TEORÍA DE CONJUNTOS

J. Climent Vidal.

1. Descripción.

La teoría de conjuntos pretende ser el fundamento de las matemáticas. Todas las nociones y construcciones matemáticas se definen y obtienen a partir de las nociones primitivas de conjunto y pertenencia, estando esas nociones primitivas sujetas a cumplir una serie de axiomas, que se supone capturan los principios conjuntistas "obviamente verdaderos". A partir de tales axiomas se pueden obtener tods las matemáticas actuales. No obstante, hay ciertas cuestiones, como por ejemplo, la Hipótesis del continuo, de las que los axiomas de la teoría de conjuntos no pueden dar cuenta, i.e., no son ni demostrables ni refutables a partir de los mismos, pero eso forma parte del estudio metamatemático de la teoría de conjuntos.

Nuestro objetivo es el de desarrollar axiomáticamente la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel-Skolem. Para ello, por una parte, compararemos los conjuntos, sin que estén dotados de ninguna estructura adicional, mediante las aplicaciones, comparación que nos conducirá a la noción de cardinal y a la aritmética cardinal, y, por otra, los conjuntos dotados de algún tipo de ordenación, mediante los morfismos, i.e., las aplicaciones que preservan las estructuras involucradas, entre tales conjuntos, comparación que nos conducirá, en el caso particular de que se consideren buenas ordenaciones sobre los conjuntos, a la noción de ordinal y a la aritmética ordinal. Naturalmente, todo ello exigirá estudiar la clasificación de las aplicaciones, los teoremas de isomorfía de Dedekind-Noether, las nociones y construcciones universales clásicas, como por ejemplo, las de producto e igualador, y sus duales, coproducto y coigualador, que son casos particulares, respectivamente, de las de límite proyectivo y límite inductivo; así como las propiedades de estabilidad de las diferentes nociones de conjunto ordenado bajo tales límites y colímites. Además, como aplicación estudiaremos el universo de las álgebras booleanas y los homomorfismos entre ellas.

2. Programa de la asignatura.

1. Axiomas y operaciones.
2. Relaciones y funciones. Clasificación y teoremas de isomorfía.
3. Productos, igualadores y productos fibrados. Coproductos, coigualadores y sumas amalgamadas.
4. Conjuntos ordenados y homomorfismos.
5. Límites proyectivos e inductivos.
6. Números naturales, enteros, racionales y reales.
7. Retículos y operadores de clausura.
8. Álgebras booleanas y homomorfismos.
9. Ordinales y aritmética ordinal.
10. Cardinales y aritmética cardinal.

Referencias

[1] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Hermann, 1970.
[2] H. Enderton, *Elements of set theory*, Academic Press, 1977.
[3] P. Halmos, *Naive set theory*, Van Nostrand, 1960.
[4] K. Hrbacek and T. Jech *Introduction to set theory*, M. Dekker, 1984.
[5] K. Kuratowski and A. Mostowski, *Set theory*, North-Holland, 1968.