Prácticas de Programación no lineal. Curso 2003-2004

Práctica 1.- Optimización irrestringida

En esta práctica formularemos como modelos de PNL una serie de problemas de dimensión pequeña y mediana.

También aprenderemos a manejar la aplicación Excel de manera que seamos capaces de introducir, modificar y resolver algunos modelos de optimización sin restricciones. Analizaremos el papel que juega la solución inicial en el comportamiento de los diferentes métodos (gradiente conjugado y cuasi-Newton) y comprobaremos su eficacia para la resolución de diferentes problemas test.

1. Resuelve gráficamente los problemas siguientes:

(i) Optimizar $2x_1 + x_2$ sujeto a $-x_1^2 + 4x_1 - x_2 \le 0$, $3x_1 + 5x_2 \le 18$, $x_1, x_2 \ge 0$

(ii) Optimizar $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$ *sujeto a* $2x_1 + 3x_2 \ge 6$,, $3x_1 + 2x_2 \le 12$, $x_1, x_2 \ge 0$

Ejemplo 1. Consideremos el siguiente problema:

A un topógrafo se le asigna la determinación de las alturas (sobre el nivel del mar) de cinco colinas H_i, i=1,..., 5. Permaneciendo a nivel del mar obtiene los resultados siguientes: 377 m., 592 m., 737 m., 790 m. y 915 m., respectivamente. Entonces, para revisar su trabajo sube a la colina H_1 y mide la altura de H_2 sobre H_1, que le da 217 m., la de H_3 sobre H_1, que le da 359 m., la de H_4 sobre H_1, que le da 415 m, y para H_5 543 m. Notando que las distintas medidas no son consistentes con las obtenidas a nivel del mar, decide subir a la colina H_2 y medir la altura de H_i, i>3, sobre H_2, obteniendo 145 m., 200 m. y 327 m., respectivamente. Como los resultados siguen siendo inconsistentes, decide calcular el estimador de mínimos cuadrados basado en sus datos y poner ese resultado en su informe. Determina ese resultado.

Solución

En primer lugar es modelizamos el problema. Denotamos por H_i la altura de la colina *i*, para $i = 1,...,5$.

Interesa minimizar la diferencia entre las distintas observaciones de las alturas de las colinas y la que finalmente figurará en el informe del topógrafo. Esto se consigue mediante:

- minimizar la distancia a las observaciones hechas al nivel del mar:
$$(H_1 - 377)^2 + (H_2 - 592)^2 + (H_3 - 737)^2 + (H_4 - 790)^2 + (H_5 - 915)^2$$
- y minimizar la distancia con las observaciones tomadas desde la primera colina:
$$(H_2 - H_1 - 217)^2 + (H_3 - H_1 - 359)^2 + (H_4 - H_1 - 415)^2 + (H_5 - H_1 - 543)^2$$
- y minimizar la distancia con las medidas tomadas desde la segunda colina:
$$(H_3 - H_2 - 145)^2 + (H_4 - H_2 - 200)^2 + (H_5 - H_2 - 327)^2$$

Por tanto, la función a optimizar es

$$F(H) = (H_1 - 377)^2 + (H_2 - 592)^2 + (H_3 - 737)^2 + (H_4 - 790)^2 + (H_5 - 915)^2 +$$
$$(H_2 - H_1 - 217)^2 + (H_3 - H_1 - 359)^2 + (H_4 - H_1 - 415)^2 + (H_5 - H_1 - 543)^2 +$$
$$(H_3 - H_2 - 145)^2 + (H_4 - H_2 - 200)^2 + (H_5 - H_2 - 327)^2$$

siendo $H=(H_1, H_2,...,H_5)$

Ejemplo 2. Determinar los mínimos de la función f(x,y)= $(-6-x-y)^2+(2-3x-3y-xy)^2$ analíticamente y mediante el programa EXCEL, partiendo de (-4,6), (-2,-4) y (-15,-8).

Solución

En primer lugar calculamos el gradiente de la función $f(x,y)=(-6-x-y)^2+(2-3x-3y-xy)^2$ que es

$$\nabla f\,(x,y)=\left(2xy^2+12xy+6y^2+20x+16y,\,2yx^2+12xy+6x^2+16x+20y\right)$$

planteamos ahora el sistema $\nabla f\,(x,y)=(0{,}0)$, que tiene como soluciones los puntos $(0{,}0)$, $(-3,-3)$ y $(-6,-6)$. Comprobemos si los puntos anteriores son mínimos locales. Calculamos la matriz Hessiana:

$$H\,(x,y)=\begin{pmatrix} 2y^2+12y+20 & 4xy+12x+12y+16 \\ 4xy+12x+12y+16 & 2x^2+12x+36+20 \end{pmatrix}$$

Sustituimos cada uno de los puntos obtenidos como solución del sistema y obtenemos:

$$H(0,0)=H\,(-6,-6)=\begin{pmatrix} 20 & 16 \\ 16 & 20 \end{pmatrix}$$

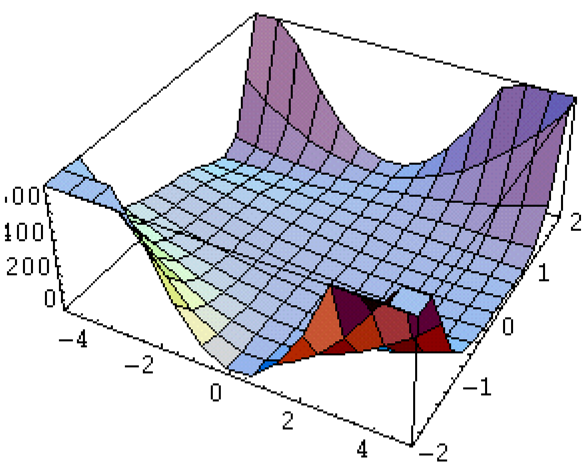
que es una matriz definida positiva, por tanto $(0{,}0)$ y $(-6,-6)$ son mínimos locales. ¿qué podemos decir acerca de $(-3,-3)$?

Resolvamos ahora el problema con Excel

Ejemplo 3. (EJERCICIO REALIZADO POR UN ESTUDIANTE DE LA ASIGNATURA)

Vamos a estudiar el problema de minimizar la función de Beale:

$$\textbf{mín}\quad f[x,y]:=(1.5-x(1-y))^2+(2.25-x(1-y^2))^2+(2.625-x(1-y^3))^2$$



Para empezar, determinamos, mediante el programa Mathematica los puntos que anulan su gradiente:

eqpts = Solve [D[*f*[*x*, *y*], *x*]== 0, D[*f*[*x*, *y*], *y*]== 0, {*x*, *y*}]

{{*x* → 0 . , *y*→ 1.},

{*x* → 1 1731148341 8811701 ^-15 -9 7759569515 6763966 ^-16 *I*,

**   *y* → -0 9285714285 71427937 -1 2515296762 8108791 *I*}**

{*x* → 1 1731148341 8811701 ^-15 + 9 7759569515 6763966 ^-16 *I*,

**   *y* → -0 9285714285 71427937 + 1 2515296762 8108791 *I*}**

{*x* → 0 1005379373 24121373 , *y*→ -2 6445135850 2312672 }

{*x* → 1 9667976669 3903879 -0 4285757875 0701295 *I*,

**   *y* → -0 5110765408 21770741 -0 6074836560 56184706 *I*}**

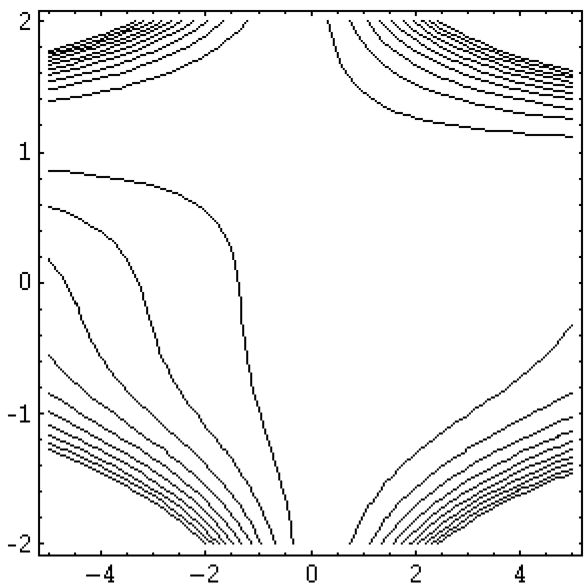
{*x* → 1 9667976669 3903879 + 0 4285757875 0701295 *I*,

**   *y* → 0 5110765408 21770741 + 0 6074836560 56184706 *I*}**

{ *x* → 3 . , *y*→ 0 5}}

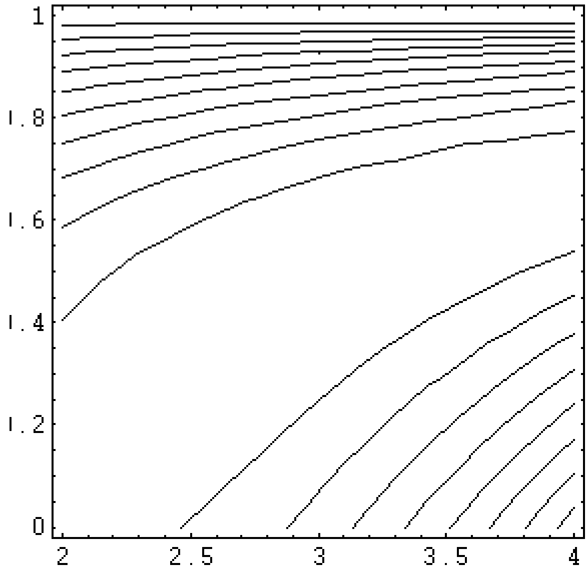
De todas estas soluciones sólo nos interesan las reales, es decir, los puntos $(0,1)$, $(0.1005379573,-2.6445135850)$ y el $(3,0.5)$. Calculamos el Hessiano de la función *f* en cada uno de estos puntos y concluimos que la función presenta un único mínimo en el punto $(3,0.5)$ mientras que los otros dos puntos son puntos de silla. Veamos las curvas de nivel alrededor de cada uno de estos puntos. Primero, una vista general:

ContourPlot[f[x,y],{x,-5,5},{y,-2,2},ContourShading->False, ContourSmoothing->Automatic,PlotPoints->40]



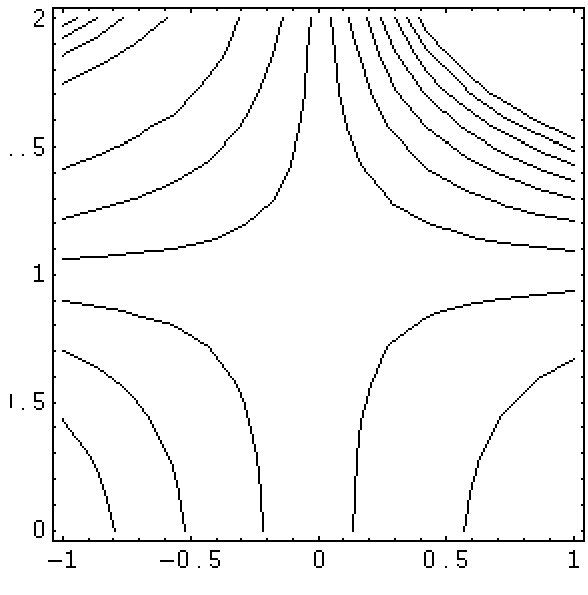
Ahora, alrededor del punto $(3{,}0.5)$

ContourPlot[f[x,y],{x,2,4},{y,0,1},ContourShading->False, ContourSmoothing->Automatic]



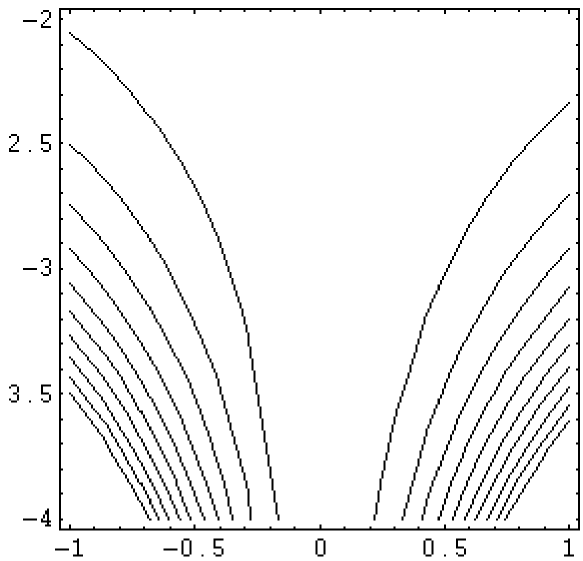
Punto $(0{,}1)$:

ContourPlot[f[x,y],{x,-1,1},{y,0,2},ContourShading->False, ContourSmoothing->Automatic]



Y por último, alrededor del punto $(0.1005379573,-2.6445135850)$

ContourPlot[f[x,y],{x,-1,1},{y,-4,-2},ContourShading->False, ContourSmoothing->Automatic]



Vamos a resolver el problema con Excel. Para ello, tomaremos como puntos iniciales el $(-1,2)$ y el $(1,1)$

Ejemplo 4. Vamos a estudiar el cálculo de la longitud de salto α en la resolución del problema de minimizar la función $4x^2 + y^2$, partiendo del punto $(3,4)$.

Ejemplo 5. Veamos qué sucede cuando la función es no acotada. Consideremos el problema de minimizar $f(x)= x_1^2-3x_2^2-x_1-2x_2-5x_1x_2$ partiendo del punto (0,0).

Ejemplo 6. Determinar los mínimos de la función $f(x)=100(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2+90\,(x_4-x_3^2)^2+(1-x_3)^2+10.1((x_2-1)^2+(x_4-1)^2)+19.8\,(x_2-1)(x_4-1)$ mediante el programa Excel, partiendo de los puntos (0,0,0,0), (5,0,5,-1), (1,-1,1,-1) y (1,-3,1,-3). Discutir los resultados obtenidos al utilizar los métodos que están disponibles en Excel

Ejercicios

1. Un fabricante que produce un solo artículo tiene dos tipos de clientes. Si se producen q_1 unidades para el cliente A, entonces A está dispuesto a pagar un precio de (70-4 q_1) euros por unidad. Si se producen q_2 unidades para el cliente B, entonces este cliente está dispuesto a pagar un precio de (150-15 q_2) euros por unidad. Para q>0, el coste para producir q unidades es (100+15 q) euros ¿Cuánto tendría que vender a cada cliente para maximizar su ganancia?

2. Una empresa puede vender toda su producción de un artículo a 2 euros/unidad. El artículo se obtiene a partir de dos productos primarios. Si se utilizan q_1 unidades del producto 1 y q_2 unidades del producto 2, se pueden producir $(q_1)^{1/3} + (q_2)^{2/3}$ unidades del artículo. Si la adquisición de una unidad del producto 1 cuesta 1 euro y la adquisición de una unidad del producto 2 cuesta 1.5 euros, maximiza la ganancia.

3. Supongamos que la variable y es una función cuadrática de x: $y=ax^2 +bx +c$, siendo desconocidos los coeficientes a, b y c. Pueden obtenerse estimadores de dichos coeficientes mediante un experimento que mide los valores y_i, para los correspondientes valores de la variable x_i, i=1,...,m. Determinar los coeficientes a, b y c mediante el mejor ajuste cuadrático en términos de los datos:

x	-2030	-1526	1020	5321	2521	3751	4751
y	-57	-19	43	37	36	52	-11

4. (ej710) Determinar los mínimos de la función $f(x,y)= (1-x)^2+100(y-x^2)^2$ mediante el programa Excel, partiendo de los puntos (-1.2,1), (-1, -2). Evalúa los puntos estacionarios.

5. (ej717) Determinar los mínimos de la función $f(x,y)= (x^3-y)^2+2(y-x)^4$ mediante el programa Excel, partiendo de (0,1) y (0,-2). Evalúa los puntos estacionarios.

6. (fmccormic) Determinar los mínimos de la función $f(x)= 1+2.5x_2-1.5x_1+ \mathrm{sen}(x_1+x_2) + (x_1-x_2)^2$ partiendo de los puntos (0,0), (4,3), (1,0), (-35, 1) y (-1.5, 3). Evalúa los puntos estacionarios.

7. (fschuldt) Determinar los mínimos de la función $f(x)= x_2+10^{-5}(x_2-x_1)^2$ mediante el programa Excel, partiendo de los puntos (0,0), (10,1) y (-10,15). Evalúa los puntos estacionarios.

8. (fbettsbox) Determinar los mínimos de $f(x,y) = [1/(27\sqrt{3})]\ ((x-3)^2 -9)y^3$ mediante el programa Excel, partiendo de los puntos (1, 0.5), (2, 0) y (0, 0). Evalúa los puntos estacionarios.

9. (ej77) Determinar los mínimos de la función $f(x)= 10x_1^2+10(x_2-1)^2+10x_3^2+x_1$ mediante el programa Excel, partiendo de los puntos (1,1,1) y (2,5,9). Discutir los resultados obtenidos al utilizar todos los métodos que están disponibles en Excel. x*=(-.05, 1, 0)

10. (ej719(fpowell)) Determinar los mínimos de la función $f(x)=(x_1+10x_2)^2+5(x_3-x_4)^2+(x_2-2x_3)^4+10(x_1-x_4)^4$ mediante el programa Excel, partiendo de los puntos (3,-1,0,1) y (-3,1,-3,1). Discutir los resultados obtenidos al utilizar los métodos que están disponibles en EXCEL. Discutir la optimalidad de las soluciones obtenidas.

11. (ejem8(fBarBi1)) Determinar los mínimos de la función $f(x) = x_4x_1(x_1+x_2+x_3)+x_3$ mediante el programa Excel, partiendo de (1,5,5,1). UB

Apéndice 1. Matrices definidas y semidefinidas (Bazaraa, Sherali y Shetti, 1993)

Dada una matriz A, simétrica nxn, decimos que A es *definida* (semidefinida) *positiva* si $x^TAx > 0$ ($x^TAx \geq 0$) para cualquier vector no nulo en R^n. Análogamente A es una matriz *definida* (semidefinida) *negativa* si $x^TAx < 0$ ($x^TAx \leq 0$) para cualquier x no nulo de R^n.

Recordemos que si A es un matriz nxn y si x es un vector no nulo en R^n que verifica $Ax=\lambda x$ para algún valor real o complejo, entonces λ es llamado *valor propio* de A y x es un *vector propio* de A *correspondiente a* λ. Los valores propios de A son las raices de la *ecuación característica* $\det(A-\lambda I) = 0$. Además, las matrices simétricas tienen las siguientes propiedades:
(i) todos sus valores propios son números reales.
(ii) los vectores propios correspondientes a distintos valores propios son ortogonales.
(iii) Si λ es un valor propio de multiplicidad k, existen k valores propios linealmente independientes correspondientes a λ (utilizando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt podemos reemplazar estos vectores por un conjunto de k vectores ortonormales).

Teorema 1. La matriz A, simétrica nxn, es definida positiva, negativa, semidefinida positiva o semidefinida negativa si y solo si sus valores propios son positivos, negativos, no negativos o no positivos, respectivamente. Una matriz A es *indefinida* si tiene al menos un valor propio positivo y al menos un valor propio negativo.

Recordemos que denotamos por Δ_k el determinante de la submatriz kxk de A que queda en la esquina superior izquierda, y que este valor se conoce como *menor principal* k-ésimo.

Teorema 2. Sea A una matriz simétrica nxn y Δ_k el k-ésimo menor principal de A, entonces:
a) A es *definida positiva* si y solo si $\Delta_k>0$ para k=1,...n.
b) A es *definida negativa* si y solo si $(-1)^k\ \Delta_k>0$ para k=1,...n (es decir $\Delta_1<0$ y los otros menores principales van alternandose en signo).
c) Si $\Delta_k>0$ para k=1,2,...n-1 y $\Delta_n=0$, entonces A es *semidefinida positiva*.
d) Si $(-1)^k\ \Delta_k>0$ para k=1,...n-1 y $\Delta_n=0$, entonces A es *semidefinida negativa*.

Teorema 3. Consideremos una matriz H, simétrica 2x2, de elementos h_{ij}. Entonces H es *semidefinida positiva* (negativa) si y solo si $h_{11}\geq 0$, $h_{22}\geq 0$ y $h_{11}h_{22}- h_{12}^2\geq 0$ ($h_{11}\leq 0$, $h_{22}\leq 0$ y $h_{11}h_{22}- h_{12}^2\geq 0$). Si las desigualdes anteriores son estrictas la matriz es *definida positiva* (negativa).

Teorema 4. Consideremos una matriz H, simétrica nxn, de elementos h_{ij}.
a) Si $h_{ii}\leq 0$ para algun i, entonces H *no* es *definida positiva* y si $h_{ii}<0$ para algun i, entonces H *no* es *semidefinida positiva.*
b) Si ≥ 0 para algun i, entonces debemos tener que $h_{ij}= h_{ji}=0$ también para todo j=1,...n, pues de otro modo H *no* es *semidefinida positiva*.
c) Si $n\geq 2$, sea $H=\begin{bmatrix} h_{11} & q^T \\ q & G \end{bmatrix}$, tal que $q=\mathbf{0}$ si $h_{11}=0$, y en otro caso $h_{11}>0$.
Si aplicamos Gauss-Jordan para reducir la matriz H a la forma $H=\begin{bmatrix} h_{11} & q^T \\ \mathbf{0} & G_n \end{bmatrix}$.
Entonces G_n es una matriz simétrica (n-1)x(n-1) y H es una matriz *semidefinida positiva* si y solo si G_n es semidefinida positiva. Además, si $h_{11}>0$, entonces H es *definida positiva* si y solo si G_n es definida positiva.

Apéndice 2. Elección de una cartera de valores (Portfolio management).

Un inversor dispone de una cantidad fija de dinero C que puede invertir en diversos valores. Se supone que quiere maximizar los intereses esperados de sus inversiones (cartera) asegurando al mismo tiempo un riesgo pequeño para la misma, que se mide por la varianza del interés generado por la cartera de valores. Por desgracia, los intereses obtenidos a partir de los valores que tienen mayor esperanza suelen ser altamente variables. Por lo que, a menudo el problema de seleccionar una cartera de valores se aproxima eligiendo un mínimo esperado aceptable y calculando la cartera con la mínima varianza que alcanza un interés esperado aceptable.

Por ejemplo, un inversor puede buscar la cartera de mínima varianza que proporcione un interés esperado al menos del 12%. Sea x_i la cantidad invertida en el valor i-ésimo, y sea S_i la variable aleatoria que representa el interés anual de invertir una unidad de capital.

Recordemos que para una colección de variables aleatorias S_i, i=1,...,n y una constante cualquiera a, se tiene que:

$E(\Sigma_{i=1,..n} S_i)= \Sigma_{i=1,..n} E(S_i)$, $E(aS_i) =a E(S_i)$

$var(\Sigma_{i=1,..n} S_i)= \Sigma_{i=1,..n} var(S_i) +\Sigma_{i\neq j} cov(S_i, S_j)$,

$var(aS_i) =a^2 var(S_i)$

La inversión que queremos realizar es $\Sigma_{i=1,..n} x_i S_i$ de modo que se garantice que:

$$E(\Sigma_{i=1,..n} x_i S_i)=\Sigma_{i=1,..n} x_i E(S_i)\geq 0.12 C, \text{ siendo } \Sigma_{i=1,..n} x_i =C.$$

y se minimice la varianza de la inversión. Además, variando el mínimo interés esperado aceptable el inversor puede obtener y comparar diferentes carteras deseables.

5. Supongamos que se tienen 1000 euros para invertir en 3 valores diferentes, y sea S_i la variable aleatoria que representa el interés anual de invertir 1 euro en el valor i-ésimo. Tenemos la información siguiente: $E(S_1)=0.14$, $E(S_2)=0.11$, $E(S_3)=0.1$, $var(S_1)=0.2$, $var(S_2)=0.08$, $var(S_3)=0.18$, $cov(S_1,S_2)=0.05$, $cov(S_1,S_3)=0.02$ y $cov(S_2,S_3)=0.03$. Formular el problema cuadrático que puede utilizarse para determinar la cartera de mínima varianza que alcanza un interés anual esperado de al menos el 12%. Si además no se quiere que la inversión en ningún tipo de valor supere el 75% del capital disponible ¿cuál sería la política de inversión óptima en cada caso?

6. Si se dispone de 9 millones de pesetas y se quiere invertir en 4 valores diferentes de los que se conoce el vector de ganancias esperado y la matriz de covarianzas, respectivamente:

E(S)= [0.07, 0.06, 0.12, 0.1]

$$var(S)= \begin{array}{cccc} 19.69 & 2.48 & 5.6 & 10.15 \\ & 7.96 & 6.62 & -1.54 \\ & & 16.23 & 2.2 \\ & & & 44.22 \end{array}$$

a) Determinar la inversión que minimiza la varianza de la inversión.

b) Si no queremos que ningun valor supere el 60% de la cartera. Determinar la política de inversión óptima.

c) Si se quiere una ganancia que alcance un interés anual esperado de al menos el 18%, para una cartera de mínima varianza. Estudiar la existencia de solución óptima.

Examen de Programación no lineal. **Febrero 2002**

1. Resuelve, mediante el procedimiento numérico que consideres más adecuado, el siguiente problema:

Minimizar $(x+1)^2 + y^3$

s. a $x^2+y^2 \leq 4$

$-x+ y \leq 1$

$x, y \geq 0$

El punto que has obtenido,¿satisface la condición suficiente de segundo orden?

2. Consideremos el problema de Minimizar $x_1^2+2x_2^2$

a) Si el punto inicial es $x^0= (2, 1)^T$, demuestra que la sucesión de puntos generados mediante el método de descenso más rápido viene dada por: $x^k = \left(\frac{1}{3}\right)^k \begin{pmatrix} 2 \\ (-1)^k \end{pmatrix}$, si se usa la regla de minimización para calcular la longitud de salto.

b) Comprueba que $f(x^{k+1}) = \dfrac{f(x^k)}{9}$

c) Compara el resultado del apartado anterior con la cota para la tasa de convergencia del método de descenso más rápido cuando se minimiza una función cuadrática. ¿Qué conclusiones extraerías con respecto a este método?

3. Partiendo de $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ haz dos iteraciones del método de Newton "puro" para encontrar el mínimo de $f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 - \ln(x_1 + x_2)$. Compara el punto obtenido con el mínimo de la función.

EXAMEN PROGRAMACIÓN NO LINEAL
14 febrero 2001

1.- Considera el método del gradiente para el caso en que la función a minimizar es cuadrática definida positiva. Si $x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$ es el nuevo iterado, sea $\bar{\alpha}^k$ la longitud de salto obtenida mediante la regla de minimización. Demuestra que α^k satisface las desigualdades de la regla de Goldstein si y solo si $2\sigma\bar{\alpha}^k \leq \alpha^k \leq 2(1-\sigma)\bar{\alpha}^k$ donde $\sigma \in (0,0.5)$ es un escalar fijo.

(2.5 puntos)

2.- Consideremos el problema irrestringido: (P1) Min $x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1$.

- Encuentra el óptimo aplicando las condiciones necesaria y suficiente de optimalidad.
- Resuelve numericamente el problema utilizando un método Cuasi-Newton, concretamente el de Davidon, Fletcher y Powell ($\xi^k = 0, \forall k$ en la fórmula de actualización de D^k). Empieza con $x^0 = (0,0)^T$, $D^0 = I_{2x2}$.
- Comprueba que las direcciones obtenidas son Q-conjugadas. **(4 puntos)**

3.- Consideremos ahora un problema con restricciones:

(P2) Min $x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 5x_2$

s.a $x_1 + 2x_2 \leq 6$

$x_1 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

- Resuelvelo con el procedimiento numérico que consideres apropiado. Toma como solución inicial $x^1 = 0_2$

Comprueba que el punto que has encontrado satisface las condiciones suficientes de optimalidad.**(3.5 puntos)**