una manera general, después de que se hayan contado y ordenado así los números de la categoría (ω) hasta una altura determinada $N = N_1$, se dispondrán siguiéndolos y por orden de magnitudes crecientes los números reales algebraicos de altura $N = N_1 + 1$. Se obtiene así el sistema de todos los números reales algebraicos bajo la forma:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots,$$

y se puede, refiriéndose a este ordenamiento, hablar del ν-ésimo número real algebraico, sin omitir ningún número del sistema (ω).

§2.

Cuando se tiene una sucesión infinita de números reales diferentes entre sí sucediéndose según una ley determinada cualquiera

$$(4) \qquad u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots$$

se puede, en cada intervalo $(\alpha \ldots \beta)$ dado de antemano, determinar un número η que no se halla en la sucesión (4); existe, por consiguiente, una infinidad de tales números. He aquí la demostración de este teorema.

Partamos del intervalo dado de antemano $(\alpha \ldots \beta)$ y sea $\alpha < \beta$; designemos por α' y β' los dos primeros números de la sucesión (4) diferentes entre sí, que sean distintos de α, β y que se hallen en este intervalo, y sea $\alpha' < \beta'$; designemos del mismo modo por α'', β'', los dos primeros números de nuestra sucesión diferentes entre sí, que se hallen en el intervalo $(\alpha' \ldots \beta')$ y sea $\alpha'' < \beta''$; según esta misma ley, formemos un intervalo subsiguiente $(\alpha'' \ldots \beta'')$, y así sucesivamente. Según esta definición los números α', α'', $\ldots$, $\alpha^{(\nu)}$, $\ldots$ son números determinados u_{k_1}, u_{k_2}, $\ldots$, u_{k_ν}, $\ldots$ de nuestra sucesión (4) cuyos índices k_ν aumentan constantemente, y la misma cosa tiene lugar para los números β', β'', $\ldots$; además, los números α', α'', $\ldots$ son magnitudes crecientes, mientras que los números β', β'', $\ldots$ son magnitudes decrecientes; cada uno de los intervalos $(\alpha \ldots \beta)$, $(\alpha' \ldots \beta')$, $(\alpha'' \ldots \beta'')$, $\ldots$ incluye a todos aquéllos que le siguen. Entonces no se pueden concebir más que dos casos.

O bien el número de los intervalos que se pueden formar así es finito; sea $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$ el último de ellos; puesto que en este intervalo se halla a lo sumo un número de la sucesión (4), se puede tomar en este intervalo un número η que no pertenece a la sucesión (4); y el teorema queda así demostrado en este caso.

O bien el número de los intervalos así formados es infinito; entonces como los números α, α', α'', $\ldots$ aumentan constantemente sin crecer al infinito, tienen un cierto límite α^∞; del mismo modo, los números β, β', β'' $\ldots$ que disminuyen constantemente, tienen un cierto límite β^∞. Si $\alpha^\infty = \beta^\infty$ (lo que, aplicando este método, siempre se cumple en el sistema (ω) de los números reales algebraicos), entonces es fácil ver, volviendo a la definición de los intervalos, que el número $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ no puede estar incluido en nuestra sucesión; porque si este número η estuviera incluido en nuestra sucesión, entonces se tendría que $\eta = u_p$, siendo p un índice determinado; pero esto es imposible, porque u_p no se halla en el intervalo $(\alpha^{(p)} \ldots \beta^{(p)})$, mientras que el número η se halla ahí según la definición. Si, por el contrario, $\alpha^\infty < \beta^\infty$, entonces todo número η, incluido en el intervalo $(\alpha^\infty \ldots \beta^\infty)$ o igual a uno de los límites, cumple la condición deseada de no pertenecer a la sucesión (4).

Los teoremas que acabamos de demostrar pueden ser generalizados de diferentes maneras; no mostraremos aquí más que la siguiente proposición: "sea v_1, v_2, $\ldots$, v_ν, $\ldots$ una sucesión finita o infinita de números linealmente independientes, i.e., de números tales que no existe entre ellos ninguna ecuación de la forma

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = 0$$

siendo los coeficientes a_1, a_2,..., a_n enteros que no son al mismo tiempo nulos; concibamos el sistema (Ω) de todos los números Ω que puedan ser representados mediante funciones racionales con coeficientes enteros de los números dados v_1, v_2, ..., v_ν, ..., entonces, en todo intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, hay una infinidad de números que no están incluidos en el sistema (Ω)."

En efecto, se ve, con la ayuda de consideraciones análogas a las que han sido empleadas en el §1, que los números de la categoría (Ω) pueden ser dispuestos en una sucesión de la forma

$$\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_\nu, \ldots,$$

de donde resulta el teorema en cuestión según la proposición demostrada en el §2.

El Sr. Minnigerade ha demostrado, mediante una reducción a los principios de Galois, un caso muy particular del teorema que acabamos de indicar, a saber, el caso en el cual los números v_1, v_2, ..., v_ν, ... están en número finito y en la cual el grado de las funciones racionales, que sirven para formar los números de la categoría (Ω), está dado de antemano. (Ver Math. Annalen de Clebsch y Neumann, T. III, p. 497.)

Berlin, 23 de Diciembre de 1873.

Comentario. Explicar la intervención de Dedekind respecto de los resultados contenidos en este artículo. Las cartas de 1873 son muy importantes, porque en ellas Dedekind, junto a una apreciación incorrecta, referida a la relevancia de la existencia de una biyección entre el conjunto de los números naturales y el de los reales, parece ser que le proporcionó la demostración de la existencia de una biyección entre el conjunto de los números (complejos) algebraicos y el conjunto de los números naturales, que Cantor restringió a una entre el conjunto de los números reales algebraicos y el de los números naturales, a causa, posiblemente, de querer mantener buenas relaciones con Kronecker, rival de Dedekind en la teoría algebraica de números.

Concretamente, en carta del 29 de Noviembre de 1873, Cantor le plantea a Dedekind la cuestión de si (n), el sistema de todos los enteros positivos n, es isomorfo a (x), el sistema de todas las magnitudes numéricas reales positivas x. Por otra parte, le dice que (n) es isomorfo al sistema (p/q) de todos los números racionales positivos p/q y también al sistema, más general, $(a_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu})$, siendo n_1, n_2,..., n_ν índices enteros positivos ilimitados, en un número cualquiera ν (el sistema $(a_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu})$ podría interpretarse como $(n)^\nu$, el conjunto de las ν-uplas de números enteros positivos).

Dedekind le responde que no sabe cuál es la respuesta y que debido a que el asunto carece de interés práctico particular, no merece grandes esfuerzos. Sin embargo, Cantor, en carta del 2 de Diciembre de 1873, insiste sobre el asunto y le dice que si la respuesta fuera *no*, con ello se habría dado una nueva demostración del teorema de Liouville sobre la existencia de números trascendentes. Ahora bien, Cantor demostró el teorema que establece la imposibilidad de la existencia de un isomorfismo entre el sistema de los enteros positivos y el sistema de los números reales del intervalo $]0, 1[$, teorema que tiene como corolario la existencia de números trascendentes, y se lo comunicó por carta, el 7 de Diciembre de 1873, a Dedekind, quién reconoció, en sus notas, que, en virtud del corolario del mencionado teorema, su opinión acerca de si el sistema de todos los enteros positivos es isomorfo al sistema de todas las magnitudes numéricas reales positivas, había quedado refutada de manera flagrante. Además, Dedekind, en su respuesta a la carta de Cantor del 29 de Noviembre de 1873, también le proporciona una demostración de que (n) es isomorfo al cuerpo de *todos* los números algebraicos y, a este respecto, Cantor señala que la demostración de Dedekind es más o menos la misma mediante la cual él establece su afirmación de que (n) es isomorfo a $(n)^\nu$, considerando $N = n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_\nu^2$ y ordenando según ello a los elementos. Por último, en la misma carta, Cantor coincide con Dedekind en que el problema (de si (n) es isomorfo a (x)) es equivalente al de si (n) lo es al sistema $(a_{n_1,n_2,\ldots})$, siendo n_1, n_2,..., índices enteros positivos ilimitados, en número infinito (el sistema $(a_{n_1,n_2,\ldots})$ podría interpretarse como $(n)^{(n)}$, el conjunto de las sucesiones, indexadas por los enteros positivos, de números enteros positivos).

Respecto de la demostración del teorema según el cual ningún intervalo, no degenerado, del conjunto de los números reales es isomorfo a un conjunto infinito numerable, que es el resultado fundamental del artículo que nos ocupa, Cantor proporcionó a Dedekind, el 7 de Diciembre de 1873, una demostración rigurosa del mismo, pero referida al intervalo $]0,1[$, usando un método muy complicado, según declaración del propio Dedekind, y mediante una reducción al absurdo. De hecho Dedekind le respondió felicitándolo por el hallazgo y, al mismo tiempo, aportando una simplificación de la parte esencial de la demostración del teorema de Cantor. Simplificación que, según dice Dedekind en sus notas, es la que Cantor da en su artículo de 1874, sin citar a Dedekind, y evitando hablar, como le había dicho Dedekind, del "principio de continuidad". Tal vez la falta de reconocimiento explícito por parte de Cantor a las aportaciones que Dedekind hizo a su trabajo, fue lo que hizo que empezara a colmarse el vaso de la paciencia y comprensión de Dedekind para con Cantor.

La demostración que le comunicó Cantor a Dedekind, el 7 de Diciembre de 1873, fue la siguiente. En primer lugar supone que se pueden disponer todos los números ω del intervalo abierto $]0,1[$ en una sucesión $(\omega_n)_{n\in(n)}$:

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \ldots,\ \omega_n,\ \ldots$$

Antes de proseguir conviene tener presente que dado cualquier $n \in (n)$ siempre existe un $u \in (n)$ tal que $n < u$ y $\omega_n < \omega_u$ y un $v \in (n)$ tal que $n < v$ y $\omega_n > \omega_v$.

A partir de $(\omega_n)_{n\in(n)}$ Cantor procede a definir una familia numerable de sucesiones

$$((\omega_p^q)_{q\in(n)})_{p\in(n)},$$

como sigue. Para $p = 1$, la sucesión $(\omega_1^q)_{q\in(n)}$ tiene como primer término ω_1^1 precisamente a ω_1, el primer término de la sucesión $(\omega_n)_{n\in(n)}$, entonces ω_1^2 es el primer término de $(\omega_n)_{n\in(n)}$ que es mayor que ω_1, y así sucesivamente. Para $p = 2$, la sucesión $(\omega_2^q)_{q\in(n)}$ se obtiene a partir de los términos que quedan de la sucesión $(\omega_n)_{n\in(n)}$ cuando de ella se eliminan los términos de la sucesión $(\omega_1^q)_{q\in(n)}$, situación que podemos representar por:

$$(\omega_n)_{n\in(n)} - (\omega_1^q)_{q\in(n)},$$

de modo que ω_2^1 es el primer término de ésta última "sucesión", entonces ω_2^2 es el primer término de tal "sucesión" que es mayor que ω_2^1, y así sucesivamente. Continuando de esta manera se obtiene, en definitiva, $((\omega_p^q)_{q\in(n)})_{p\in(n)}$. Observemos que la sucesión $(\omega_1^q)_{q\in(n)}$ se obtiene componiendo la aplicación estrictamente creciente φ_1 de (n) en (n) y la sucesión $(\omega_n)_{n\in(n)}$, estando definida φ_1 como:

$$\begin{array}{rl} \varphi_1(1) = & 1 = \text{mín}(n), \\ \varphi_1(2) = & \text{mín}\{q \in (n) \mid \omega_q > \omega_{\varphi_1(1)}\}, \\ \varphi_1(3) = & \text{mín}\{q \in (n) \mid \omega_q > \omega_{\varphi_1(2)}\}, \\ \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,} \end{array}$$

la sucesión $(\omega_2^q)_{q\in(n)}$ se obtiene componiendo la aplicación estrictamente creciente φ_2 de (n) en (n) y la sucesión $(\omega_n)_{n\in(n)}$, estando definida φ_2 como:

$$\begin{array}{rl} \varphi_2(1) = & \text{mín}((n) - \varphi_1[(n)]), \\ \varphi_2(2) = & \text{mín}\{q \in (n) - \varphi_1[(n)] \mid \omega_q > \omega_{\varphi_2(1)}\}, \\ \varphi_2(3) = & \text{mín}\{q \in (n) - \varphi_1[(n)] \mid \omega_q > \omega_{\varphi_2(2)}\}, \\ \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,} \end{array}$$

la sucesión $(\omega_3^q)_{q\in(n)}$ se obtiene componiendo la aplicación estrictamente creciente φ_3 de (n) en (n) y la sucesión $(\omega_n)_{n\in(n)}$, estando definida φ_3 como:

$$\begin{array}{rl} \varphi_3(1) = & \text{mín}((n) - (\varphi_1[(n)] \cup \varphi_2[(n)])), \\ \varphi_3(2) = & \text{mín}\{q \in (n) - (\varphi_1[(n)] \cup \varphi_2[(n)]) \mid \omega_q > \omega_{\varphi_3(1)}\}, \\ \varphi_3(3) = & \text{mín}\{q \in (n) - (\varphi_1[(n)] \cup \varphi_2[(n)]) \mid \omega_q > \omega_{\varphi_3(2)}\}, \\ \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,} \end{array}$$

y, así, sucesivamente.

Una vez llevada a cabo tal descomposición de la sucesión $(\omega_n)_{n\in(n)}$ en una familia numerable de sucesiones $((\omega_p^q)_{q\in(n)})_{p\in(n)}$, Cantor elige un intervalo $[p,q]$ tal que ningún término de la sucesión $(\omega_1^q)_{q\in(n)}$ le pertenezca; se puede tomar, por ejemplo, como intervalo $[p,q]$ uno que esté en el interior del intervalo $[\omega_1^1, \omega_1^2]$. Entonces hay una primera sucesión de entre las restantes, $(\omega_2^q)_{q\in(n)}$, $(\omega_3^q)_{q\in(n)}$, $\dots$, digamos la k-ésima, que tiene términos que están en el interior de $[p,q]$ (porque en caso contrario, los números que están en el interior de $[p,q]$ no estarían en la sucesión $(\omega_n)_{n\in(n)}$, contrariamente a la hipótesis). Entonces se puede determinar, en el interior del intervalo $[p,q]$, un intervalo $[p',q']$ tal que ningún término de la sucesión $(\omega_k^q)_{q\in(n)}$ le pertenezca (se puede tomar, por ejemplo, si es ω_k^q el primer término de $(\omega_k^q)_{q\in(n)}$ que está en el interior de $[p,q]$, como intervalo $[p',q']$ uno que esté en el interior del intervalo $[\omega_k^q, \omega_k^{q+1}]$). Es evidente que $[p',q']$ se comporta de la misma manera relativamente a las sucesiones que preceden a la sucesión $(\omega_k^q)_{q\in(n)}$; pero, de entre las que le siguen, $(\omega_{k+1}^q)_{q\in(n)}$, $(\omega_{k+2}^q)_{q\in(n)}$, $\dots$, se llegará a una sucesión, digamos la k'-ésima, que tendrá términos que estarán en el interior de $[p',q']$, y entonces se podrá elegir, en el interior de $[p',q']$, un intervalo $[p'',q'']$ tal que ningún término de la sucesión $(\omega_{k'}^q)_{q\in(n)}$ le pertenezca. Iterando este proceso Cantor obtiene una sucesión infinita de intervalos:

$$[p,q],\ [p',q'],\ [p'',q''],\ \dots$$

tal que cada uno de ellos contiene a los siguientes. Además, estos intervalos guardan las siguientes relaciones con las sucesiones $(\omega_p^q)_{q\in(n)}$:

Ninguno de los términos de la primera, segunda, ..., $(k-1)$-ésima sucesión pertenece al intervalo $[p,q]$; ninguno de los términos de la k-ésima, ..., $(k'-1)$-ésima sucesión pertenece al intervalo $[p',q']$; etc. Pero hay al menos un número que está en todos los intervalos (en virtud del principio de los intervalos cerrados encajados) y que no se haya en ninguna de las sucesiones $(\omega_p^q)_{q\in(n)}$, luego tampoco en $(\omega_n)_{n\in(n)}$, pero esto es una contradicción. Por lo tanto los números del intervalo $]0,1[$ no se pueden disponer en una sucesión $(\omega_n)_{n\in(n)}$.

Hay que explicar qué son los números algebraicos y sus propiedades algebraicas. Decir qué son los números reales trascendentes (y recordar que según Euler: son trascendentes porque transcienden la potencia de los métodos algebraicos). Al principio del artículo Cantor dice que los números reales algebraicos son densos en $\mathbb{R}$, y, puesto que los números naturales no lo son en $\mathbb{R}$, es sorprendente, a primera vista, que exista una biyección entre el conjunto de los números reales algebraicos y el de los números naturales.

También es consciente Cantor de que una vez establecida una biyección entre un conjunto y el conjunto de los números naturales, se pueden obtener otras biyecciones entre los mismos conjuntos componiendo la dada con, por ejemplo, automorfismos (arbitrarios) del conjunto de los números naturales.

Explicar, si se puede, el significado de "ley" en Cantor. En el §2 se demuestra que ningún conjunto infinito numerable de números reales es isomorfo al conjunto de los números reales de un intervalo dado. Explicar si tal demostración es constructiva en algún sentido (esto tiene que ver con la frase "se puede, ..., determinar ..."), i.e., si hay algún algoritmo que permita obtener, en principio, un número real en el intervalo que se considera que no esté en el conjunto infinito numerable dado.

La demostración alternativa del teorema de Liouville es, en principio, puramente existencial, a diferencia de la del propio Liouville.

UNA CONTRIBUCIÓN A LA TEORÍA DE CONJUNTOS

MEMORIA DE
G. CANTOR
Halle

Traducción y comentarios por J. Bares y J. Climent.

(Extracto de la Revista de Borchardt, vol. 84.)

Si se pueden hacer corresponder elemento a elemento dos *conjuntos* bien definidos M y N mediante una operación unívoca [en el original Cantor dice "eindeutig und vollständig" que podrían ser traducidas por "unívoca" (considerándose como sinónimos "inyectiva", "uno-a-uno" e "inequívoca") y "completa"(considerándose como sinónimos "sobreyectiva", "suprayectiva" y "exhaustiva"), respectivamente] (y, cuando se puede hacer de una manera, se puede hacer también de muchas otras), entonces convengamos, en lo sucesivo, expresarnos diciendo que estos *conjuntos* tienen la misma *potencia*, o también que son *equivalentes*.

Llamaremos *partes integrantes* [en el original Cantor dice "Bestandteil" que podría ser traducida por "parte propia"] de un *conjunto* a todos los otros conjuntos M', cuyos elementos sean al mismo tiempo elementos de M.

Si dos *conjuntos* M y N no tienen la misma *potencia*, o bien M tendrá la misma *potencia* que una parte integrante de N, o bien N la misma que una parte integrante de M; en el primer caso llamamos a la *potencia* de M menor, en el segundo la llamamos mayor que la *potencia* de N.

Cuando los conjuntos que se consideran son finitos, i.e., están compuestos de un número finito de elementos, entonces la noción de la *potencia*, como es fácil verlo, corresponde a la de *número* con el significado de *enumeración* y por consiguiente también a la de *número entero positivo*, ya que en efecto dos conjuntos de esta naturaleza no tienen la misma potencia más que bajo la hipótesis de que el número de sus elementos sea el mismo.

Una *parte integrante* de un conjunto *finito* siempre tiene una potencia menor que el conjunto mismo; *este hecho no tiene lugar en los conjuntos infinitos, i.e., compuestos de un número infinito de elementos.* Sólo de la circunstancia de que un conjunto infinito M sea una parte integrante de otro N o de que se puedan hacer corresponder uno a uno los elementos de M a una parte integrante de N, mediante una operación unívoca [biunívoca], no se puede en modo alguno concluir que su potencia sea menor que la de N; esta conclusión no está justificada, más que si se sabe que la potencia de M no es igual a la de N; del mismo modo, siendo N una parte integrante de M o tal que sus elementos correspondan uno a uno unívocamente [biunívocamente] a una parte integrante de M, esta circunstancia no es suficiente para que la potencia de M sea mayor que la de N.

Para recordar un ejemplo simple, sea M la sucesión de los números enteros positivos ν, N la sucesión de los números enteros positivos pares 2ν; N es entonces una parte integrante de M y no obstante M y N tienen la misma potencia.

La sucesión de los números enteros positivos ν brinda, como es fácil mostrarlo, la *mínima* de todas las potencias que se presentan en los *conjuntos infinitos*. No obstante la *clase* de los conjuntos que tienen esta mínima potencia es *extraordinariamente rica* y *extensa*. A esta clase pertenecen, por ejemplo, todos los conjuntos que el Sr. Dedekind llama "cuerpos finitos" en sus bellas investigaciones sobre los números algebraicos (cf. Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, segunda o tercera edición, Brunswick 1871 y 1879); del mismo modo los conjuntos que he considerado y que he llamado "sistemas de puntos de ν-ésima especie" (cf. Mathematische Annalen de Clebsch y Neumann, t. V, p. 129) son de la *primera* (i.e., de la mínima) potencia.

Cada conjunto que se presenta como una sucesión simplemente infinita, con término general a_ν, pertenece evidentemente a esta misma *clase*; pero además las sucesiones dobles y en general las sucesiones n-ples con término general $a_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n}$ (donde ν_1, ν_2, $\ldots$, ν_n recorren independientemente entre sí todos los números enteros positivos) pertenecen también a esta clase. Incluso he demostrado que el conjunto (ω) de todos los números algebraicos reales (y se podría añadir: de todos los números algebraicos complejos) puede concebirse bajo la forma de una sucesión con término general ω_ν; es decir que el conjunto (ω), tanto como cada una de sus partes integrantes infinitas, tiene la *potencia* de la sucesión de los números enteros 1, 2, 3, $\ldots$, ν, $\ldots$ (Conf. Journal de Borchardt, t. 77, pág. 258). Con respecto a los *conjuntos* de esta *primera clase*, se tienen los teoremas siguientes, fáciles de demostrar:

"Siendo M un conjunto de la *primera* clase (i.e., de la *potencia* de la sucesión de los números enteros positivos), cada parte integrante de M tiene la misma potencia."

"Siendo M', M'', M''', $\ldots$ una sucesión finita o simplemente infinita de *conjuntos*, de los que cada uno tiene la *primera* potencia, el conjunto M que resulta de la reunión de M', M'', M''', $\ldots$, tiene también la *primera potencia*."

Vamos ahora a examinar en lo que va a seguir desde el punto de vista de su potencia los *conjuntos* que se llaman continuos y n-ples. Según un teorema que demostré en el §2 del tratado citado (Journal de Borchardt, t. 77, pág. 260) es cierto que estos conjuntos no pertenecen a la primera clase, i.e., que tienen una potencia superior a la primera.

Las investigaciones de Riemann, de Helmholtz y otros después de ellos sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría, parten, como se sabe, de la noción de *conjunto continuo*, de extensión n, y hacen consistir su *carácter esencial* en el hecho de que sus elementos dependen de n variables reales, continuas, independientes entre sí, de manera que a cada elemento del *conjunto* pertenece un sistema de valores x_1, x_2,$\ldots$, x_n admisible, y recíprocamente a cada sistema de valores x_1, x_2,$\ldots$, x_n admisible pertenece un cierto elemento del *conjunto*.

Las más de las veces, como resulta a *consecuencia* de estas investigaciones, se supone además *tácitamente* que la correspondencia puesta como base entre los elementos del *conjunto* y del sistema de valores x_1, x_2,$\ldots$, x_n es *continua*, de manera que a cada transformación infinitamente pequeña del sistema de valores x_1, x_2,..., x_n corresponde una transformación infinitamente pequeña del elemento correspondiente del *conjunto* y recíprocamente, a cada transformación infinitamente pequeña de los elementos del *conjunto*, una transformación semejante de los valores de sus *coordenadas*.

En cuanto a saber si esta suposición es suficiente, o si es necesario completarla mediante condiciones todavía más especiales, para poder considerar como *bien fundamentada* e *incontestable* la idea que estos autores se han hecho del conjunto n-ple y continuo, es una cuestión que dejaremos en principio en silencio([4]); sólo tenemos que mostrar aquí, que si se deja esta suposición de lado, (lo que sucede muy a menudo en los tratados de estos autores), i.e., si con respecto a la correspondencia entre el *conjunto* y sus *coordenadas* no se admite *ninguna limitación*, el carácter considerado por los autores como *esencial* (según el cual un conjunto n-ple continuo es tal que se pueden determinar los elementos mediante n coordenadas reales, continuas, independientes entre sí) pierde *su valor absolutamente.*

Como lo mostrará nuestro trabajo, se pueden incluso determinar los elementos de un *conjunto continuo* de extensión n mediante una *única* coordenada real y continua por medio de una operación *unívoca* [biunívoca]. Se sigue de ahí que, si no se hace ninguna suposición con respecto a la *naturaleza* de la *correspondencia*, el *número* de las coordenadas reales continuas e independientes que pueden servir para la determinación unívoca de los elementos de un *conjunto continuo de extensión n*, puede ser *cualquier número dado m* y por consiguiente *no se le puede* considerar como *carácter invariable* de un conjunto dado.

Al plantearme la cuestión de saber si un conjunto continuo de dimensión n puede ser asociado por medio de una operación unívoca [biunívoca] con un conjunto continuo de una *única* dimensión, de tal modo que a cada elemento de uno de ellos corresponda un elemento, y solamente uno, del otro, he descubierto que *una tal correspondencia siempre existe.*

Según eso una *superficie continua* puede *ser llevada completamente mediante una operación unívoca [biunívoca] a una línea continua; la misma cosa es verdadera para los cuerpos continuos y los conjuntos continuos geométricos de cualquier número de dimensiones.*

Aplicando la expresión introducida más arriba, podemos pues decir que la *potencia* de un *conjunto continuo* de extensión n y elegido arbitrariamente es *igual* a la *potencia* de un *conjunto* de extensión *simple*, como p.ej. de un *segmento continuo y limitado de recta.*

§1.

Puesto que dos *conjuntos continuos*, del *mismo* número de dimensiones, pueden, por medio de funciones analíticas, relacionarse entre sí completamente [exhaustivamente] y unívocamente biunívocamente, con respecto al objetivo que perseguimos (y que es mostrar que se pueden asociar de una manera completa [exhaustiva] y unívoca [biunívoca] conjuntos continuos que

---

[4] La respuesta a esta cuestión a la cual volveremos en otra circunstancia, no me parece que de lugar a ninguna dificultad seria.

no tienen el mismo número de dimensiones) todo se reduce, como fácilmente se entrevé, a la demostración del siguiente teorema:

(A). "*Sean* x_1, x_1, $\ldots$, x_n n *magnitudes reales, variables, independientes entre sí, de las que cada una puede tomar todos los valores* ≥ 0 *y* ≤ 1, *y sea* t *otra variable incluida en los mismos límites* $(0 \leq t \leq 1)$, *entonces se puede hacer corresponder esta magnitud* t *al sistema de las* n *magnitudes* x_1, x_1, $\ldots$, x_n *de tal modo que a cada valor determinado de* t *pertenece un sistema de valores determinados* x_1, x_1, $\ldots$, x_n *y, viceversa, a cada sistema de valores determinados* x_1, x_1, $\ldots$, x_n *un cierto valor de* t."

Como consecuencia de este teorema se sigue este otro, que es nuestro objetivo:

(B). "*Se puede hacer corresponder de una manera completa [exhaustiva] y unívoca [biunívoca] un conjunto continuo de dimensión* n *a un conjunto continuo de una dimensión; dos conjuntos continuos, uno de dimensión* n *y el otro de dimensión* m, *siendo* $n \substack{>\\=\\<} m$, *tienen la misma potencia; los elementos de un conjunto continuo de* n *dimensiones pueden ser determinados unívocamente por una única coordenada* t *continua y real; pero también pueden ser determinados unívocamente por un sistema de* m *coordenadas continuas* t_1, t_1, $\ldots$, t_n."

§2.

Para demostrar (A) partimos del conocido teorema de que número *irracional* $e \gtrless {0 \atop 1}$ puede ser representado de una manera completamente determinada, bajo la forma de una fracción continuada infinita:

$$e = \frac{1}{\alpha_1 +} \frac{1}{\alpha_2 +} \cdots \frac{1}{\alpha_\nu +} \cdots = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots)$$

donde los α_ν son números positivos enteros racionales.

A cada número *irracional* $e \gtrless {0 \atop 1}$ pertenece una sucesión determinada infinita de números enteros positivos α_ν y recíprocamente cada sucesión semejante determina un cierto número irracional $e \gtrless {0 \atop 1}$.

Sean ahora e_1, e_2, $\ldots$, e_n n magnitudes variables independientes entre sí, de las que cada una puede tomar todos los valores numéricos irracionales del intervalo $(0 \ldots 1)$, y pongamos:

$$\begin{array}{ll} e_1 = & (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{1,\nu}, \ldots) \\ \multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ e_\mu = & (\alpha_{\mu,1}, \alpha_{\mu,2}, \ldots, \alpha_{\mu,\nu}, \ldots) \\ \multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ e_n = & (\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,\nu}, \ldots); \end{array}$$

estos n números irracionales determinan unívocamente un $(n+1)$-ésimo número irracional $d \gtrless {0 \atop 1}$:

$$d = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots),$$

si se establece entre los números α y β la siguiente relación:

$$\beta_{(\nu-1)n+\mu} = \alpha_{\mu,\nu} \begin{cases} \mu = 1, 2, \ldots, n \\ \nu = 1, 2, \ldots \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Pero también del otro lado si se parte de un número irracional $d \gtrless {0 \atop 1}$, entonces determina la sucesión de los β_ν y por medio de (1) las sucesiones de los $\alpha_{\mu,\nu}$; por consiguiente d determina completamente [exhaustivamente] y unívocamente [biunívocamente] el sistema de los n números irracionales $e_1, e_2, \ldots, e_n$. De esta consideración resulta en primer lugar el siguiente teorema:

(C). "*Sean $e_1, e_2, \ldots, e_n$ n magnitudes variables independientes entre sí, de las que cada una puede tomar todos los valores numéricos irracionales del intervalo $(0 \ldots 1)$ y sea d otra variable irracional con los mismos límites, entonces se pueden hacer corresponder de una manera completa [exhaustiva] y unívoca [biunívocamente] esta magnitud d y el sistema de las n magnitudes $e_1, e_2, \ldots, e_n$.*"

§3.

Después de haber demostrado, en el parágrafo precedente, el teorema (C), vamos a demostrar ahora el siguiente teorema:

(D). "*Una magnitud variable e que puede tomar todos los valores numéricos irracionales del intervalo $(0 \ldots 1)$, puede asociarse unívocamente [biunívocamente] a una variable x que admita todos los valores reales, i.e., racionales e irracionales, que son ≥ 0 y ≤ 1 de manera que a cada valor irracional de $e \gtrless {0 \atop 1}$ le corresponda un valor real de $x \gtreqqless {0 \atop 1}$ y uno solamente y que, recíprocamente, a cada valor real de x corresponda un cierto valor irracional de e.*"

Pues una vez demostrado este teorema, (aplicándolo) representemos como correspondientes a las $n+1$ magnitudes variables designadas en el §2 por e_1, $e_2, \ldots, e_n$ y d, las otras variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y t, asociadas a las primeras mediante una operación unívoca [biunívoca], pudiendo tomar cada una de las últimas variables, sin restricción, todos los valores reales ≥ 0 y ≤ 1. Puesto que hemos establecido una correspondencia completa [exhaustiva] y unívoca [biunívoca] entre la variable d y el sistema de las n variables $e_1, e_2, \ldots, e_n$ en el §2, se obtiene de esta manera una asociación completa [exhaustiva], determinada y unívoca [biunívoca] de la variable continua t y del sistema de las n variables continuas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, lo cual demostrará la verdad del teorema (A).

No tendremos pues que ocuparnos en lo que sigue más que de la demostración del teorema (D); permítasenos emplear, para abreviar, un formalismo simple que vamos ha hacer conocer en primer lugar.

Llamaremos *conjunto lineal* de números reales a todo conjunto bien definido de números reales, distintos entre sí, i.e., desiguales, de modo que un sólo y mismo número no se presenta más de una vez como elemento en un *conjunto lineal.*

Las variables reales, que se presentan en el curso de este trabajo, son todas de tal naturaleza que el *campo* de cada una de ellas, i.e., el conjunto de los valores que puede tomar, es un *conjunto lineal* dado; en lo que sigue no insistiremos pues sobre esta suposición que por doquier haremos tácitamente.

De dos variables de esta naturaleza a y b diremos que no tienen ninguna conexión, si ninguno de los valores que puede tomar a es igual a un valor de b, i.e., los dos conjuntos de valores que pueden tomar las variables a y b, no tienen elementos comunes, si se dice que a y b están sin conexión.([5])

Si se tiene una sucesión finita o infinita a', a'', a''', $\ldots$, $a^{(\nu)}$, $\ldots$ de variables bien definidas o de constantes tales que $a^{(\nu)}$ y $a^{(\mu)}$ no tienen ninguna conexión entre sí, entonces se puede definir una variable a por el carácter de que su campo se compone del conjunto de los campos de a', a'', a''', $\ldots$, $a^{(\nu)}$, $\ldots$; recíprocamente, una variable dada a puede descomponerse según los más diversos modos en otras a', a'',$\ldots$ que no estén en conexión dos a dos; en estos dos casos expresamos la relación de la variable a con las variables a', a'',$\ldots$, $a^{(\nu)}$, $\ldots$ mediante la siguiente fórmula:

$$a \equiv \{a', a'', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots\}.$$

Esta fórmula expresa al mismo tiempo 1º que todo valor pudiera tomar una de las variables $a^{(\nu)}$ es también un valor que conviene a la variable a; 2º que todo valor que puede recibir a puede ser también tomado por una de las magnitudes $a^{(\nu)}$, y por una solamente. para explicar esta fórmula, sea por ejemplo φ una variable que puede tomar todos los valores racionales ≥ 0 y ≤ 1, y e una variable que puede tomar todos los valores irracionales del intervalo $(0\ldots 1)$ y finalmente x una variable que puede tomar todos los valores reales, racionales e irracionales ≥ 0 y ≤ 1, entonces se tiene:

$$x \equiv \{\varphi, e\}.$$

Sean a y b dos magnitudes variables de tal naturaleza que se les pueda asociar entre sí completamente [exhaustivamente] y unívocamente [biunívocamente], en otros términos si el campo de la una y la otra tienen la misma potencia, entonces llamaremos a a y b equivalentes entre sí y lo expresaremos mediante una de las dos fórmulas $a \sim b$ o $b \sim a$. Según esta definición de la equivalencia de dos magnitudes variables se sigue inmediatamente que $a \sim a$; y que, si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces se tiene siempre también $a \sim c$.

En lo que sigue del trabajo el teorema que sigue a continuación, del que podemos omitir la demostración debido a su simplicidad, tendrá su aplicación en diversos lugares:

(E). *Sea a', a'',$\ldots$, $a^{(\nu)}$, $\ldots$ una sucesión finita o infinita de variables o de constantes que no estén en conexión dos a dos, b', b'',$\ldots$, $b^{(\nu)}$, $\ldots$ otra sucesión de la misma naturaleza, si a cada variable $a^{(\nu)}$ de la primera sucesión le corresponde una variable determinada $b^{(\nu)}$ de la segunda y si estas variables correspondientes son constantemente equivalentes entre sí, i.e., que $a^{(\nu)} \sim b^{(\nu)}$, entonces se tendrá siempre también: $a \sim b$, si*

$$a \equiv \{a', a'', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots\}$$

y

$$b \equiv \{b', b'', \ldots, b^{(\nu)}, \ldots\}.$$

---

[5]Dos conjuntos M y N o bien no tienen ninguna conexión, si no tienen ningún elemento que les sea común; o bien están asociados con un tercer conjunto determinado P, i.e., por el conjunto de sus elementos comunes. Designo al conjunto P por $\mathfrak{D}(M, N)$.

§4.

En el punto al que hemos llegado en nuestro trabajo, no queda más que demostrar el teorema (D) del §3. para eso tomemos como punto de partida que se pueden escribir todos los números racionales que son ≥ 0 y ≤ 1, bajo la forma de una sucesión simplemente infinita:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$$

con término general φ_ν.

Se puede demostrar de la manera más simple como sigue: siendo p/q la forma irreducible de un número racional ≥ 0 y ≤ 1, donde por consiguiente p y q son números enteros no negativos con máximo común divisor 1, pongamos $p + q = N$. En consecuencia a cada número p/q pertenece un valor determinado, entero y positivo de N, y, recíprocamente, a cada valor de N pertenece siempre un *número finito* de cantidades p/q. Si se imaginan ahora los números p/q dispuestos en un orden tal que aquéllos que pertenecen a valores menores de N preceden a aquéllos para los cuales N tiene un valor mayor, y que además los números p/q, para los cuales N tiene el mismo valor se siguen los unos a los otros por el orden de magnitud, los mayores después de los menores, entonces cada uno de los números p/q viene a ocupar un lugar perfectamente determinado en una sucesión simplemente infinita, cuyo término general será designado por φ_ν. Pero esta proposición puede también obtenerse como conclusión de lo que he dicho en otra parte, que el conjunto (ω) de todos los números reales algebraicos puede ponerse bajo la forma de una sucesión infinita:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

con el término general ω_ν; esta propiedad del conjunto (ω) se transmite en efecto al conjunto de todos los números racionales ≥ 0 y ≤ 1, porque este último conjunto es una parte integrante del primero (ω).

Sea ahora e la variable que se presenta en el teorema (D) y que puede tomar los valores numéricos reales del intervalo $(0 \ldots 1)$, con la excepción de los números φ_ν.

Tomemos a continuación en el intervalo $(0 \ldots 1)$ una sucesión infinita cualquiera de números *irracionales* ε_ν y sometida a las condiciones de que en general $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ y que $\lim\limits_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 1$; sea por ejemplo:

$$\varepsilon_\nu = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2^\nu}.$$

Designemos por f una variable, que puede tomar todos los valores reales del intervalo $(0 \ldots 1)$, con la excepción de los valores ε_ν, y por g otra variable, que puede tomar todos los valores reales del intervalo $(0 \ldots 1)$, con la excepción de los ε_ν y los φ_ν.

Decimos que:

$$e \sim f.$$

En efecto, según la notación del §3, se tiene:

$$e \equiv \{g, \varepsilon_\nu\},$$

y

$$f \equiv \{g, \varphi_\nu\}.$$

pero se tiene que: $g \sim g$; $\varepsilon_\nu \sim \varphi_\nu$; luego concluimos según (E) que $e \sim f$.

El teorema que se tiene que demostrar (D) queda pues reducido al siguiente teorema:

(F). *"Una variable f que puede tomar todos los valores del intervalo* $(0 \dots 1)$*, con la excepción de los valores de una sucesión dada ε_ν, sometida a las condiciones de que $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ y que $\lim\limits_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 1$, puede asociarse completamente [exhaustivamente] y unívocamente [biunívocamente] a una variable x que puede tomar todos los valores ≥ 0 y ≤ 1; en otros términos, se tiene que $f \sim x$."*

§5.

Basamos la demostración de (F) sobre los siguientes teoremas (G), (H), (J):

(G). "*Sea y una variable que puede tomar todos los valores del intervalo* $(0 \dots 1)$ *solamente con la excepción de* 0, *x una variable que admite todos los valores del intervalo* $(0 \dots 1)$ *sin excepción, entonces se tiene que: $y \sim x$.*"

La demostración de este teorema (G) se hace de la manera más simple considerando la curva de al lado [FALTA LA FIGURA], de la que las abscisas a partir de O representan la magnitud x, y las ordenadas la magnitud y. Esta curva está compuesta de un número infinito de segmentos de rectas $\overline{ab}$, $\overline{a'b'}$, $\dots$, $\overline{a^{(\nu)}b^{(\nu)}}$, $\dots$ (que son paralelas entre sí y se hacen infinitamente pequeñas cuando ν crece al infinito) y del punto aislado c, al que estos segmentos se aproximan asintóticamente. Los puntos extremos a, a', $\dots$, $a^{(\nu)}$, $\dots$ deben ser considerados como formando parte de la curva, por el contrario los puntos extremos b, b', $\dots$, $b^{(\nu)}$, $\dots$ deben ser considerados como externos de esta curva. Las longitudes representadas en la figura son:

$$\overline{Op} = \overline{pc} = 1;\ \overline{Ob} = \overline{bp} = \overline{Oa} = \frac{1}{2};\quad \overline{a^{(\nu)}d^{(\nu)}} = \overline{d^{(\nu)}b^{(\nu)}} = \overline{b_{\nu-1}b_\nu} = \frac{1}{2^{\nu+1}}.$$

Se convence de que, mientras que la abscisa x toma todos los valores de 0 a 1, la ordenada y también los toma todos, con la excepción del valor 0.

Estando así demostrado el teorema (G), se obtiene aplicando las fórmulas de transformación:

$$y = \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha};\quad x = \frac{u-\alpha}{\beta-\alpha},$$

la generalización de (G):

(H). "*Una variable z que puede tomar todos los valores del intervalo* $(\alpha \dots \beta)$*, donde $\alpha < \beta$, solamente con la excepción de α, es equivalente a una variable u que puede tomar todos los valores del mismo intervalo* $(\alpha \dots \beta)$ *sin excepción.*"

De ahí llegamos inmediatamente al siguiente teorema:

(J). "*Siendo ω una variable susceptible de tomar todos los valores del intervalo* $(\alpha \dots \beta)$*, con la excepción de los dos valores extremos α y β, y siendo u la misma variable que en* (H)*, se tiene que $\omega \sim u$.*"

En efecto: sea γ cualquier valor entre α y β; e introduzcamos como auxiliares cuatro nuevas variables ω', ω'', u'' y z.

Supongamos que z sea la misma variable que en H, que ω' tome todos los valores del intervalo $(\alpha \dots \gamma)$ con la excepción de los dos valores extremos

α y γ; que se den a ω'' todos los valores del intervalo $(\gamma \dots \beta)$ solo con la excepción del valor extremo β; sea finalmente u'' una variable susceptible de tomar todos los valores del intervalo $(\gamma \dots \beta)$ incluidos los valores extremos.

Se tiene entonces que:

$$\omega \equiv \{\omega', \omega''\}, \; z \equiv \{\omega', u''\}.$$

pero en virtud de (H) se tiene que $\omega'' \sim u''$; concluimos pues que $\omega \sim z$. Pero según (H) se tiene también que: $z \sim u$; por consiguiente también se tiene que: $\omega \sim u$, lo cual demuestra el teorema (J).

Podemos ahora demostrar el teorema (F) como sigue:

Remitiendo para el significado de las variables f y x al enunciado de (F), introducimos ciertas variables auxiliares:

$$f', f'', \dots, f^{(\nu)}, \dots$$

y

$$x'', x^{\mathrm{IV}}, \dots, x^{(2\nu)}, \dots.$$

Sean: f' una variable que admita todos los valores del intervalo $(0 \dots \varepsilon_1)$ solo con la excepción del valor extremo ε_1; $f^{(\nu)}$ para $\nu > 1$ una variable susceptible de tomar todos los valores del intervalo $(\varepsilon_{\nu-1} \dots \varepsilon_\nu)$ con la excepción de los dos valores extremos $\varepsilon_{\nu-1}$ y ε_ν; $x^{(2\nu)}$ una variable que admita todos los valores del intervalo $(\varepsilon_{2\nu-1} \dots \varepsilon_{2\nu})$ sin excepción.

Si además se asocia a las variables f', f'', $\dots$, $f^{(\nu)}$, $\dots$ la cantidad constante 1, entonces todas estas magnitudes tomadas en conjunto tienen el mismo campo que f, i.e., que se tiene:

$$f \equiv \{f', f'', \dots, f^{(\nu)}, \dots, 1\}.$$

Del mismo modo se convence uno de que:

$$x \equiv \{f', x'', f''', x^{\mathrm{IV}}, \dots, f^{(2\nu-1)}, x^{(2\nu)}, \dots, 1\}.$$

Pero como consecuencia del teorema (J) se tiene que:

$$f^{(2\nu)} \sim x^{(2\nu)}; \text{ además:} f^{(2\nu-1)} \sim f^{(2\nu-1)}; 1 \sim 1;$$

de donde por el teorema (E) §3:

$$f \sim x.$$

§6.

Voy a dar ahora una demostración mucho más breve del teorema (D); si no me he limitado a ésa, eso vino de que los teoremas auxiliares (F), (G), (H) y (J) que han servido para una demostración más complicada, tienen interés en ellos mismos. Designamos por x, como más arriba, una variable que puede tomar todos los valores reales del intervalo $(0 \dots 1)$, incluidos los valores extremos; sea e una variable que solo admite los valores irracionales del intervalo $(0 \dots 1)$; entonces es necesario demostrar que $x \sim e$.

Nos representamos, como en el §4, los números racionales ≥ 0 y ≤ 1 bajo la forma de una sucesión, con término general φ_ν, donde ν tiene que recorrer la sucesión de los números 1, 2, 3, $\dots$. Tomamos a continuación en el intervalo

$(0\ldots 1)$ una sucesión infinita cualquiera de números irracionales distintos entre sí; sea η_ν el término general de esta sucesión $\left(\text{por ejemplo} : \eta_\nu = \frac{\sqrt{2}}{2^\nu}\right)$.

Designemos por h una variable susceptible de tomar todos los valores del intervalo $(0\ldots 1)$ con la excepción tanto de los φ_ν como de los η_ν.

Según el formalismo adoptado en el §3 se tiene entonces que:

(1) $$x \equiv \{h, \eta_\nu, \varphi_\nu\}$$

y

$$e \equiv \{h, \eta_\nu\}.$$

Podemos también escribir la última fórmula como sigue:

(2) $$e \equiv \{h, \eta_{2\nu-1}, \eta_{2\nu}\}.$$

Si ahora observamos que:

$$h \sim h;\ \eta_\nu \sim \eta_{2\nu-1};\ \varphi_\nu \sim \eta_{2\nu},$$

y si aplicamos a las dos fórmulas (1) y (2) el teorema (E) §3, obtenemos que $x \sim e$; q.e.d.

§7.

Para la demostración de (A) podría estarse tentado de escoger la forma de representación de las fracciones *decimales* infinitas en lugar de las fracciones *continuadas* que hemos empleado; parecería que este método nos habría llevado más rápidamente al objetivo; pero por el contrario ella encierra en sí una dificultad sobre la cual quiero atraer la atención; y es la razón que me ha hecho renunciar en este trabajo al empleo de las fracciones decimales.

Si se tienen por ejemplo dos variables x_1 y x_2 y se pone:

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_\nu}{10^\nu} + \ldots$$

$$x_2 = \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \ldots + \frac{\beta_\nu}{10^\nu} + \ldots$$

suponiendo que los números α_ν y β_ν sean números ≥ 0 y ≤ 9 y que no toman constantemente, a partir de un cierto ν, el valor 0 (excepto cuando x_1 o x_2 es igual a 0), entonces estas expresiones de x_1 y x_2 estarán determinadas, en todos los casos con un significado único, i.e., x_1 y x_2 determinan las sucesiones infinitas de números α_ν y β_ν, y recíprocamente.

Si ahora se obtiene de x_1 y x_2 un número:

$$t = \frac{\gamma_1}{10} + \frac{\gamma_2}{10^2} + \ldots + \frac{\gamma_\nu}{10^\nu} + \ldots$$

poniendo:

$$\gamma_{2\nu-1} = \alpha_\nu;\ \gamma_{2\nu} = \beta_\nu \quad \text{para } \nu = 1, 2, \ldots \infty,$$

entonces se establece una asociación unívoca [biunívoca] entre el sistema x_1, x_2 y la variable t; puesto que solo un sistema de valores x_1, x_2 conduce a un valor dado de t. Pero la variable t, y esta es la particularidad que hay que observar aquí, *no toma todos los valores del intervalo* $(0\ldots 1)$, tiene una variabilidad restringida, mientras que x_1 y x_2 no están sometidas a ninguna restricción en este mismo intervalo.. En efecto, todos los valores de la suma de la serie:

$$\frac{\gamma_1}{10} + \frac{\gamma_2}{10^2} + \ldots + \frac{\gamma_\nu}{10^\nu} + \ldots,$$

donde, a partir de un cierto $\nu > 1$, todos los $\gamma_{2\nu-1}$ o todos los $\gamma_{2\nu}$, tienen el valor cero, deben ser considerados excluidos de los límites de variabilidad de t, porque ellas nos retrotraerían a representaciones, por fracciones decimales, de x_1 o x_2, finitas y por consiguiente inadmisibles.

§8.

Una vez que, en los parágrafos precedentes, el trabajo que nos propusimos ha sido llevado a su finalización, algunas observaciones más generales podrán encontrar su lugar aquí, como conclusión.

El principio (A) y por consiguiente el principio (B) pueden ser generalizados, de manera que *conjuntos continuos* de un número *infinitamente grande de dimensiones tengan la misma potencia que los conjuntos continuos de una sola dimensión; no obstante esta generalización está esencialmente ligada a la hipótesis de que las dimensiones infinitamente numerosas constituyan ellas mismas un conjunto de la primera clase o potencia.* En lugar del teorema (A) se tiene el siguiente

(A′). "*Sean* x_1, x_1, $\ldots$, x_μ, $\ldots$ *una sucesión simplemente infinita de magnitudes variables, reales, independientes entre sí, de las que cada una puede tomar todos los valores* ≥ 0 *y* ≤ 1, *y sea* t *otra variable con los mismos límites* $(0 \leq t \leq 1)$, *entonces se puede hacer corresponder mediante una operación unívoca [biunívoca] esta magnitud* t *al sistema de las* x_1, x_1, $\ldots$, x_μ, $\ldots$, *que son en número infinito.*"

Este teorema (A′) se reconduce, con la ayuda del teorema (D) §3, al siguiente:

(C′). "*Sea* e_1, e_2, $\ldots$, e_μ, $\ldots$ *una sucesión infinita de magnitudes variables independientes entre sí, de las que cada una puede tomar todos los valores numéricos irracionales del intervalo* $(0 \ldots 1)$ *y sea* d *otra variable irracional con los mismos límites, entonces se pueden asociar esta magnitud* d *mediante una operación unívoca [biunívoca] al sistema de magnitudes en número infinito* e_1, e_2, $\ldots$, e_μ, $\ldots$."

La demostración de (C′) se hace de la manera más simple, aplicando el desarrollo en fracción continuada y poniendo, como en el §2:

$$e_\mu = (\alpha_{\mu,1}, \alpha_{\mu,2}, \ldots, \alpha_{\mu,\nu}, \ldots)$$

para $\mu = 1, 2, \ldots \infty$

$$d = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\lambda, \ldots)$$

y estableciendo entre los números enteros positivos α y β la relación:

$$\alpha_{\mu,\nu} = \beta_\lambda,$$

donde:

$$\lambda = \mu + \frac{(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2}.$$

En efecto, la función $\mu + \frac{(\mu+\nu-1)(\mu+\nu-2)}{2}$, como es fácil de mostrar, posee la notable propiedad de representar a todos los números enteros positivos, y a cada uno de ellos una vez solamente, cuando μ y ν toman igualmente, independientemente entre sí, todos los valores enteros positivos.

El teorema (A′) parece indicar el límite hasta el que se puede generalizar el teorema (A) y las consecuencias que de él se derivan. Y ahora que hemos así demostrado, para un campo extraordinariamente rico y extenso de *conjuntos*, la propiedad de poder asociarse completamente [exhaustivamente] y unívocamente [biunívocamente] a una recta continua o a una parte de esta recta (entendiendo por *partes de una línea todos los conjuntos de puntos que allí están contenidos*) se plantea la cuestión de saber como se comportan, *desde el punto de vista de su potencia*, las diferentes partes de una línea recta continua , i.e., los diferentes conjuntos infinitos de puntos que se pueden imaginar en ella.

Si despojamos este problema de su forma geométrica y si, como ya ha sido explicado en el §3, entendemos por *conjunto lineal de números reales* todo conjunto imaginable de cantidades reales distintas entre sí y en número infinito, entonces la cuestión se plantea así: *¿en qué clases se dividen los conjuntos lineales, y cuál es el número de estas clases, si se agrupan en clases diferentes los conjuntos de diferente potencia, y en la misma clase los conjuntos de la misma potencia?* Mediante un procedimiento inductivo, en la descripción del cual no entraremos aquí, se llega al teorema de que el número de las clases de conjuntos obtenidos según este modo de agrupamiento es un número finito y que es igual a *dos*.

Según eso los conjuntos lineales comprenderían dos clases([6]) de las que la *primera* contiene a todos los conjuntos susceptibles de ser reducidos a la forma: *functio ipsius* ν (donde ν recorre todos los números enteros positivos); mientras que la *segunda* clase abarca a todos los conjuntos reducibles a la forma: *functio ipsius* x (donde x puede tomar todos los valores reales ≥ 0 y ≤ 1).

No habrá pues en los conjuntos lineales infinitos, y por consiguiente también en todos los otros que a ellos se reduzcan mediante una operación completa [exhaustiva] y unívoca [biunívoca], más que *dos especies* de *potencias*, en correspondencia con estas clases; remitimos para más adelante la solución exacta de esta cuestión.

Halle, 11 de Julio de 1877.

[6]Que estas dos clases sean distintas en realidad, es consecuencia inmediata del teorema demostrado en el §2 del trabajo citado más arriba (Journal de Math. Pures et Appliquées t. 77, p. 260), según el cual, si se tiene una sucesión regular infinita u_1, u_2, ..., u_ν, ... siempre se pueden encontrar en cada intervalo dado $(\alpha \ldots \beta)$ números v que no ocurren en la sucesión propuesta.

SOBRE LOS CONJUNTOS INFINITOS Y LINEALES DE PUNTOS

POR
G. CANTOR
Halle

Traducción y comentarios por J. Bares y J. Climent.

I.

(Extracto de los Anales matemáticos de Leipzig, vol. 15.)

En una memoria publicada en el Journal del Sr. Borchardt, t. 84 demostré para una clase vastísima de conjuntos geométricos y aritméticos, sea continuos, sea discontinuos, que se les puede poner en correspondencia sin ambigüedad con puntos distribuidos de una manera continua o discontinua sobre un segmento de recta. Estos últimos conjuntos adquieren de ese modo una importancia particular; los llamaremos *conjuntos* o *sistemas lineales* de puntos. Los puntos de un tal sistema están distribuidos sobre un segmento de recta de longitud finita o infinita o bien de manera que ocupan todo el segmento o bien de manera que no ocupan más que partes de este segmento, y no parece fuera de propósito estudiarlos y tratar de clasificarlos; es esto lo que nos proponemos hacer aquí. Partiendo de diversos puntos de vista y de los principios de clasificación, con ellos relacionados, somos llevados a clasificar los conjuntos de puntos lineales en ciertas categorías. Para empezar con uno de estos puntos de vista, recordemos la noción del conjunto derivado de un conjunto de puntos dado P, tal como ha sido dada en un trabajo sobre las series trigonométricas (Annales math. t. 5); en una obra recientemente aparecida del Sr. U. Dini (Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali, Pisa, 1878) vemos esta noción todavía más desarrollada, puesto que sirve de punto de partida para una serie de generalizaciones notables de teoremas analíticos conocidos.[7]

Por otra parte, esta noción del *conjunto derivado* de un conjunto dado no se restringe a los conjuntos lineales, sino que se aplica de la misma manera a los conjuntos de dimensión dos, tres o n continuos o discontinuos. Como lo mostraremos posteriormente, es sobre esta noción sobre la que reposa la comprensión más clara y al mismo tiempo más general de un *conjunto continuo.*

El *derivado* $P^{(1)}$ *de un conjunto de puntos* P es en efecto el conjunto de todos los puntos que poseen la propiedad de coincidir con un punto límite de P, no importando, por otra parte, que este punto límite sea al mismo tiempo un punto de P, o no.

Puesto que entonces el *derivado* de un conjunto P es un nuevo conjunto determinado $P^{(1)}$, se puede también buscar el *derivado* de $P^{(1)}$, que se llamará el *segundo conjunto derivado* o simplemente el *segundo derivado* de P; y continuando de este modo, se obtiene el ν-ésimo *derivado* de P, que se designa por $P^{(\nu)}$.

[7] Ver también: Ascoli, Nuove ricerche sulla serie di Fourier. Reale Academia dei Linzei, 1877–78.

Puede ocurrir que la sucesión de los derivados $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, ... conduzca a un derivado $P^{(n)}$ compuesto por puntos que no se presenten más que en número finito en cada extensión finita, de modo que $P^{(n)}$ no tenga puntos límite y por consiguiente no de lugar a ningún derivado; en este caso decimos que el sistema de puntos P es del *primer género* y de *n-sima especie*. Pero si la sucesión de los derivados de P, la sucesión $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ... es infinita, entonces decimos que el conjunto de puntos P es del *segundo género*. De ahí se reconoce sin esfuerzo que si P es del primer género y de n-sima especie, entonces $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ... pertenecen también al primer género y son respectivamente de $(n-1)$-ésima, de $(n-2)$-ésima, de $(n-3)$-ésima, ... especie; que a continuación si P es del segundo género, entonces la misma consecuencia se aplica a todos los derivados $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, ... Hay también que observar que todos los puntos de $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ... son siempre también puntos del primer derivado $P^{(1)}$, mientras que un punto perteneciente a $P^{(1)}$ no es necesariamente un punto de P.

Se descubren a continuación caracteres importantes de un conjunto de puntos P, si se estudia la manera como se comporta este conjunto con respecto a un intervalo dado continuo $(\alpha \ldots \beta)$, cuyos puntos extremos son considerados como pertenecientes al intervalo mismo. Puede ocurrir que algunos puntos o incluso todos los puntos de este intervalo sean al mismo tiempo puntos de P, o bien que ningún punto de $(\alpha \ldots \beta)$ pertenezca a P; en este último caso decimos que P está totalmente fuera del intervalo $(\alpha \ldots \beta)$.

Si P está contenido en el intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, total o parcialmente, entonces puede presentarse un caso notable: es el caso en el que cada intervalo $(\gamma \ldots \delta)$, por pequeño que sea, incluido en $(\alpha \ldots \beta)$, contiene puntos de P. En este caso diremos que P está *condensado en todo el intervalo* $(\alpha \ldots \beta)$.

Como ejemplos de sistemas de puntos así condensados en toda la extensión del intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, tenemos: 1º todo conjunto de puntos al cual pertenecen como elementos todos los puntos del intervalo $(\alpha \ldots \beta)$; 2º el conjunto de puntos compuesto por todos los puntos cuyas abscisas son números racionales; 3º el sistema de puntos compuesto por todos los puntos, que tienen por abscisas los números racionales de la forma $\pm\frac{2n+1}{2^m}$, donde n y m son números enteros positivos.

A partir de esta explicación de la expresión "*condensado en toda la extensión de un intervalo dado*", resulta que, si un sistema de puntos no está condensado en todo un intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, entonces debe necesariamente existir un intervalo $(\gamma \ldots \delta)$ incluido en el primero y donde no se encuentre ningún punto de P. Se puede mostrar también que, si P está condensado en todo el intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, entonces no sólo la misma cosa es verdadera para $P^{(1)}$, sino que también $P^{(1)}$ tiene como puntos a todos los del intervalo $(\alpha \ldots \beta)$. Se podría tomar esta propiedad de $P^{(1)}$ como punto de partida para la explicación de la expresión "*estar condensado en toda la extensión de un intervalo*", puesto que se puede decir: un sistema de puntos P está condensado en toda la extensión del intervalo $(\alpha \ldots \beta)$ cuando su primer derivado $P^{(1)}$ contiene como elementos a todos los puntos de $(\alpha \ldots \beta)$.

Si P está condensado en todo un intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, entonces lo es también en toda la extensión de cualquier otro intervalo $(\alpha' \ldots \beta')$ contenido en el primero.

Un sistema de puntos P condensado en toda la extensión de un intervalo $(\alpha \dots \beta)$ es necesariamente del segundo género; porque entonces $P^{(1)}$, y por consiguiente $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ... están también condensados en todo el intervalo $(\alpha \dots \beta)$ y esta sucesión de derivados de P es ilimitada, i.e., que P pertenece al segundo género.

De ahí concluimos que un sistema de puntos P del primer género no está con toda seguridad condensado en todo un intervalo $(\alpha \dots \beta)$, sea cual sea por otra parte este intervalo y que, por consiguiente, siempre se puede encontrar en $(\alpha \dots \beta)$ un intervalo $(\gamma \dots \delta)$, que no contiene ni un sólo punto de P.

Por lo que respecta a la cuestión de saber si recíprocamente todo sistema de puntos del segundo género es de tal naturaleza, que tenga un intervalo en toda la extensión del cual esté condensado, nos ocuparemos más adelante. Llegamos ahora a un segundo modo de clasificación de los conjuntos lineales de puntos no menos importante que la primera: está fundamentado en la consideración de la *potencia*. En la memoria citada más arriba (Journal del Sr. Borchardt t. 84) hemos dicho en general de dos conjuntos M y N geométricos, aritméticos o pertenecientes a alguna otra categoría bien definida, que tienen la *misma potencia*, cuando se les puede hacer corresponder entre ellos según alguna ley determinada, de manera que a cada elemento de M corresponda un elemento de N y, recíprocamente, a cada elemento de N, un elemento de M.

Según que dos conjuntos sean de la misma potencia o no, pueden ser colocados en una misma clase o en clases diferentes. Se pueden aplicar estas reglas generales especialmente a los conjuntos lineales de puntos a los que se dividirá por consiguiente en clases determinadas; los sistemas de puntos de una clase son todos de la misma potencia, por el contrario los sistemas de puntos pertenecientes a clases diferentes son de potencia diferente. cada sistema de puntos particular puede ser considerado como representante de la clase a la cual pertenece. Aquí se presenta en primera línea la clase de los sistemas de puntos que tienen la misma potencia que la sucesión natural de los números: $1, 2, 3, \dots, \nu, \dots$ y que se puede, por consiguiente, representar bajo la forma de una sucesión simplemente infinita, cuyo término general depende de ν.

A esta *primera* clase pertenecen por ejemplo todos los sistemas de puntos del primer género; pero muchos sistemas de puntos del segundo género forman también parte de esta clase, por ejemplo: 1º el sistema de puntos compuesto por todos los puntos de un intervalo que tienen por abscisas números racionales (cf. Journal del Sr. Borchardt t. 84, p. 250); 2º el sistema de puntos compuesto por todos los puntos de un intervalo que tienen por abscisas números algebraicos (cf. Journal del Sr. Borchardt t. 77, p. 258).

Después de eso, se nos presenta una *segunda* clase de sistemas lineales de puntos; esta clase está *representada* por el sistema de los puntos pertenecientes a un *intervalo continuo*, por ejemplo por el sistema de todos los puntos cuyas abscisas son ≥ 0 y ≤ 1. A esta clase pertenecen por ejemplo:

1º Todo intervalo continuo $(\alpha \dots \beta)$.

2º Todo sistema de puntos compuesto por varios intervalos separados continuos $(\alpha \dots \beta)$, $(\alpha' \dots \beta')$, $(\alpha'' \dots \beta'')$, ..., en número finito o infinito.

3º Todo sistema de puntos obtenido suprimiendo en un intervalo continuo un conjunto finito o infinito de puntos u_1, u_2,..., u_ν, ... de la *primera* clase (cf. Journal del Sr. Borchardt t. 84, p. 254).

No examinaremos aquí, si estas dos clases son las únicas que forman los conjuntos infinitos y lineales de puntos; pero queremos demostrar ahora que estas dos clases son distintas en realidad; para ello es necesario en primer lugar mostrar que no se puede hacer corresponder entre ellos punto a punto a dos representantes cualesquiera de estas dos clases.

Como representante de la segunda clase elijamos aquí el intervalo continuo $(0\ldots 1)$; si este conjunto perteneciera al mismo tiempo a la *primera* clase, entonces debería existir una sucesión simplemente infinita u_1, u_2,..., u_ν, ... compuesta por todos los números reales ≥ 0 y ≤ 1, de manera que todo número situado en este intervalo se presentaría en esta sucesión en un lugar determinado. Pero esta hipótesis entra en contradicción con un teorema muy general que demostramos rigurosamente en el Journal del Sr. Borchardt t. 77, p. 260, a saber:

"Dada una sucesión simplemente infinita

$$u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots$$

de números reales distintos que se suceden según una ley cualquiera, se puede indicar en cada intervalo propuesto $(\alpha\ldots\beta)$ un número v (y por consiguiente se puede indicar una infinidad) que no esté incluido entre los términos de esta sucesión."

Considerando al gran interés que se atribuye a este teorema, no sólo en presente teoría, sino también en muchas otras cuestiones de aritmética o de análisis, no parece inútil desarrollar aquí, modificándola y simplificándola, la demostración que dimos entonces.

Según eso, dada una sucesión

$$u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots$$

que designaremos por el símbolo (u_ν) y un intervalo $(\alpha\ldots\beta)$ donde $\alpha < \beta$; se trata de demostrar que, en este intervalo se puede encontrar un número real v, que no se presenta en (u_ν).

I. Observamos en primer lugar que si nuestro conjunto (u_ν) no está condensado en todo el intervalo $(\alpha\ldots\beta)$, entonces es necesario que en este intervalo $(\alpha\ldots\beta)$ haya otro $(\gamma\ldots\delta)$ del que ninguno de sus números pertenezca a (u_ν); luego se puede elegir como v un número cualquiera del intervalo $(\gamma\ldots\delta)$. Este caso no presenta pues ninguna dificultad y podemos pasar al otro caso más complicado.

II. Supongamos que el conjunto (u_ν) esté condensado en todo el intervalo $(\alpha\ldots\beta)$. En este caso todo intervalo $(\gamma\ldots\delta)$, por pequeño que sea, incluido en $(\alpha\ldots\beta)$ contiene números de nuestra sucesión (u_ν). Para mostrar que no obstante en el intervalo $(\alpha\ldots\beta)$ hay números v que no se hallan en (u_ν), hagamos las observaciones siguientes. Puesto que en nuestra sucesión:

$$u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots$$

ciertamente hay números que se hallan en el intervalo $(\alpha\ldots\beta)$, uno de estos números deberá tener el índice mínimo, digamos u_{χ_1}, y otro el índice inmediatamente superior: u_{χ_2}.

Designemos por α' al mínimo de los dos números u_{χ_1}, u_{χ_2}, y por β' al máximo.

(No pueden ser iguales entre ellos, porque hemos supuesto que nuestra sucesión está compuesta por números distintos.)

Se tiene entonces según la definición:

$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta,$$

luego: $\chi_1 < \chi_2$; y es necesario observar además que todos los números u_μ de nuestra sucesión para los cuales $\mu \leq \chi_2$ no están situados en el interior del intervalo $(\alpha' \dots \beta')$ como resulta inmediatamente de la determinación de los números u_{χ_1}, u_{χ_2}. Del mismo modo designemos por u_{χ_3}, u_{χ_4} los dos números de la sucesión (u_ν) afectados con los índices mínimos, que se hallan situados en los límites del intervalo $(\alpha' \dots \beta')$; sea α'' el mínimo de estos números y β'' el máximo.

Se tiene entonces que:

$$\alpha' < \alpha'' < \beta'' < \beta',$$
$$\chi_2 < \chi_3 < \chi_4,$$

y se reconoce que todos los números u_μ de nuestra sucesión para los cuales $\mu \leq \chi_4$ no están incluidos en el interior del intervalo $(\alpha'' \dots \beta'')$.

Cuando se ha llegado, siguiendo siempre la misma ley, a un intervalo $(\alpha^{(\nu-1)} \dots \beta^{(\nu-1)})$, el intervalo siguiente se obtiene de este último, considerando los dos primeros números de nuestra sucesión u_μ (i.e., aquellos que tienen los índices mínimos) que se hallan en el intervalo $(\alpha^{(\nu-1)} \dots \beta^{(\nu-1)})$; sean $u_{\chi_{2\nu-1}}$, $u_{\chi_{2\nu}}$ estos dos números; se designará al mínimo de entre ellos por $\alpha^{(\nu)}$, y al máximo por $\beta^{(\nu)}$.

El intervalo $(\alpha^{(\nu)} \dots \beta^{(\nu)})$ está entonces incluido en todos los intervalos precedentes y tiene con nuestra sucesión u_μ esta relación particular de que todos los números u_μ para los cuales $\mu \leq \chi_{2\nu}$ no están ciertamente incluidos en este intervalo. Puesto que evidentemente:

$$\chi_1 < \chi_2 < \chi_3 < \dots < \chi_{2\nu-2} < \chi_{2\nu-1} < \chi_{2\nu} \dots$$

y estos números, en tanto que índices, son números enteros, se tiene:

$$\chi_{2\nu} \geq 2\nu$$

y por consiguiente que:

$$\nu < \chi_{2\nu};$$

podemos pues asegurar, y esto nos será suficiente para lo que debe seguir, que:

siendo ν un número entero arbitrario, la magnitud u_ν está fuera del intervalo $(\alpha^{(\nu)} \dots \beta^{(\nu)})$.

Puesto que los números $\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(\nu)}, \dots$ aumentan constantemente en magnitud y están no obstante contenidos en el intervalo $(\alpha \dots \beta)$, tienen, según un teorema fundamental bien conocido de la teoría de las magnitudes, un límite que designaremos por A, de modo que:

$$A = \lim \alpha^{(\nu)} \quad \text{para } \nu = \infty.$$

La misma cosa es verdadera para los números β', β'', β''', $\ldots$, $\beta^{(\nu)}$, $\ldots$ que disminuyen constantemente permaneciendo todos incluidos en el intervalo $(\alpha \ldots \beta)$; designaremos su límite por B, de modo que:

$$B = \text{lím}\, \beta^{(\nu)} \quad \text{para } \nu = \infty.$$

Se tiene evidentemente que:

$$\alpha^{(\nu)} < A \leq B < \beta^{(\nu)}.$$

Pero es fácil ver que el caso $A < B$ no puede presentarse aquí; en caso contrario puesto que todo número u_ν de nuestra sucesión estaría fuera del intervalo $(A \ldots B)$, puesto que u_ν está fuera del intervalo $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$, nuestra sucesión (u_ν) no estaría condensada en todo el intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, contrariamente a la suposición que hemos hecho.

No queda pues más que el caso en que $A = B$ y es evidente que ahora que el número: $v = A = B$ no ocurre en nuestra sucesión (u_ν).

Porque si este número fuera miembro de nuestra sucesión, sea el ν-ésimo, se tendría que: $v = u_\nu$.

Pero esta última ecuación no es posible para ningún valor de ν, porque v está incluido en el intervalo $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$, mientras que u_ν está fuera de este mismo intervalo.

Halle, Enero de 1879.

SOBRE LOS CONJUNTOS INFINITOS Y LINEALES DE PUNTOS

POR
G. CANTOR
Halle

Traducción y comentarios por J. Bares y J. Climent.

II.

(Extracto de los Anales matemáticos de Leipzig, vol. 17.)

Para facilitar, abreviándola, la exposición que va a seguir, permítaseme indicar en primer lugar un sistema de notaciones.

Expresaremos con la fórmula $P \equiv Q$ la identidad de dos sistemas de puntos P y Q. Si los dos sistemas P y Q no tienen ningún elemento común diremos que están *sin conexión*. Si un sistema P está compuesto por la reunión de varios sistemas P_1, P_2, P_3, ..., en número finito o infinito, no teniendo dos a dos ninguna conexión, entonces escribiremos:

$$P \equiv (P_1, P_2, P_3, \ldots).$$

Si todos los puntos de un sistema P pertenecen a otro sistema Q, entonces diremos que P está *contenido* en Q o también que P es un divisor de Q, Q un múltiplo de P. Sean P_1, P_2, P_3, ... sistemas de puntos cualesquiera en número finito o infinito; estos sistemas tienen un mínimo común múltiplo que designaremos por $\mathfrak{M}(P_1, P_2, P_3, \ldots)$; este mínimo común múltiplo es el sistema compuesto por todos los puntos distintos de P_2, P_3, ... y no teniendo por otra parte otros puntos como elementos; estos sistemas tienen igualmente un máximo común divisor que designamos por $\mathfrak{D}(P_1, P_2, P_3, \ldots)$ y que es el sistema de los puntos comunes a todos los P_1, P_2, P_3, ... Por ejemplo, siendo $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ... los derivados sucesivos de un sistema de puntos P (v. Art. **I**), podemos decir que $P^{(2)}$ es divisor de $P^{(1)}$, $P^{(3)}$ divisor de $P^{(2)}$ así como de $P^{(1)}$, y en general $P^{(\nu)}$ divisor de $P^{(\nu-1)}$, $P^{(\nu-2)}$, ..., $P^{(1)}$; por el contrario $P^{(1)}$ en general no es divisor de P; pero si P mismo es el derivado de un sistema Q, entonces $P^{(1)}$ será divisor de P.

Además, es útil disponer de un signo que exprese la ausencia de puntos; elegimos para ello la letra 0; de este modo $P \equiv 0$ significa que el sistema P no contiene ni un sólo punto, y que de consiguiente, rigurosamente hablando, este no es un verdadero sistema. Para dar aquí un ejemplo, un sistema de puntos del primer género y de n-sima especie está caracterizado por $P^{(n+1)} \equiv 0$, por el contrario $P^{(n)}$ es diferente de 0.

Dos sistemas están en conexión por su máximo común divisor, y si este último es $\equiv 0$, entonces están sin conexión.

Si dos sistemas de puntos P y Q tienen la misma potencia y pertenecen por consiguiente a una misma clase (Art. **I**), entonces los llamamos equivalentes y expresamos esta relación por la fórmula:

$$P \sim Q.$$

Si se tiene: $P \sim Q$; $Q \sim R$, se tendrá siempre también $P \sim R$.

Sean a continuación P_1, P_2, P_3, ... una sucesión de sistemas, que tomados dos a dos no tienen ninguna conexión entre ellos, $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ otra sucesión en las mismas condiciones; sea también: $P_1 \sim Q_1$, $P_2 \sim Q_2$, $P_3 \sim Q_3$, ..., entonces se tendrá:

$$(P_1, P_2, P_3, \ldots) \sim (Q_1, Q_2, Q_3, \ldots).$$

Los sistemas de puntos del primer género, como acabamos de ver, pueden ser caracterizados de una manera completa por la noción del sistema derivado, tal como ha sido desarrollada hasta aquí; para los del segundo género esta noción no es suficiente, y es necesario dar aquí una extensión que se presenta como de sí misma cuando se profundiza la cuestión.

Observemos que en la sucesión de los derivados $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ... de un sistema P, cada término es divisor de los precedentes, y que por consiguiente cada nuevo derivado $P^{(\nu)}$ se extrae del precedente $P^{\nu-1)}$ por la eliminación de ciertos puntos, sin que se hallen nuevos puntos.

Si P es del segundo género, entonces $P^{(1)}$ se compondrá de dos sistemas de puntos Q y R esencialmente distintos, de modo que: $P \equiv (Q, R)$; uno de ellos, Q, se compone de los puntos de $P^{(1)}$ que desaparecen en la sucesión $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ... si se avanza lo suficiente en ella; el otro R comprende los puntos que son conservados en todos los términos de la sucesión $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ...; R está pues definido por la fórmula:

$$R \equiv \mathfrak{D}(P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, \ldots).$$

Pero también tenemos evidentemente:

$$R \equiv \mathfrak{D}(P^{(2)}, P^{(3)}, P^{(4)}, \ldots)$$

y en general:

$$R \equiv \mathfrak{D}(P^{(n_1)}, P^{(n_2)}, P^{(n_3)}, \ldots),$$

donde n_1, n_2, n_3, ... es una sucesión cualquiera de números enteros positivos que crecen al infinito.

Designemos ahora por el signo $P^{(\omega)}$ el sistema de puntos R obtenido de este modo con la ayuda del sistema P, y llamémoslo el sistema derivado de P de *orden* ω.

Designemos por $P^{(\omega+1)}$ el primer derivado de $P^{(\omega)}$, por $P^{(\omega+n)}$ el n-simo derivado de $P^{(\omega)}$; $P^{(\omega)}$ tendrá también un sistema derivado de orden ω generalmente distinto de 0, y que llamaremos $P^{(2\omega)}$. Continuando estas operaciones, se llega a derivados que designaremos consecuentemente por: $P^{(n_0\omega+n_1)}$, donde n_0 y n_1 son números enteros positivos: Pero podemos ir más lejos y formar el sistema:

$$\mathfrak{D}(P^{(\omega)}, P^{(2\omega)}, P^{(3\omega)}, \ldots)$$

que será designado por $P^{(\omega^2)}$.

Repitiendo ahora la misma operación y combinándola con las precedentes, se llega a una noción más general, la del sistema derivado:

$$P^{(n_0\omega^2+n_1\omega+n_2)},$$

y prosiguiendo con este procedimiento se llega a :

$$P^{(n_0\omega^\nu+n_1\omega^{\nu-1}+\ldots+n_\nu)},$$

donde n_0, n_1,..., n_ν son números enteros positivos. Continuando esta generalización se es llevado a considerar ν como variable y a considerar el sistema:

$$P^{(\omega^\omega)} \equiv \mathfrak{D}(P^{(\omega)}, P^{(\omega^2)}, P^{(\omega^3)}, \ldots).$$

Se obtiene sucesivamente, continuando del mismo modo, la noción de sistemas derivados designados por:

$$P^{(n\omega^\omega)}, P^{(\omega^{\omega+1})}, P^{(\omega^{\omega+n})}, P^{(\omega^{n\omega})}, P^{(\omega^{\omega^n})}, P^{(\omega^{\omega^\omega})} \text{ etc.}$$

tenemos de este modo una sucesión infinita de sistemas, que se deducen los unos de los otros según una ley necesaria e independientemente de toda concepción arbitraria.

Se tiene, para los sistemas de puntos del primer género, como resulta de su misma definición:

$$P^{(\omega)} \equiv 0;$$

es de notar que se puede demostrar también la recíproca: todo sistema de puntos para el que esta ecuación tenga lugar, es del primer género; los sistemas del primer género, están por consiguiente *completamente caracterizados* por esta ecuación.

Es fácil imaginar el ejemplo de un sistema de puntos del segundo género, para el cual $P^{(\omega)}$ está compuesto por un punto dado p. A este fin, consideremos intervalos que se suceden, que se limitan mutuamente, y convergen al mismo tiempo hacia el punto p haciéndose infinitamente pequeños; tomemos en cada uno de estos intervalos un sistema de puntos del primer género, cuyo orden crezca más allá de todo límite, cuando el intervalo correspondiente se aproxima a p. La reunión de todos estos sistemas proporciona el ejemplo en cuestión. Este ejemplo resuelve al mismo tiempo la cuestión, establecida en el Art. **I**, de saber si, a un sistema de puntos del segundo género, debe siempre pertenecer un intervalo en toda la extensión del cual esté condensado; ahora bien vemos, por el ejemplo indicado que esto no tiene lugar necesariamente.

Se construyen con la misma facilidad sistemas de puntos del segundo género, para los cuales $P^{(\omega+n)}$ o $P^{(2\omega)}$ o con mayor generalidad:

$$P^{(n_0\omega^\nu + n_1\omega^{\nu-1} + \ldots + n_\nu)}$$

se componen de un punto p determinado de antemano.

Para todos los sistemas análogos, no existe ningún intervalo en toda la extensión del cual estén condensados; además todos estos sistemas pertenecen a la primera clase; desde este doble punto de vista se parecen a los sistemas de puntos del primer género.

Halle, Mayo de 1880.

SOBRE LOS CONJUNTOS INFINITOS Y LINEALES DE PUNTOS

POR
G. CANTOR
Halle

Traducción y comentarios por J. Bares y J. Climent.

III.

(Extracto de los Anales matemáticos de Leipzig, vol. 20.)

En los dos artículos precedentes nos hemos atenido rigurosamente al asunto indicado en nuestro título, y nos hemos ocupado exclusivamente de sistemas de puntos lineales, i.e., de conjuntos de puntos, dados según una cierta ley y perteneciendo a la línea recta continua indefinida. Me limité a este caso intencionadamente; en efecto, según los resultados indicados en mi trabajo: *Contribución a la teoría de los conjuntos*, (Journal de Borchardt t. 84, p. 242), se puede hacer corresponder, sin ambigüedad, elemento a elemento, conjuntos de dimensión dos, tres, $\ldots$, n a sistemas lineales de puntos; y se puede admitir a priori que la mayor parte de las propiedades y de las relaciones encontradas para los conjuntos lineales de puntos, pueden demostrarse también, con modificaciones fáciles de adivinar, para los sistemas de puntos contenidos en superficies o espacios continuos o en conjuntos continuos de dimensión n. Pero quisiera ahora exponer esta generalización de una manera más precisa; pues no sólo es ella interesante en sí misma y desde el punto de vista de las aplicaciones que de ella se pueden hacer en la teoría de funciones, sino que ella proporciona también nuevos puntos de vista para el estudio de los conjuntos lineales de puntos.

Para empezar por uno de estos puntos de vista, se pueden extender inmediatamente a los sistemas de puntos que se hallan en los conjuntos continuos de dimensión n, las nociones previamente dadas sobre los derivados de los diversos órdenes determinados no sólo por números enteros finitos, sino caracterizados en ciertos casos por símbolos infinitarios cuyo significado ha sido rigurosamente fijado. La noción de conjunto derivado se apoya también aquí sobre la de punto límite de un conjunto de puntos dado P; y este punto límite está definido por la condición de que, en un espacio tan pequeño como se quiera rodeando a este punto, hay puntos del sistema P diferentes del punto mismo; según esta definición el punto límite puede indiferentemente pertenecer o no pertenecer al sistema P. El Sr. Weierstrass ha sido el primero en enunciar de una manera general, y aplicar a la teoría de funciones, el teorema siguiente: todo sistema de puntos compuesto de un número infinito de puntos y situado en una porción finita y continua de un conjunto de dimensión n tiene al menos un punto límite.

El conjunto de todos los puntos límite de un sistema P forma un nuevo sistema de puntos P', generalmente distinto de P, y que llamo primer derivado de P. Se extraen de ahí las nociones de los derivados de orden más elevado reproduciendo esta misma operación un número finito o incluso infinito de veces. Con respecto a estos derivados sucesivos se presenta siempre el hecho fácil de explicar de que todo derivado, con la excepción del primero, está contenido en los conjuntos precedentes, incluido el primer derivado P'; mientras que el sistema dado P contiene en general puntos que no pertenecen a sus derivados. Se puede del mismo modo aplicar inmediatamente a los sistemas de varias dimensiones la noción de la *condensación en un intervalo*, que no hemos considerado en principio más que con respecto a los sistemas lineales de puntos. Dado un sistema de puntos P situado en un conjunto continuo G_n de dimensión n, diremos que este sistema está *condensado en toda la extensión* de un conjunto continuo parcial a contenido en G_n, si todo conjunto a' contenido en a y teniendo el mismo número de dimensiones que a contiene puntos del sistema P.

El primer derivado P' (y del mismo modo todos los siguientes) de un sistema de puntos P condensado en toda la extensión de un conjunto continuo a contiene al mismo conjunto continuo a junto con todos los puntos del límite del último; y recíprocamente se puede también tomar esta propiedad del sistema de puntos P como punto de partida para llegar a la definición de la condensación de este sistema en toda la extensión del conjunto a.

Del mismo modo la noción de *potencia*, que contiene en sí misma, como caso particular, la noción de número entero, el fundamento de la teoría de las magnitudes, y que se podría considerar en los conjuntos como el momento más general, esta noción, digo yo, está lejos de estar restringida a los sistemas de puntos lineales; más bien se la puede considerar como un atributo de todo conjunto bien definido, sea cual sea por lo demás la constitución de sus elementos.

Digo que un conjunto de elementos pertenecientes a una esfera abstracta cualquiera, está *bien definido* cuando, como consecuencia del principio lógico del tercero excluido, se le puede considerar determinado de tal manera que 1º siendo elegido un objeto cualquiera perteneciente a esta esfera abstracta, se pueda considerar como *intrínsecamente* determinado si pertenece o no al sistema en cuestión y que 2º estando dados dos objetos pertenecientes al conjunto se pueda considerar como *intrínsecamente* determinado si son iguales o no, a pesar de las diferencias que puedan presentarse en la manera como estén dados.

De hecho, no se podrán en general llevar a cabo de una manera segura y precisa las determinaciones en cuestión *con los métodos* o *los medios disponibles*; pero ahí no es ésa la cuestión; sólo se trata de la determinación intrínseca de la que es necesario extraer una determinación actual (extrínseca) perfeccionando los medios auxiliares, en los casos concretos donde eso sea necesario.

Para aclarar esto, recuerdo la definición del sistema de todos los números algebraicos; se puede, sin ninguna duda, concebir como estando determinado intrínsecamente si un número η elegido arbitrariamente pertenece o no a los números algebraicos; no obstante el problema que consiste en encontrar esta determinación con respecto a un número dado η, es a menudo, como se sabe, uno de los más difíciles; y es además por ejemplo una cuestión todavía no decidida, y del máximo interés, saber si el número π, que expresa la razón de la circunferencia con el diámetro, es un número algebraico, o, como es mucho más verosímil, un número trascendente. El mismo problema ha sido resuelto hace ocho años por el Sr. Ch. Hermite, para el número fundamental

e del sistema natural de logaritmos, en el notable trabajo: "Sur la fonction exponentielle", (Paris 1874); allí demuestra que el número e no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales enteros.

Si se tiene un conjunto geométrico, cuyos elementos pueden ser no sólo puntos, sino líneas, superficies o sólidos, y si este conjunto está *bien definido*, entonces la pregunta por su potencia se presenta otra vez inmediatamente, y esta potencia será o igual a una de las potencias que se hallan en los conjuntos de puntos o mayor que todas las potencias de ese género.

En lo que concierne a los sistemas de puntos incluidos en conjuntos continuos de dimensión n, he demostrado rigurosamente (Journal de Borchardt t. 84, p. 242) que sus potencias son las mismas que las de los conjuntos lineales de puntos; este hecho puede ser considerado como una simple consecuencia del teorema demostrado en esta revista, y según el cual se puede hacer corresponder elemento a elemento un conjunto continuo de dimensión n con un conjunto continuo de una dimensión y por consiguiente con un *continuum lineal* recto; la cuestión de las diversas potencias en los sistemas de puntos puede pues, sin pérdida de generalidad, plantearse solamente para los sistemas de puntos lineales, como señalé al final del trabajo acabado de citar.

He tomado prestada la palabra: *potencia*, de J. Steiner que la ha empleado en un sentido del todo especial, pero no obstante siempre análogo al mío, para expresar que dos figuras, si se las hace corresponder entre sí proyectivamente, están en una relación tal que a cada elemento de una corresponde un elemento de la otra, y uno solamente; en la noción absoluta de potencia, que se halla aquí, se mantiene, verdaderamente, la relación recíproca unívoca [biunívoca], pero no se hace ninguna restricción sobre la ley de la correspondencia, en particular en lo que concierne a la continuidad y la discontinuidad, de manera que se atribuye a dos sistemas la misma potencia cuando se puede según una ley cualquiera, establecer entre ellos una correspondencia recíproca unívoca [biunívoca], y no se les puede atribuir la misma potencia más que bajo esta condición; cuando los dos sistemas están *bien definidos*, se puede considerar como *intrínsecamente* determinada la cuestión de saber si tienen la misma potencia o no; pero la solución actual de esta cuestión en los casos concretos es con frecuencia uno de los problemas más difíciles.

No fue más que después de muchos ensayos infructuosos que pude lograr, hace ocho años, con la ayuda de un teorema demostrado en el Journal de Borchardt t. 77, p. 260, y en el Art. **I** del presente trabajo, demostrar que el *continuum lineal* no tiene la misma potencia que la sucesión natural de los números.

La teoría de los conjuntos así concebida (no considerando más que lo que es matemático y dejando de lado provisionalmente las otras esferas abstractas), incluye la aritmética, la teoría de funciones y la geometría; estas partes de la ciencia son de este modo llevadas gracias a la noción de potencia a una unidad común. Lo continuo y lo discontinuo son de este modo considerados desde el mismo punto de vista y se hayan llevados a una medida común.

La mínima potencia que se pueda encontrar en general en los sistemas infinitos, i.e., compuestos de un número infinito de elementos, es la potencia de la sucesión de los números enteros positivos racionales; he llamado a los conjuntos de esta clase sistemas que se pueden *contar* al infinito, o simplemente sistemas numerables; lo que los caracteriza, es que se les puede representar (de muchas maneras) bajo la forma de una sucesión regular simplemente infinita:

$$E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots,$$

de manera que cada elemento del sistema ocupa un lugar determinado de la sucesión y que la sucesión no contiene más miembros que los elementos del sistema.

Cada parte infinita de un sistema numerable forma un nuevo sistema que se puede numerar al infinito.

Dado un sistema finito o infinito pero numerable de sistemas (E), (E'), (E''), ..., de los que cada uno es respectivamente numerable, entonces el sistema producido por la reunión de todos los elementos de (E), (E'), (E''), ... poseerá de la misma propiedad.

Estas dos proposiciones simples y fáciles de demostrar sirven de base para el estudio de los sistemas numerables. También, se reconoce, como ya lo he hecho observar muchas veces, que todos los sistemas dados bajo la forma de una sucesión n-plemente infinita cuyo término general es $E_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n}$ (donde ν_1, ν_2, ..., ν_n pueden tomar, independientemente uno del otro, todos los valores numéricos positivos enteros) son sistemas, susceptibles de ser numerados, i.e., que se les puede representar bajo la forma de sucesiones simplemente infinitas; pero a esta clase pertenecen también sistemas, cuyo término general tiene la forma:

$$E_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_\mu},$$

donde μ puede también tomar todos los valores numéricos positivos enteros; el conjunto de todos los números algebraicos es un ejemplo particularmente notable de esta última especie de conjuntos (v. Journal de Borchardt t. 77, p. 258). La aritmética y el álgebra presentan una cantidad innumerable de ejemplos de esta propiedad; no obstante la geometría no las ofrece en menor cantidad. El *teorema* siguiente que haya más de una aplicación elegante en la teoría de los números y en la de las funciones, podrá proporcionar la prueba.

Sea, en un espacio continuo G_n, de dimensión n, extendido al infinito por todas partes, un número infinito de conjuntos parciales (a), continuos, [8] de dimensión n, separados uno del otro y no tocándose más que a lo sumo en sus límites; digo que el sistema (a) de conjuntos parciales de esta especie puede siempre ser numerado.

Es necesario observar que aquí no se supone nada ni sobre la partición ni sobre la magnitud del espacio total de los conjuntos a; su extensión puede ser tan pequeña como se quiera, y podrán aproximarse indefinidamente a todo punto de G_n que no les pertenezca; el teorema no tiene ninguna excepción siempre sólo que cada conjunto parcial a (teniendo todos los a dimensión n

[8] Para cada figura continua se considera que forman parte de ella los puntos que le sirven de límite.

según la hipótesis) ocupe un volumen total determinado (tan pequeño como se quiera) y que los diversos a no coincidan más que a lo sumo en sus límites.

Se puede demostrar este teorema de la siguiente manera: Supongo que por medio de radios vectores recíprocos se transforma el espacio infinito G_n de dimensión n en una figura H_n de dimensión n incluida en el interior de un espacio infinito G_{n+1} de dimensión $n+1$, donde H_n está determinado de tal manera que sus puntos estén todos a una distancia 1 de un punto fijo del espacio G_{n+1}. (Para el caso $n = 1$ será un círculo de radio 1; para el caso $n = 2$, una esfera de radio 1). A cada conjunto parcial a de G_n de dimensión n le corresponde un conjunto parcial b de H_n de dimensión n, y de extensión determinada; si ahora se puede demostrar para el sistema (b) la propiedad de poder ser numerado, entonces se deducirá, debido a la correspondencia recíproca unívoca [biunívoca], la misma propiedad para el sistema (a).

El sistema (b) es susceptible de ser numerado porque el número de los conjuntos b, que según su extensión son mayores que un número γ arbitrario, es necesariamente finito; porque su suma es menor que el número:

$$\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})},$$

i.e., menor que la extensión de la figura H_n, en la cual los b están todos incluidos; se sigue de ahí que se pueden ordenar los conjuntos b, según la magnitud de su extensión, en una sucesión simplemente infinita, de manera que los menores sigan a los mayores y acaben por convertirse en infinitamente pequeños.

El caso $n = 1$ da lugar al siguiente teorema, que es esencial para el desarrollo de la teoría de los conjuntos lineales de puntos: Todo conjunto de *intervalos* $(\alpha \ldots \beta)$ distintos, que no coincidan más que a lo sumo en sus puntos extremos, y situados sobre una línea recta indefinida, es necesariamente un conjunto susceptible de ser numerado; la misma cosa es pues verdadera también para el sistema de los puntos extremos α y β, pero no lo es siempre para el derivado del último conjunto de puntos.

En el caso $n = 2$, este teorema muestra que se puede numerar todo conjunto de superficies parciales distintas, que no coincidan más que a lo sumo en sus límites, y situadas en un plano indefinido; este caso parece tener importancia en la teoría de las funciones de variable compleja. Observo al mismo tiempo que no es difícil extender este teorema a los conjuntos de superficies parciales distintas situadas sobre una superficie que recubre al plano un número finito o infinito de veces.

En cuanto a los conjuntos de puntos susceptibles de ser numerados, ellos presentan un fenómeno notable que quisiera hacer conocer en lo que sigue. Consideremos un sistema de puntos cualquiera (M) condensado en toda la extensión de un conjunto continuo G_n de dimensión n, y poseyendo la propiedad de poder ser numerado, de manera que se puedan representar los puntos pertenecientes a (M) bajo la forma de una sucesión:

$$M_1, M_2, \ldots, M_\nu, \ldots;$$

tomemos como ejemplo, en nuestro espacio tridimensional, el sistema de todos los puntos cuyas tres coordenadas, con respecto a un sistema de coordenadas ortogonal x, y, z, son números algebraicos. Imaginemos el sistema numerable de puntos (M) substraído del conjunto G_n y designemos por A el conjunto restante; entonces tenemos el notable teorema de que: para $n \geq 2$ el conjunto A no deja de ser continuo y conexo; en otros términos, que: dos puntos cualesquiera N y N' del conjunto A pueden siempre ser conectados mediante una línea continua que pertenece, con todos sus puntos, al conjunto A, de manera que ella no contiene ni un sólo punto del sistema (M).

Es suficiente reconocer la verdad de este teorema para el caso $n = 2$; su demostración se basa esencialmente en el teorema demostrado en el Art. I, de que: si se tiene una sucesión regular cualquiera de magnitudes reales:

$$u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots,$$

(entre las cuales puede haberlas que sean iguales, lo cual evidentemente no cambia en nada el teorema), se pueden encontrar en cada intervalo $(\alpha \ldots \beta)$ dado arbitrariamente, y tan pequeño como se quiera, magnitudes reales v, que no ocurren en esta sucesión.

Sea en efecto G'_2 una porción continua del plano indefinido; tomemos en G'_2 el sistema de puntos (M) supuesto numerable y condensado en toda la extensión de G'_2; sean en fin N y N' dos puntos cualesquiera de la porción continua G'_2, que no pertenezcan al sistema (M) y que conectamos en principio uno al otro por medio de una línea continua ℓ incluida en el interior de G'_2, sin preocuparnos por los puntos de (M); entonces es necesario mostrar ahora que la línea ℓ puede ser reemplazada por otra línea continua ℓ', que conecta también uno al otro los puntos N y N', que está también incluida en los límites de G'_2, pero que no contiene ni un sólo punto del sistema (M).

En general habrá sobre ℓ un número infinito de puntos del sistema (M), en todo caso ellos constituyen sobre esta línea una parte de (M), por consiguiente también un sistema susceptible de ser numerado.

Como consecuencia del teorema de la aritmética que acaba de ser mencionado, hay entonces en cada intervalo de la línea ℓ, por pequeño que sea, puntos que no pertenecen a (M). Consideremos un número finito N_1, N_2, $\ldots$, N_χ, de estos puntos de la línea ℓ, tales que los segmentos de rectas NN_1, N_1N_2, $\ldots$, $N_\chi N'$ estén también incluidos totalmente en el interior de G'_2: Entonces se puede siempre reemplazar estos segmentos por arcos de círculo con los mismos puntos extremos, incluidos también en los límites de G'_2, no incluyendo ni un sólo punto de (M) y formando, reuniéndolos, una línea continua ℓ' que tiene los caracteres descritos anteriormente.

Será suficiente demostrar esta proposición para uno de los segmentos, por ejemplo para el primero NN_1.

Los círculos que pasan por los puntos N y N_1 constituyen un grupo continuo, simplemente infinito; sus centros están todos sobre una recta determinada g; determinemos la posición de uno de estos centros por su distancia u a un punto fijo O de la recta g, estando esta distancia afectada por un signo; se puede entonces en todo caso hacer variar u en un intervalo $(\alpha \ldots \beta)$ tal que, para cada círculo correspondiente a uno de estos u, uno de los dos arcos del círculo que conectan N y N_1 se encuentre totalmente en el espacio G'_2.

Los centros de los círculos de nuestro grupo que pasan por los puntos:

$$M_1, M_2, \ldots, M_\nu, \ldots$$

del sistema (M), constituyen sobre la recta g un sistema de puntos susceptible de ser numerado:

$$P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots,$$

siendo los valores correspondientes de u:

$$u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots.$$

Si se toma entonces en el intervalo $(\alpha \ldots \beta)$ un número v que no sea igual a ningún u_ν (lo cual puede hacerse siempre en virtud del teorema citado), entonces se obtiene, haciendo $u = v$, un círculo del grupo, sobre la circunferencia del cual no ocurre ni un sólo punto del sistema (M) y que, debido a que $\alpha < v < \beta$, nos presenta un arco de círculo que conecta los puntos N y N_1, con las condiciones exigidas.

Queda pues demostrado que, dados dos puntos cualesquiera N y N' del conjunto A', que queda del conjunto G_2' una vez se ha substraído un sistema de puntos (M) condensado en toda su extensión y susceptible de ser numerado, se pueden conectar estos dos puntos mediante una curva continua ℓ' compuesta por un número finito de arcos de círculo, y perteneciendo con todos sus puntos al conjunto A', i.e., no conteniendo ni un sólo punto del sistema (M).

Por otra parte se podrían también, por el mismo medio, conectar los puntos N y N' mediante una línea continua conforme a una ley analítica única, e incluida totalmente en el conjunto A'.

A estos teoremas se unen consideraciones sobre la naturaleza del espacio real tridimensional que debe servir de base para la descripción y la explicación de los fenómenos que se presentan en el mundo real. Se sabe que este espacio, sea debido a las formas que allí se hallan, sea sobre todo debido a los movimientos que allí tienen lugar, es considerado como generalmente continuo. Según los trabajos publicados al mismo tiempo, pero independientemente uno del otro, de Dedekind (V. el opúsculo: La continuidad y los números irracionales, R. Dedekind, Brunswick, 1872) y del autor, esta última suposición consiste sólo en que todo punto, cuyas coordenadas x, y, z con respecto a un sistema de coordenadas rectangulares están dadas por números reales determinados cualesquiera, racionales o irracionales, es considerado como perteneciente realmente al espacio; no hay en ello ninguna necesidad intrínseca y no hay que ver en ello más que una construcción arbitraria, aunque legítima. La hipótesis de la continuidad del espacio no es pues otra cosa que la suposición, arbitraria en sí misma, de la correspondencia completa [exhaustiva], recíproca y unívoca [biunívoca] entre el continuo puramente aritmético tridimensional (x, y, z) y el espacio que sirve de base al mundo de los fenómenos.

Podemos fácilmente mediante el pensamiento hacer abstracción de los puntos aislados del espacio, incluso cuando están condensados en toda una extensión, y llegar a la noción de un espacio discontinuo tridimensional A, en las condiciones descritas anteriormente. En cuanto a la cuestión que surge entonces, de saber si se puede también imaginar un movimiento continuo en espacios de este modo discontinuos, es necesario, según lo que precede, responder afirmativamente, y de una manera absoluta; puesto que hemos mostrado que se pueden conectar dos puntos cualesquiera de una figura A

mediante un número infinito de líneas continuas perfectamente regulares. Se llega así a la notable consecuencia de que no se puede concluir nada, tan sólo del hecho del movimiento continuo, sobre la continuidad general del espacio tridimensional, tal como se la ha concebido para explicar los fenómenos del movimiento. Se puede pues intentar desarrollar una mecánica modificada, aplicable a los espacios de la misma naturaleza que A: gracias a los resultados de estas investigaciones, que se compararán con los hechos, se llegará eventualmente a obtener puntos de apoyo reales para la hipótesis de la continuidad general del espacio, tal como se le concibe en la práctica.

Berlin, 31 de Marzo de 1882.

Comentario. Aquí se considera la conexión por caminos.

SOBRE LOS CONJUNTOS INFINITOS Y LINEALES DE PUNTOS

POR
G. CANTOR
Halle

Traducción y comentarios por J. Bares y J. Climent.

IV.

(Traducción de una memoria publicada en los Anales matemáticos de Leipzig t. 21, p. 51.)

Vamos ahora a enunciar y a demostrar diversos teoremas nuevos que se ligan a los desarrollos dados con anterioridad, y que son a la vez interesantes en sí mismos y útiles para la teoría de las funciones. Nos serviremos de la siguiente notación.

Sean varios conjuntos de puntos P_1, P_2, P_3, ... que no tienen dos a dos ningún *punto común*, y P el sistema resultante de su reunión, elegiremos, en lugar de las fórmulas empleadas con anterioridad, (T. 17, p. 355), la fórmula más cómoda:

$$P \equiv P_1 + P_2 + P_3 + \dots .$$

Y por consiguiente, siendo Q un conjunto contenido en P y R el sistema que queda cuando se substrae Q de P, se podrá escribir:

$$R \equiv P - Q.$$

Un sistema de puntos Q, que nos representamos en un espacio de dimensión n, puede estar unas condiciones tales que ninguno de los puntos que le pertenecen sea al mismo tiempo un punto límite; daremos a este sistema, para el cual

$$\mathfrak{D}(Q, Q') \equiv 0,$$

el nombre de sistema de puntos *aislado*. Si se tiene un sistema de puntos cualquiera no aislado P, entonces se puede extraer un sistema aislado Q, substrayendo de P el sistema $\mathfrak{D}(P, P')$.

Se tiene pues:

$$Q \equiv P - \mathfrak{D}(P, P')$$

y por consiguiente:

$$P \equiv Q + \mathfrak{D}(P, P').$$

Todo conjunto de puntos puede pues estar compuesto por un conjunto aislado Q y por otro conjunto R, que es un divisor del conjunto derivado P'. Si observamos a continuación, lo cual ha sido ya señalado a menudo, que cada derivado superior de un sistema P está contenido en el derivado precedente, entonces vemos que:

$$P' - P'', P'' - P''', \dots, P^{\nu} - P^{\nu+1}, \dots$$

son todos sistemas aislados.

También se tienen las descomposiciones, muy importantes para lo que debe seguir:

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \dots + (P^{(n-1)} - P^{(n)}) + P^{(n)}$$

y

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \ldots + (P^{(\nu-1)} - P^{(\nu)}) + \text{al infinito} + P^{(\omega)}.$$

Ahora el siguiente teorema es verdadero para los sistemas de puntos aislados:

Teorema I. Todo conjunto de puntos aislado puede ser *numerado*, y pertenece por consiguiente a la primera clase.

Demostración. Sean Q un sistema de puntos aislado cualquiera incluido en un espacio de dimensión n, q un punto de este sistema, q', q'', q''', ... los otros puntos de Q.

Las distancias $\overline{qq'}$, $\overline{qq''}$, $\overline{qq'''}$, ... tienen un límite inferior, al que designo por ρ.

Sean del mismo modo ρ' el límite inferior de las distancias $\overline{q'q}$, $\overline{q'q''}$, $\overline{q'q'''}$, ..., ρ'' el límite inferior de las distancias $\overline{q''q}$, $\overline{q''q'}$, $\overline{q''q'''}$, ... etc.

Todas estas magnitudes ρ, ρ', ρ'', ρ''', ... son distintas de cero, porque Q es un conjunto aislado.

Tracemos, con q como centro, la figura de dimensión $(n-1)$, cuyos puntos están a la distancia $\rho/2$ de q; esta figura delimita a una esfera completa de dimensión n, que designamos por K. Formemos del mismo modo una esfera completa K' que tenga por centro al punto q' y por radio $\rho'/2$, etc.

Ahora es esencial observar que dos cualesquiera de estas esferas completas, por ejemplo K y K' pueden a lo sumo ser tangentes entre sí, y en caso contrario son totalmente externas una de la otra.

Esto se deduce de que, según la definición de las magnitudes ρ y ρ', ellas son menores o iguales que $\overline{qq'}$, y que por consiguiente los radios $\rho/2$ y $\rho'/2$ de las dos esferas K y K' no son mayores que la mitad de la línea de los centros $\overline{qq'}$.

Por consiguiente las esferas completas K, K',... constituyen un conjunto de porciones, externas entre sí y de dimensión n, del espacio de dimensión n que hemos tomado como base; pero un conjunto de esta especie puede siempre ser numerado, como se demostró en el t. 20, p. 117. Por consiguiente los centros q, q', q'', ... constituyen también un sistema susceptible de ser numerado, i.e., que Q puede ser numerado.

Podemos ahora enunciar los siguientes teoremas.

Teorema II. Si el derivado P' de un conjunto de puntos P puede ser numerado, entonces P posee también la misma propiedad.

Demostración. Designemos por R el máximo común divisor de P y P', de manera que:

$$R \equiv \mathfrak{D}(P, P')$$

y pongamos:

$$P - R \equiv Q.$$

Q es entonces, como hemos visto más arriba, un conjunto aislado, y por consiguiente susceptible de ser numerado según el teorema I.

R posee la misma propiedad, como elemento constitutivo del sistema P', susceptible de ser numerado, según la hipótesis.

La reunión de dos sistemas susceptibles de ser numerados da siempre lugar a un nuevo sistema que se puede igualmente numerar; por consiguiente $P \equiv Q + R$ es susceptible de ser numerado.

Teorema III. Todo conjunto del primer género y de n-sima especie puede ser numerado.

1ª Demostración. El teorema es evidente para los sistemas de puntos de especie 0 que son evidentemente sistemas de puntos aislados. Pero nosotros vamos a desarrollar completamente la inducción, suponiendo el teorema verdadero para los sistemas de puntos de 0-ésima, de 1ª, de 2ª, ..., de $(n-1)$-ésima especie, y vamos a mostrar, con esta hipótesis, que es verdadero también para los sistemas de puntos de n-sima especie.

Sea P un sistema de puntos de la n-sima especie, entonces P' será de $(n-1)$-ésima especie; P' es pues susceptible de ser numerado, según la hipótesis, y por consiguiente P lo es también según el teorema II.

2ª Demostración. Siendo P un sistema de puntos de n-sima especie, $P^{(n)}$ será de especie 0, y por consiguiente un sistema de puntos aislado.

Se tiene entonces:

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \ldots + (P^{(n-1)} - P^{(n)}) + P^{(n)}.$$

Todos los elementos de la parte derecha $(P' - P'')$, $(P'' - P''')$, ..., $(P^{(n-1)} - P^{(n)})$ y $P^{(n)}$ son conjuntos aislados, por consiguiente todos son susceptibles de ser numerados según el teorema I; el sistema P' formado por su reunión, es pues susceptible de ser numerado y, según el teorema II, P lo será también.

Teorema IV. Todo sistema de puntos del segundo género, para el cual $P^{(\omega)}$ es susceptible de ser numerado, posee también la misma propiedad.

La demostración de este teorema resulta de la descomposición siguiente:

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \ldots + (P^{(\nu-1)} - P^{(\nu)}) + \text{al infinito} + P^{(\omega)}.$$

En efecto, como todos los elementos de la derecha son susceptibles de ser numerados y el conjunto de estos elementos es de la primera potencia, se saca de ahí para P' y según el teorema II para P, la propiedad de poder ser numerado.

Si se designa por α uno cualquiera de los símbolos de infinito introducidos en el t. 17 p. 357, se tiene el teorema más general:

Teorema V. Todo sistema de puntos P del segundo género para el cual $P^{(\alpha)}$ es susceptible de ser numerado, posee la misma propiedad.

Este teorema se demuestra, con la ayuda de la inducción completa, como los teoremas III y IV.

Se pueden también formular los últimos teoremas de la siguiente manera:

Siendo P un sistema de puntos no susceptible de ser numerado, $P^{(\alpha)}$ tampoco lo será, sea α un número entero finito, o uno de los símbolos de infinito.

En sus trabajos sobre ciertas generalizaciones de teoremas del cálculo integral, los Srs. Du Bois-Reymond y Harnack emplean sistemas de puntos lineales que se pueden incluir en un número finito de intervalos, de manera que la suma de todos los intervalos es menor que una magnitud arbitrariamente dada.

Para que un sistema de puntos lineal goce de esta propiedad, es necesario evidentemente que no esté condensado en toda la extensión de ningún intervalo, por pequeño que sea; no obstante esta última condición no parece que sea suficiente para que un sistema de puntos sea tal como acabamos de decir. En compensación podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema VI. Si un sistema de puntos lineal P contenido en un intervalo (a, b) está constituido de tal manera que su conjunto derivado P' es susceptible de ser numerado, entonces siempre se puede incluir a P en un número finito de intervalos, siendo la suma de estos intervalos tan pequeña como se quiera.

En la demostración que va a seguir nos serviremos de los teoremas auxiliares de aquí abajo, de los que el primero expresa una propiedad conocida de las funciones continuas, y los otros dos son el resultado de nuestras consideraciones precedentes.

Teorema auxiliar I. Una función continua $\varphi(x)$ dada en un intervalo (c, d) de la variable continua x, y teniendo en sus límites valores distintos $\varphi(c)$ y $\varphi(d)$, toma una vez al menos un valor y comprendido entre los límites $\varphi(c)$ y $\varphi(d)$.

Teorema auxiliar II. Un número infinito de intervalos, en una recta infinita, externos entre sí, y no coincidiendo más que a lo sumo en sus límites, es siempre susceptible de ser numerado.

Teorema auxiliar III. Si se tiene un conjunto de magnitudes, que es de la primera potencia:

$$u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots$$

entonces se puede, en todo intervalo propuesto, encontrar una magnitud v que no ocurra entre estas magnitudes.

Demostración del teorema VI. Tomemos, para simplificar, el intervalo (a, b), que incluye a P, de manera que $a = 0$, $b = 1$; se puede fácilmente, mediante una transformación, reconducir el caso general a este caso particular. Luego P se haya en el intervalo $(0, 1)$; la misma cosa es evidentemente verdadera para P' y para el sistema producido por la reunión de los puntos de P y P' y que designaremos por Q.

Se tiene:

$$Q \equiv \mathfrak{M}(P, P').$$

Designamos después por R el sistema de puntos incluidos en el intervalo $(0, 1)$ y que está constituido por los puntos que quedan en este intervalo después de extraer del mismo el sistema Q, de manera que:

$$(0, 1) \equiv Q + R. \tag{1}$$

De la hipótesis de que el sistema P' sea susceptible de ser numerado se extraen en primer lugar las siguientes conclusiones:

1. P es también susceptible de ser numerado, según el teorema II, por consiguiente también lo es Q.

2. P y por consiguiente P' no están condensados en toda la extensión de ningún intervalo; porque si P estuviera condensado en toda la extensión del intervalo (i, k), entonces todos los puntos de este intervalo pertenecerían a P' y, según el teorema auxiliar III, P' no podría ser numerado. Los valores de las coordenadas, que corresponden a los puntos del sistema Q, susceptible de ser numerado, pueden ser llamados

$$u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots. \tag{2}$$

Si ahora consideramos el sistema R, se puede mostrar que los valores de las coordenadas correspondientes a estos puntos están situados respectivamente en el interior de una sucesión infinita de intervalos:

$$(c_1, d_1), (c_2, d_2), \ldots, (c_\nu, d_\nu) \ldots \tag{3}$$

externos entre sí e incluidos en el intervalo $(0, 1)$. Puesto que sólo los valores internos de estos intervalos corresponden a puntos del sistema R, resulta de la relación (1) que los límites c_ν y d_ν de estos intervalos corresponden a puntos del sistema Q, y por consiguiente se presentan en la sucesión (2).

En efecto, sea r un punto de R, entonces los puntos de Q no pueden aproximarse al infinito a r, porque en caso contrario r sería un punto límite de P y por consiguiente pertenecería a Q. Debe ahora haber a la izquierda de r un punto c y a la derecha de r un punto d, tales que ningún punto de Q se halle en el intervalo (c, d) y que por el contrario fuera de este intervalo halla puntos de Q tan próximos como se quiera de c y de d, en el caso de que c y d no sean puntos aislados de Q; pero como cada punto límite de Q pertenece a Q, c y d, incluso en el último caso, pertenecen también a Q. Los intervalos en número infinito (c, d), así obtenidos, son todos, evidentemente, externos entre sí y constituyen por consiguiente, según el teorema auxiliar II, un sistema susceptible de ser numerado (3), que es lo que se quería demostrar.

Puesto que suponemos que $c_\nu < d_\nu$, la magnitud del intervalo (c_ν, d_ν) es:

$$= d_\nu - c_\nu.$$

Llamamos σ a la suma de las magnitudes de todos estos intervalos, de manera que:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (d_\nu - c_\nu) = \sigma. \tag{4}$$

Se ve a priori que $\sigma \leq 1$, porque los intervalos son todos externos entre sí y están contenidos en el intervalo $(0, 1)$. Si pudiéramos demostrar que $\sigma = 1$, entonces nuestro teorema VI estaría demostrado, tal como uno puede convencerse mediante una reflexión simplicísima sobre el significado de los intervalos (c_ν, d_ν).

Toda nuestra demostración se reduce pues a demostrar que la hipótesis $\sigma < 1$ conduce a una contradicción.

Para ello definimos, para $0 \leq x \leq 1$, una función $f(x)$ como sigue: Sumemos las magnitudes de todos los intervalos (c_ν, d_ν), tanto como estos intervalos caigan en los límites del intervalo $(0, x)$ y pongamos esta suma $= f(x)$. (Se conviene en no tomar en esta suma, de un intervalo (c_ν, d_ν) que se encuentre, parcialmente, fuera de $(0, x)$, más que la parte correspondiente que cae en los límites de $(0, x)$.)

Se tiene evidentemente:

$$f(1) = \sigma.$$

Si además se establece que $f(0) = 0$, entonces se sigue fácilmente que $f(x)$ es una función continua de x para $0 \leq x \leq 1$.

En efecto, de la definición de $f(x)$ resulta inmediatamente que, siendo x y $x + h$ dos valores distintos del intervalo $(0, 1)$, se tiene para los valores positivos de h que:

$$0 \leq f(x + h) - f(x) \leq h.$$

De ahí se concluye la continuidad de $f(x)$.

Se ve entonces también, volviendo a la definición de $f(x)$, que, si x y $x+h$ son dos valores distintos de un sólo y mismo intervalo parcial (c_ν, d_ν), entonces se tiene que:

$$f(x+h) - f(x) = h,$$

por consiguiente también

$$(x+h) - f(x+h) = x - f(x).$$

Luego si se introduce la función

$$\varphi(x) = x - f(x),$$

$\varphi(x)$ será también una función continua de x, y cuando x crezca de 0 a 1, variará sin disminuir de 0, hasta $1-\sigma$. Este cambio se hace de tal manera que, en los límites de uno de los intervalos parciales (c_ν, d_ν), la función continua $\varphi(x)$ conserva un valor constante.

De ahí resulta para la función $\varphi(x)$ la siguiente propiedad: todos los valores que toma están agotados en la sucesión de valores:

$$\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_\nu), \ldots. \tag{5}$$

En efecto, x puede ser igual a uno de los valores u_ν, y en este caso tenemos que:

$$\varphi(x) = \varphi(u_\nu).$$

O bien x es un valor incluido en uno de los intervalos (c_ν, d_ν); en este caso, debido a la constancia de $\varphi(x)$ en uno de esos intervalos, tenemos que:

$$\varphi(x) = \varphi(c_\nu) = \varphi(d_\nu).$$

pero ahora, como hemos visto más arriba, los valores c_ν y d_ν pertenecen igualmente a la sucesión (2), se tiene por ejemplo:

$$c_\nu = u_\lambda.$$

Por consiguiente se tiene también en este caso:

$$\varphi(x) = \varphi(u_\lambda).$$

La sucesión (5) incluye pues todos los valores que puede tomar en general $\varphi(x)$.

El sistema de valores, que puede tomar la función continua v, es por consiguiente susceptible de ser numerado.

Ahora, si $\sigma < 1$, y por consiguiente $1-\sigma$ fuera distinto de cero, entonces la función continua $\varphi(x)$, según el teorema auxiliar I tomaría al menos una vez cada valor y entre 0 y $1-\sigma$. Por consiguiente, en la sucesión (5) que agota todos los valores tomados por la función $\varphi(x)$, como se acaba de demostrar, se encontrarían todos los números posibles del intervalo $(0, 1-\sigma)$, lo cual entra en contradicción con el teorema auxiliar III. No queda pues más que la hipótesis $\sigma = 1$, que es lo que se quería demostrar.

Hartzbourg, 1º de Septiembre de 1882.

SOBRE DIVERSOS TEOREMAS DE LA TEORÍA DE LOS CONJUNTOS DE PUNTOS SITUADOS EN UN ESPACIO CONTINUO DE DIMENSIÓN n.

Primera Comunicación. Extracto de una carta dirigida al editor.

[Acta Mathematatica Bd. 2, S. 409- 414 (1883).]

POR

G. CANTOR

Halle

Traducción y comentarios por J. Bares y J. Climent.

...Habiéndome propuesto comunicarle las demostraciones de varios teoremas que he hallado en la teoría de conjuntos, le ruego que me permita comenzar con los tres siguientes, A, B y C que mencioné en la memoria: "*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Leipzig, 1883".

Puesto que tendré que citar este trabajo en diversos pasajes, me tomaré la libertad de designarlo con las letras "*Gr*".

Teorema A. "Un conjunto de puntos P (situado en un espacio continuo G_n de dimensión n) que tenga la *primera potencia* no puede ser nunca un conjunto *perfecto*."

Teorema B. "Perteneciendo el número α a la *primera* o a la *segunda* clase de números, sea P un conjunto de puntos tal que su *conjunto derivado* $P^{(\alpha)}$ de orden α se desvanezca, entonces el *primer conjunto derivado* $P^{(1)}$ de P y el *conjunto* P mismo son de la *primera* potencia, salvo los casos en los que los conjuntos P o $P^{(1)}$ son finitos."

Teorema C. "Siendo P un conjunto de puntos tal que su primer conjunto *derivado* $P^{(1)}$ es de la primera potencia, entonces existen números α de la *primera* o de la *segunda* clase de números tales que se tiene idénticamente

$$P^{(\alpha)} \equiv 0,$$

y de todos estos números α hay uno que es el mínimo."

Demostración del teorema A.

Según "*Gr.* §10" llamo *conjunto perfecto de puntos* a un conjunto S tal que su primer derivado $S^{(1)}$ coincide con S mismo, de manera que todo punto s perteneciente a S es un punto límite de S y que también todo punto límite s' de S sea un punto perteneciente a S.

Sean ahora

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\nu, \ldots$$

los puntos que constituyen el conjunto P; podemos imaginarlos dados bajo esta forma de sucesión (p_ν) puesto que P tiene según la hipótesis, admitida en nuestro teorema, la *primera potencia*.

Admitimos que cada punto p_ν de P es un *punto límite* de P y queremos obtener *puntos límite* de P que no pertenezcan como *puntos* a P; de ahí se seguirá que P no puede ser un conjunto perfecto, porque si fuera así, no solamente cada *punto* de P debería ser un *punto límite* de P, sino que también cada *punto límite* de P sería necesariamente un *punto perteneciente* a P.

Tomemos a p_1 como centro de un conjunto continuo de dimensión $n-1$, lugar de los puntos de G_n que distan $\rho_1 = 1$ de p_1; llamaremos a un tal conjunto una esfera de radio ρ_1 y la designaremos aquí por K_1.

De todos los puntos de la sucesión (p_ν) que siguen a p_1 sea p_{i_2} el primero que cae en el *interior* de la esfera K_1 (y de ellos en el interior de K_1 hay un número infinito, puesto que el centro p_1 es, tal como hemos admitido, un *punto límite* de P); llamemos σ_1 a la distancia entre los puntos p_1 y p_{i_2} y tomemos a p_{i_2} como centro de una *segunda* esfera K_2, cuyo radio ρ_2 está determinado por la condición de ser la mínima de las dos cantidades

$$\frac{1}{2}\sigma_1,\ \frac{1}{2}(\rho_1 - \sigma_1).$$

La esfera K_2 está entonces totalmente situada en el interior de K_1 y los puntos

$$p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_{i_2-1}$$

de la sucesión (p_ν) están todos situados fuera de la esfera K_2; el radio ρ_2 de la última es, como se ve, menor que $1/2$.

Del mismo modo sea p_{i_3} el primer punto de la sucesión (p_ν) de todos aquéllos que siguen a p_{i_2} y que caen en el interior de la esfera K_2; de ellos hay un número infinito, puesto que se ha supuesto que p_{i_3} es un punto límite de P; designamos la distancia entre los puntos p_{i_2} y p_{i_3} por σ_2 y tomamos a p_{i_3} como centro de una tercera esfera K_3, cuyo radio ρ_3 está determinado por la condición de ser la mínima de las dos cantidades

$$\frac{1}{2}\sigma_2,\ \frac{1}{2}(\rho_2 - \sigma_2);$$

la esfera K_3 está entonces totalmente situada en el interior de K_2 y los puntos

$$p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_{i_3-1}$$

de la sucesión (p_ν) están todos situados fuera de la esfera K_3; el radio ρ_3 es evidentemente menor que $1/4$.

Se ve pues aquí una *ley* según la cual se puede formar una sucesión infinita de esferas

$$K_1,\, K_2,\, K_3,\, \ldots,\, K_\nu,\, \ldots$$

ligada a una sucesión determinada de números enteros i_ν crecientes junto con sus índices de manera que se tiene

$$1 < i_1 < i_2 < \ldots.$$

Cada esfera K_ν está situada totalmente en el interior de la precedente $K_{\nu-1}$.

El centro p_{i_ν} de la esfera K_ν está definido por la condición de que es el primer punto de la sucesión (p_ν) de todos aquéllos que siguen a $p_{i_{\nu-1}}$ y que están situados en el interior de la esfera $K_{\nu-1}$; el radio ρ_ν de K_ν está definido por la condición de ser el mínimo de los dos números

$$\frac{1}{2}\sigma_{\nu-1},\ \frac{1}{2}(\rho_{\nu-1} - \sigma_{\nu-1}),$$

designando por $\sigma_{\nu-1}$ la distancia entre los puntos $p_{i_{\nu-1}}$ y p_{i_ν}.

Los puntos p_1, p_2,..., $p_{i_\nu-1}$ están todos situados fuera de la esfera K_ν; pero hay un número infinito de puntos de la sucesión (p_ν) que están situados en el interior de K_ν, puesto que el centro p_{i_ν} es, tal como lo hemos admitido, un punto límite de P. Como se tiene evidentemente que

$$\rho_\nu \leq \frac{1}{2^{\nu-1}},$$

los radios de las esferas K_ν se hacen infinitamente pequeños para $\nu = \infty$, y puesto que las esferas están K_ν están encajadas de tal manera que K_ν está situada en el interior de $K_{\nu-1}$, ésta en el interior de $K_{\nu-2}$ etc., se obtiene, según un conocido principio, la existencia de un punto t al que se aproximan indefinidamente los centros p_{i_ν} de manera que se tiene que

$$\lim_{\nu=\infty} p_{i_\nu} = t;$$

por consiguiente el punto t es un *punto límite* de P. Pero además se tiene la seguridad de que t no es un *punto* perteneciente a P; porque si lo fuera, se tendría que $t = p_n$ para un cierto valor del índice n, ecuación *imposible*, puesto que t está situado en el interior de la esfera K_ν, por grande que sea ν, cuando por el contrario se puede tomar ν lo suficientemente grande, a saber $\nu > n$, de manera que p_n caiga fuera de la esfera K_ν.

Por consiguiente hemos demostrado que P no puede ser un *conjunto perfecto.*

Demostración del teorema B.

Siendo α un número dado cualquiera de la *primera* o de la *segunda* clase de números, se tiene, sea cual sea el conjunto P, la siguiente identidad

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha'} (P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)}) + P^{(\alpha)} \tag{1}$$

en la cual α' recorre todos los números enteros positivos que son *inferiores* a α. La verdad de esta identidad (1) resulta fácilmente de la noción general de *conjunto derivado* $P^{(\alpha)}$ *de orden* α.

Cuando α es un número tal que existe otro α_{-1} que precede a α inmediatamente, entonces $P^{(\alpha)}$ está definido como siendo el *primer conjunto derivado* de $P^{(\alpha_{-1})}$; pero cuando α es un número tal que no tiene ninguno próximo que le preceda inmediatamente (como por ejemplo ω u ω^ω u $\omega^{\omega^\omega} + \omega^2$), entonces $P^{(\alpha)}$ está definido como siendo el máximo común divisor de todos los conjuntos derivados $P^{(\alpha')}$ cuyos órdenes α' son *inferiores* a α.

Según la hipótesis admitida en nuestro teorema, $P^{(\alpha)}$ se desvanece, luego se tiene aquí que

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha'} (P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)}).$$

El número de los valores de α' es o finito o infinito según que α pertenezca a la *primera* o a la *segunda* clase de números; pero en el último caso el conjunto de los valores de α' es de la *primera* potencia (Cf. la definición de la segunda clase de números en *Gr.* §11).

Cada término

$$(P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)})$$

de nuestra suma es un conjunto de puntos que pertenece a la categoría de aquéllos que llamo *conjuntos aislados* (ver Ann. Math. T. 21 pág. 51). Como demostré en el mismo lugar, un conjunto *infinito* y *aislado* es siempre de la *primera potencia*. Luego el término

$$(P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)})$$

de nuestra suma es o un conjunto finito, o de la *primera potencia*. De ahí se concluye fácilmente que $P^{(1)}$ es también de la *primera potencia*, luego también P es de la primera potencia, como se haya demostrado en el lugar acabado de citar.

Demostración del teorema C.

Designando por Ω el primer número de la *tercera* clase de números, se tiene, cualquiera que sea el conjunto P, la siguiente identidad:

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha} (P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)}) + P^{(\Omega)}, \tag{2}$$

donde α recorre todos los números enteros positivos de la *primera* y de la *segunda* clase de números.

El conjunto P es, según la hipótesis admitida en nuestro teorema, tal que su primer derivado $P^{(1)}$ tiene la *primera potencia*; luego también los derivados $P^{(\alpha)}$, que son todos divisores de $P^{(1)}$, tienen la misma potencia, en tanto que están constituidos por un número infinito de puntos.

Apoyándonos ahora en el teorema A, demostrado más arriba, concluimos que la diferencia

$$(P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)})$$

no puede anularse en tanto que $P^{(\alpha)}$ *no sea cero.*

Si por consiguiente todos los derivados $P^{(\alpha)}$ fueran *diferentes* de cero, entonces todos los términos $(P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)})$ de nuestra suma a la derecha de la ecuación (2) también lo serían y como el conjunto de estos *términos* es de la *segunda* potencia (Cf. *Gr.* §12), se seguiría con mayor motivo, que el conjunto de los puntos a la derecha de nuestra ecuación (2) sería de una potencia *no inferior* a la *segunda*; lo cual sería contrario a la hipótesis, según la cual el conjunto $P^{(1)}$ a la izquierda de la ecuación (2) se ha supuesto que es de la *primera* potencia. Luego los derivados $P^{(\alpha)}$ no pueden ser todos diferentes de cero, por consiguiente existen números α de la *primera* o de la *segunda* clase de números tales que se tiene que

$$P^{(\alpha)} \equiv 0.$$

De estos números α hay uno que es el mínimo, como es fácil verlo.

En la memoria "*Gr.*" pág. 31, también indiqué una proposición que se refiere al caso en que $P^{(1)}$ no es de la primera potencia, y que, bajo la forma en la que lo expresé, no es completamente exacto con tal generalidad. Como hallé entonces, existe sin duda, una única descomposición

$$P^{(1)} = R + S,$$

donde S es un conjunto perfecto, pero R es un conjunto de la *primera* potencia. Si yendo más allá de ello digo que R es un conjunto reducible, entonces esto no es correcto en su alcance general.

El Sr. Bendixson de Estocolmo que se ha ocupado con notable éxito del análisis de mi proposición, ha hallado que R es siempre tal que, para un cierto γ de la primera o de la segunda clase de números, se tiene la ecuación

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\gamma)}) = 0.$$

De las comunicaciones que el Sr. Bendixson ha tenido la amabilidad de hacerme resulta que él ha vuelto a hallar de una manera absolutamente independiente mis desarrollos de entonces concernientes a este asunto, y que los ha completado y rectificado en el sentido indicado. A petición mía, el Sr. Bendixson ha aceptado redactar sus investigaciones para ser publicadas a continuación de esta comunicación.

Comentario. Observemos que lo que quiere demostrar Cantor en el Teorema A es que: no es el caso que $P \subseteq P'$ o no es el caso que $P' \subseteq P$, y se decide por demostrar que: si $P \subseteq P'$, entonces no es el caso que $P' \subseteq P$, i.e., hay un punto de acumulación de P que no pertenece a P.

Es evidente que p_1 está situado fuera de la esfera K_2. Por otra parte, para ningún $j \in [2, i_2 - 1]$ puede ocurrir que p_j esté en el interior de K_2, ya que si así fuera p_{i_2} no sería el primero los puntos de la sucesión (p_ν) que siguen a p_1 y que caen en el interior de la esfera K_1.

Hay que comentar el principio de los intervalos cerrados encajados, que parece ser nunca demostró Cantor.

SOBRE LA POTENCIA DE LOS CONJUNTOS PERFECTOS DE PUNTOS.

Extracto de una carta dirigida al editor.

[Acta Mathematica Bd. 4, S. 381-392 (1884).]

POR

G. CANTOR

Halle

Traducción y comentarios por J. Bares y J. Climent.

...En cuanto a mi teorema que expresa, que todos los conjuntos *perfectos* de puntos tienen la misma potencia, a saber la potencia del *continuo*, pretendo demostrarlo, limitándome en primer lugar a los conjuntos perfectos lineales, como sigue. Sea S un conjunto perfecto de puntos cualquiera, *que no está condensado en la extensión de ningún intervalo*, por pequeño que sea; admitimos que S está contenido en el intervalo $(0\ldots 1)$ cuyos puntos extremos 0 y 1 pertenecen a S; es evidente que todos los otros casos, en los cuales el conjunto perfecto no está condensado en la extensión de ningún intervalo, pueden por proyección ser reducidos a éste.

Ahora bien, según mis consideraciones en Acta Mathematica T. 2 pág. 378, existe un número infinito de intervalos distintos, completamente separados entre sí, que nos representamos dispuestos según sus magnitudes, de manera que los intervalos menores vayan después de los mayores; los designamos, en este orden, por

$$(1) \qquad (a_1\ldots b_1),\ (a_2\ldots b_2),\ \ldots,\ (a_\nu\ldots b_\nu),\ \ldots;$$

con respecto al conjunto S son tales que en el interior de cada uno no cae ningún de S, mientras que sus puntos extremos a_ν y b_ν junto con los otros puntos límite del conjunto de puntos $\{a_\nu, b_\nu\}$ pertenecen a S y lo determinan; designamos por g uno cualquiera de estos otros puntos límite de $\{a_\nu, b_\nu\}$, y por $\{g\}$ su conjunto; entonces tenemos que

$$(2) \qquad S \equiv \{a_\nu\} + \{b_\nu\} + \{g\}.$$

Además, la sucesión de intervalos (1) es tal que el espacio entre dos de entre ellos $(a_\nu\ldots b_\nu)$ y $(a_\mu\ldots b_\mu)$ contiene siempre una infinidad de otros y además, siendo $(a_\rho\ldots b_\rho)$ uno cualquiera de estos intervalos, hay otros de la misma sucesión (1) que se aproximan infinitamente sea al punto a_ρ, sea al punto b_ρ; pues a_ρ y b_ρ, en tanto que pertenecientes como *puntos* al conjunto perfecto S, son también *puntos límite* del mismo.

Establecido eso, tomo un conjunto cualquiera de la primera potencia

$$(3) \qquad \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_\nu,\ \ldots,$$

conjunto de puntos distintos y todos situados en el intervalo $(0\ldots 1)$, *en toda la extensión del cual están condensados*; supongo solamente que los puntos extremos 0 y 1 no se hayan entre los φ_ν.

Para citar un ejemplo de un conjunto tal como el que necesitamos aquí, recuerdo la forma de sucesión en la que he puesto al conjunto de los números racionales ≥ 0 y ≤ 1 en Acta Mathematica T. 2 pág. 319 y donde para nuestro fin es necesario suprimir solamente los dos primeros términos, que allí son 0 y 1.

Pero sostengo a este respecto que la sucesión (3) sea dejada en toda su generalidad.

He aquí ahora lo que anticipo: *el conjunto de puntos* $\{\varphi_\nu\}$ *y el conjunto de intervalos* $\{(a_\nu \dots b_\nu)\}$ *pueden ser asociados biunívocamente entre sí de manera que, siendo* $(a_\nu \dots b_\nu)$ *y* $(a_\mu \dots b_\mu)$ *dos intervalos cualesquiera pertenecientes a la sucesión* (1)*, y siendo luego* φ_{k_ν} *y* φ_{k_μ} *los puntos correspondientes de la sucesión* (3)*, entonces se tiene siempre que el número* φ_{k_ν} *es menor o mayor que* φ_{k_μ} *según que en el segmento* $(0 \dots 1)$ *el intervalo* $(a_\nu \dots b_\nu)$ *esté situado antes que el intervalo* $(a_\mu \dots b_\mu)$ *o después de él* ([9]).

Una tal correspondencia de los dos conjuntos $\{\varphi_\nu\}$ y $\{(a_\nu \dots b_\nu)\}$ se puede hacer según la siguiente regla:

Asociamos al intervalo $(a_1 \dots b_1)$ el punto φ_1, al intervalo $(a_2 \dots b_2)$ el término de la sucesión (3) con el índice mínimo, lo designamos por φ_{k_2}, que tiene la misma relación con φ_1 en lo que respecta a ser mayor o menor, que el intervalo $(a_2 \dots b_2)$ con $(a_1 \dots b_1)$ en lo que respecta a su colocación en el segmento $(0 \dots 1)$; además, asociamos al intervalo $(a_3 \dots b_3)$ el término con el índice mínimo que tiene la misma relación con φ_1 y con φ_{k_2} en lo que respecta a ser mayor o menor, que el intervalo $(a_3 \dots b_3)$ con los intervalos $(a_1 \dots b_1)$ y $(a_2 \dots b_2)$ respectivamente en lo que respecta a su colocación en el segmento $(0 \dots 1)$.

En general, asociamos al intervalo $(a_\nu \dots b_\nu)$ el término de la sucesión (3) con el índice mínimo, lo llamaremos φ_{k_ν}, tal que tiene la misma relación con todos los puntos φ_1, $\varphi_{k_2}, \dots$, $\varphi_{k_{\nu-1}}$, de los que ya se ha dado cuenta, en lo que respecta a ser mayor o menor, que el intervalo $(a_\nu \dots b_\nu)$ con los intervalos correspondientes $(a_1 \dots b_1)$, $(a_2 \dots b_2)$, $\dots$, $(a_{\nu-1} \dots b_{\nu-1})$ en lo que respecta a su colocación en el segmento $(0 \dots 1)$.

Anticipo que según esta regla *los puntos* φ_1*,* φ_2*,* $\dots$*,* φ_ν*,*$\dots$*, de la sucesión* (3) *estarán todos asociados sucesivamente, aunque según un orden diferente del de la ley de la sucesión* (3)*, a intervalos distintos de la sucesión* (1); pues

---

Antes de pasar a considerar las nociones topológicas necesarias para lo que sigue, señalamos que según Pontryagin:

> Just as the theory of groups studies the algebraic operation of multiplication in its purest aspect, so abstract topology sets as its goal the investigation of the operation of passing to the limit, disregarding all other properties of the elements under consideration. If a group can be regarded as a generalization of the concept of real number, then a topological space should also be regarded as a generalization of the same real numbers. Only in the first case the operation of multiplication is generalized, while in the second it is the limiting operation, or, what is the same, the concept of limit point which is generalized.

Definición 1. Sea X un conjunto. Una *topología* sobre X es un subconjunto $\mathcal{T}$ de $\mathrm{Sub}(X)$, a cuyos elementos los llamamos *abiertos*, que cumple las siguientes condiciones:

1. Para cada $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{T}$, $\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \mathcal{T}$.

[9] No se trata pues aquí del lugar ν y μ que ocupan estos intervalos en la sucesión (1)

2. Para cada $G, H \in \mathcal{T}$, $G \cap H \in \mathcal{T}$.
3. $X \in \mathcal{T}$.

Un *espacio topológico* es un par $(X, \mathcal{T})$ en el que X es un conjunto y $\mathcal{T}$ una topología sobre X.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un subconjunto F de X es un *cerrado* de $(X, \mathcal{T})$ si $X - F \in \mathcal{T}$.

Si $\mathcal{G} = \varnothing$, entonces $\bigcup \mathcal{G} = \varnothing \in \mathcal{T}$.

Observemos que si $\mathcal{T}$ es una topología sobre un conjunto X, entonces $\varnothing \in \mathcal{T}$, porque $\varnothing \subseteq \mathcal{T}$, $\varnothing = \bigcup \varnothing$ y, en virtud de la primera condición de la definición anterior, para cada $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{T}$, $\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \mathcal{T}$.

Definición 2. Sea X un conjunto. Una *base para una topología* sobre X es un subconjunto $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Sub}(X)$, a cuyos elementos los llamamos *abiertos básicos* de $\mathcal{B}$, que cumple las siguientes condiciones:

1. $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.
2. Para cada $U, V \in \mathcal{B}$, y cada $x \in U \cap V$, existe un $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$.

Si $\mathcal{T}$ es una topología sobre X, una *base* de $\mathcal{T}$ es un subconjunto $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ tal que, cada abierto G de $\mathcal{T}$, se puede representar como la unión de un subconjunto de $\mathcal{B}$.

Proposición 1. *Toda topología $\mathcal{T}$ sobre un conjunto X es una base de $\mathcal{T}$. Además, si $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre X, entonces existe una única topología sobre X, la* topología generada *por $\mathcal{B}$, a la que denotamos por $\mathrm{Tg}_X(\mathcal{B})$, de la cual $\mathcal{B}$ es base.*

Demostración. $\square$

Definimos ahora las aplicaciones continuas de un espacio topológico en otro, que darán lugar, como no podía ser menos, a la categoría de los espacios topológicos.

Definición 3. Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(X', \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos. Una *aplicación continua* de $(X, \mathcal{T})$ en $(X', \mathcal{T}')$ es un triplo ordenado $((X, \mathcal{T}), f, (X', \mathcal{T}'))$, abreviado como f y denotado por $f\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$, en el que f es una aplicación de X en X', tal que, para cada abierto $G' \in \mathcal{T}'$, $f^{-1}[G'] \in \mathcal{T}$.

Proposición 2. *Sea f una aplicación continua de $(X, \mathcal{T})$ en $(X', \mathcal{T}')$, g una de $(X', \mathcal{T}')$ en $(X'', \mathcal{T}'')$ y h una de $(X'', \mathcal{T}'')$ en $(X''', \mathcal{T}''')$. Entonces:*

1. *Siendo* $\mathrm{id}_{(X,\mathcal{T})} = ((X, \mathcal{T}), \mathrm{id}_A, (X, \mathcal{T}))$, *se cumple que*
$$\mathrm{id}_{(X,\mathcal{T})}\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}),$$
la aplicación continua identidad *de $(X, \mathcal{T})$, es una aplicación continua de $(X, \mathcal{T})$.*
2. *Siendo* $g \circ f = ((X, \mathcal{T}), g \circ f, (X'', \mathcal{T}''))$, *se cumple que*
$$g \circ f\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X'', \mathcal{T}''),$$
la aplicación continua composición *de f y g, es una aplicación continua de $(X, \mathcal{T})$ en $(X'', \mathcal{T}'')$.*

3. (Asociatividad). *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{T}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] \arrow[drr, bend left, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[drr, bend right=60, "h\circ(g\circ f)"'] & (X',\mathcal{T}') \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\
 & (X'',\mathcal{T}'') \arrow[r, "h"'] & (X''',\mathcal{T}''')
\end{tikzcd}$$

conmuta.

4. (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{T}) \arrow[r, "\mathrm{id}_{(X,\mathcal{T})}"] \arrow[dr, "f"'] & (X,\mathcal{T}) \arrow[d, "f"] \\
 & (X',\mathcal{T}')
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{T}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & (X',\mathcal{T}') \arrow[d, "\mathrm{id}_{(X',\mathcal{T}')}"] \\
 & (X',\mathcal{T}')
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Corolario 1. *Los espacios topológicos $(X,\mathcal{T})$ tales que $X\in\boldsymbol{\mathcal{U}}$, junto con las aplicaciones continuas entre ellos constituyen una categoría, a la que denotamos por* **Top**.

Hay que definir la topología mediante las nociones de entorno, interior (punto interior) y clausura (punto de adherencia). Además, se han de definir los conceptos de, punto exterior, punto de acumulación, punto aislado, punto frontera, conjunto denso en otro conjunto, conjunto denso en sí mismo, conjunto perfecto, conjunto nunca denso (ralo), conjunto discreto, conjunto diseminado, etc.

Definición 4. Un subconjunto A del conjunto subyacente de un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ es *nunca denso* si $\mathrm{Int}(\mathrm{C}\ell(A))=\varnothing$.

Proposición 3. *Cualquier subconjunto de un conjunto nunca denso de un espacio topológico también es nunca denso.*

El conjunto vacío es nunca denso. En un espacio de Hausdorff un conjunto final es nunca denso si, y sólo si, el punto del terminal no es aislado. Un subconjunto denso no es nunca denso, salvo que el conjunto subyacente del espacio topológico sea vacío. La frontera de un abierto o de un cerrado es nunca densa. La frontera de un subconjunto arbitrario no es necesariamente nunca densa. La unión de un número finito de conjuntos nunca densos es nunca denso.

Proposición 4. *Un subconjunto A del conjunto subyacente de un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ es nunca denso si, y sólo si, para cada abierto no vacío G de $(X,\mathcal{T})$, $G\cap(\complement_X\mathrm{C}\ell(A))\neq\varnothing$.*

Proposición 5. *Un subconjunto A del conjunto subyacente de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es nunca denso si, y sólo si, para cada abierto no vacío G de $(X, \mathcal{T})$, $\complement_X A$ contiene un abierto denso de $(X, \mathcal{T})$.*

Proposición 6. *Un subconjunto A del conjunto subyacente de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es nunca denso si, y sólo si, para cada abierto no vacío G de $(X, \mathcal{T})$, existe un abierto no vacío H de $(X, \mathcal{T})$ tal que $H \subseteq G$ y $H \cap A = \varnothing$.*

Proposición 7. *Un subconjunto A del conjunto subyacente de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es nunca denso si, y sólo si, el exterior de A es denso en $(X, \mathcal{T})$.*

Proposición 8. *Un subconjunto A del conjunto subyacente de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es nunca denso si, y sólo si, la clausura de A es nunca densa en $(X, \mathcal{T})$.*

Establecemos a continuación un lema que nos permitirá obtener una topología, de manera optimal, sobre el dominio de una aplicación cuando el codominio de la misma esté dotado de una topología .

Lema 1. *Sea X un conjunto, $(X', \mathcal{T}')$ un espacio topológico y $f\colon X \longrightarrow X'$ una aplicación; situación que indicamos por:*

$$f\colon X \longrightarrow (X', \mathcal{T}').$$

Entonces hay un levantamiento optimal de $\mathcal{T}'$ a través de f*, i.e., hay una topología sobre X, denotada por $\mathrm{L}^f(\mathcal{T}')$, el* levantamiento optimal de $\mathcal{T}'$ a través de f*, tal que $((X, \mathrm{L}^f(\mathcal{T}')), f, (X', \mathcal{T}'))$ es una aplicación continua del espacio topológico $(X, \mathrm{L}^f(\mathcal{T}'))$ en el espacio topológico $(X', \mathcal{T}')$ y para cada espacio topológico $(X'', \mathcal{T}'')$ y cada aplicación $g\colon X'' \longrightarrow X$, si $((X'', \mathcal{T}''), f \circ g, (X', \mathcal{T}'))$ es un morfismo de $(X'', \mathcal{T}'')$ en $(X', \mathcal{T}')$, entonces $((X'', \mathcal{T}''), g, (X, \mathrm{L}^f(\mathcal{T}')))$ lo es de $(X'', \mathcal{T}'')$ en $(X, \mathrm{L}^f(\mathcal{T}'))$. Además, se cumple que:*

1. *Para cada topología $\mathcal{U}$ sobre X:*
$$\mathrm{L}^{\mathrm{id}_X}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}.$$
2. *Si $f\colon X \longrightarrow X'$, $g\colon X' \longrightarrow X''$ son aplicaciones y $\mathcal{T}''$ una topología sobre X'', entonces:*
$$\mathrm{L}^{g \circ f}(\mathcal{T}'') = \mathrm{L}^f(\mathrm{L}^g(\mathcal{T}'')).$$

Demostración. Es suficiente tomar como $\mathrm{L}^f(\mathcal{T}')$ la topología sobre X definida como:

$$\mathrm{L}^f(\mathcal{T}') = \{\, f^{-1}[G'] \mid G' \in \mathcal{T}' \,\}.$$

□

Establecemos ahora el dual del Lema anterior, que nos permitirá obtener una topología, de manera cooptimal, sobre el codominio de una aplicación cuando el dominio de la misma esté dotado de una topología .

Lema 2. *Sea X un conjunto, $(X', \mathcal{T}')$ un espacio topológico y $f\colon X' \longrightarrow X$ una aplicación; situación que indicamos por:*

$$f\colon (X', \mathcal{T}') \longrightarrow X.$$

Entonces hay un levantamiento cooptimal de $\mathcal{T}'$ a través de f, *i.e., hay una topología sobre* X, *denotada por* $\mathrm{L}_f(\mathcal{T}')$, *el* levantamiento cooptimal de $\mathcal{T}'$ a través de f, *tal que* $((X', \mathcal{T}'), f, (X, \mathrm{L}_f(\mathcal{T}')))$ *es una aplicación continua del espacio topológico* $(X', \mathcal{T}')$ *en el espacio topológico* $(X, \mathrm{L}_f(\mathcal{T}'))$ *y para cada espacio topológico* $(X'', \mathcal{T}'')$ *y cada aplicación* $g\colon X \longrightarrow X''$, *si* $((X', \mathcal{T}'), g \circ f, (X'', \mathcal{T}''))$ *es un morfismo de* $(X', \mathcal{T}')$ *en* $(X'', \mathcal{T}'')$, *entonces* $((X, \mathrm{L}_f(\mathcal{T}'))), g, (X'', \mathcal{T}'')$ *lo es de* $(X, \mathrm{L}_f(\mathcal{T}'))$ *en* $(X'', \mathcal{T}'')$. *Además, se cumple que:*

1. *Para cada topología* $\mathcal{U}$ *sobre* X*:*
$$\mathrm{L}_{\mathrm{id}_X}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}.$$
2. *Si* $f\colon X' \longrightarrow X$, $g\colon X'' \longrightarrow X'$ *son aplicaciones y* $\mathcal{T}''$ *una topología sobre* X'', *entonces:*
$$\mathrm{L}_{f\circ g}(\mathcal{T}'') = \mathrm{L}_f(\mathrm{L}_g(\mathcal{T}'')).$$

Demostración. Es suficiente tomar como $\mathrm{L}_f(\mathcal{T}')$ la topología sobre X definida como:
$$\mathrm{L}_f(\mathcal{T}') = \{\, G \subseteq X \mid f^{-1}[G] \in \mathcal{T}' \,\}.$$
□

Proposición 9. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico compacto y* C *un cerrado del mismo. Entonces* C *es compacto, i.e., para cada subconjunto* $\mathcal{G}$ *de* $\mathcal{T}$, *si* $C \subseteq \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G$, *entonces hay un subconjunto finito* $\mathcal{H}$ *de* $\mathcal{G}$ *tal que* $C \subseteq \bigcup_{H\in\mathcal{H}} H$.

Demostración. □

Proposición 10. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico de Hausdorff y* C *un compacto del mismo. Entonces* C *es cerrado.*

Demostración. □

Proposición 11. *Sea* $f\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ *una aplicación continua. Si* $(X, \mathcal{T})$ *es compacto y* f *sobreyectiva, entonces* $(X', \mathcal{T}')$ *es compacto. Además, si* f *es inyectiva y* $(X', \mathcal{T}')$ *es de Hausdorff, entonces* f *es un homeomorfismo, i.e.,* f *es biyectiva y bicontinua.*

Demostración. □

Proposición 12. *Si* A *y* B *son subconjuntos compactos disjuntos de un espacio de Hausdorff* $(X, \mathcal{T})$, *entonces hay entornos disjuntos de* A *y* B. *Por lo tanto cada espacio topológico compacto y Hausdorff es normal.*

Del axioma de elección se deduce el teorema de Tychonoff.

Teorema 1 (Higgins)**.** *Sea* $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ *una familia de espacios topológicos compactos. Entonces* $\prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ *es compacto.*

Demostración. Suponemos que $I \neq \varnothing$ y que, para cada $i \in I$, $X_i \neq \varnothing$, ya que en caso contrario, el resultado es obviamente cierto. Sea $\mathcal{T}$ la mínima topología sobre $\prod_{i\in I} X_i$ para la que las proyecciones canónicas son continuas.

En principio hemos de demostrar que, para cada ideal propio $\mathcal{I}$ de $(\mathcal{T}, \subseteq)$, $\bigcup \mathcal{I} \neq \prod_{i\in I} X_i$. Pero, debido a que cada ideal propio está contenido en uno maximal, es suficiente que demostremos que, para cada ideal maximal

$\mathcal{M}$ de $(\mathcal{T}, \subseteq)$, $\bigcup \mathcal{M} \neq \prod_{i \in I} X_i$, ya que $\bigcup \mathcal{I} \subseteq \bigcup \mathcal{M}$, si el ideal propio $\mathcal{I}$ está contenido en el ideal maximal $\mathcal{M}$.

Sea $\mathcal{M}$ un ideal maximal de $(\mathcal{T}, \subseteq)$ y, para cada $i \in I$, sea $\mathcal{M}_i$ el subconjunto de $\mathcal{T}_i$ definido como:

$$\mathcal{M}_i = \{ G \in \mathcal{T}_i \mid \mathrm{pr}_i^{-1}[G] \in \mathcal{M} \}.$$

Se cumple que, para cada $i \in I$, $\mathcal{M}_i$ es un ideal propio de $(\mathcal{T}_i, \subseteq)$ (comprobarlo), luego, por ser $(X_i, \mathcal{T}_i)$ compacto, $\bigcup \mathcal{M}_i \neq X_i$. Sea $x \in \prod_{i \in I}(X_i - \bigcup \mathcal{M}_i)$. Entonces $x \notin \bigcup \mathcal{M}$. Supongamos lo contrario, i.e., que $x \in \bigcup \mathcal{M}$, entonces hay un abierto $G \in \mathcal{M}$ tal que $x \in G$. Por lo tanto hay un $n \in \mathrm{N} - 1$, una familia $(i_\alpha)_{\alpha \in n}$ en I y una familia de abiertos $(G_{i_\alpha})_{\alpha \in n}$, con $G_{i_\alpha} \in \mathcal{T}_{i_\alpha}$, para cada $\alpha \in n$, tal que

$$x \in \bigcap_{\alpha \in n} \mathrm{pr}_{i_\alpha}^{-1}[G_{i_\alpha}] \subseteq G.$$

Ahora bien, por ser $\mathcal{M}$ maximal y cumplirse que $\bigcap_{\alpha \in n} \mathrm{pr}_{i_\alpha}^{-1}[G_{i_\alpha}] \in \mathcal{M}$, esto último, por ser $\mathcal{M}$ ideal y estar $\bigcap_{\alpha \in n} \mathrm{pr}_{i_\alpha}^{-1}[G_{i_\alpha}]$ incluido en un elemento G de $\mathcal{M}$, hay un $\beta \in n$ tal que $\mathrm{pr}_{i_\beta}^{-1}[G_{i_\beta}] \in \mathcal{M}$, luego hay un $\beta \in n$ tal que $G_{i_\beta} \in \mathcal{M}_{i_\beta}$, pero $x_{i_\beta} \in G_{i_\beta} \subseteq \bigcup \mathcal{M}_{i_\beta}$ y $x_{i_\beta} \in X_{i_\beta} - \bigcup \mathcal{M}_{i_\beta}$, absurdo. Por lo tanto $X \neq \bigcup \mathcal{M}$, y $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ es compacto. □

El axioma de elección es equivalente al teorema de Tychonoff.

Teorema 2. *Si el producto de espacios topológicos compactos es compacto, entonces el producto cartesiano de una familia no vacía $(X_i)_{i \in I}$ de conjuntos no vacíos, no es vacío.*

Demostración. Sea $(X_i)_{i \in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Entonces, para el conjunto $\omega = \{ X_i \mid i \in I \}$, que tiene la propiedad de ser un conjunto porque es la imagen de la función $(X_i)_{i \in I}$, se cumple que, para cada $i \in I$, $\omega \notin X_i$, ya que en caso contrario, i.e., si existiera un $i \in I$ tal que $\omega \in X_i$, entonces existiría una cadena del tipo $X_i \in \omega \in X_i$, lo cual es imposible, por el axioma de regularidad. Sea, para $i \in I$, $X_i^* = X_i \cup \{ \omega \}$ y $\mathcal{T}_{i,\omega} = \{ \varnothing, X_i, \{ \omega \}, X_i^* \}$. Entonces se cumple que $(X_i^*, \mathcal{T}_{i,\omega})$ es un espacio topológico compacto, luego, por el teorema de Tychonoff, $\prod_{i \in I}(X_i^*, \mathcal{T}_{i,\omega})$ es un espacio topológico compacto. Sea, para $i \in I$, $F_i = \mathrm{pr}_i^{-1}[X_i]$, que es un cerrado de $\prod_{i \in I}(X_i^*, \mathcal{T}_{i,\omega})$. Entonces el conjunto no vacío $\{ F_i \mid i \in I \}$ tiene la propiedad de la intersección finita, i.e., para cada subconjunto finito no vacío J de I, se cumple que $\bigcap_{j \in J} F_j \neq \varnothing$, porque la función x de I en $\bigcup_{i \in I} X_i^*$ definida, para $j \in J$, como $x_j = a_j$, siendo a_j un elemento arbitrario pero fijo de X_j, y, para $i \in I - J$, como $x_i = \omega$ pertenece, no sólo a $\prod_{i \in I} X_i^*$, sino a $\bigcap_{j \in J} F_j$. Por lo tanto $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \varnothing$, pero $\prod_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} F_i$, luego $\prod_{i \in I} X_i \neq \varnothing$. □

Referencias