Práctica 2.- Optimización con restricciones

Se sugieren una serie de ejercicios que servirán para introducir los elementos de la aplicación EXCEL que se necesitan para resolver modelos no lineales con restricciones. Cuando sea posible se representará gráficamente tanto el conjunto factible del problema como las curvas de nivel de la función objetivo. Si el conjunto factible es convexo se aplicarán las condiciones de optimalidad desarrolladas en el Tema 2 para caracterizar la solución óptima.

También estudiaremos las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad, para problemas no lineales con restricciones de igualdad y/o desigualdad, basadas en la teoría de los multiplicadores de Lagrange.

1. Una compañía planea gastar 1000 euros en publicidad. Un minuto de publicidad en la TV cuesta 300 euros y un minuto de publicidad en la radio cuesta 100 euros. Si la empresa compra *x* minutos de TV e *y* minutos en la radio, estima que su ingreso en miles de euros está dado por la siguiente función $f(x, y)=-2x^2 -y^2 +xy+8x+3y$ ¿Cómo puede la empresa maximizar su ingreso?

2. Una persona gasta 20 euros en la compra de una hora de trabajo y 10 euros por la compra de una unidad de capital. Si dispone de L horas de trabajo y de K unidades de capital se podrán producir $L^{2/3} K^{1/3}$ máquinas. Si dispone de 1000 euros para invertir en la compra de trabajo y capital ¿cuál es el número máximo de máquinas que se podrán producir? ¿Cuál es la estrategia de coste mínimo para producir 6 máquinas?

3. Un comerciante puede comprar hasta 49 g. de un producto químico a 257 euros/g. Cada gramo del producto químico puede convertirse en un nuevo producto A, con un coste de 12 euros/g. o en un producto B, con un coste de 9 euros/g. Si se producen x_1 g. del producto A se venderán a $30-x_1$ euros el gramo y si se producen x_2 g. del producto B se venderán a $16-2x_2$ euros el gramo. Determinar como puede el comerciante optimizar sus ganancias.

4. Supongamos que una lata cilíndrica para una bebida ha de tener un volumen ($h\pi r^2$) de 426 cm^3. Si la compañía quiere minimizar el área de la superficie de la lata ($2\pi r^2+2\pi rh$) ¿cuál tendrá que ser la razón entre la altura h de la lata y su radio r?

5. Dos productos químicos, X e Y, se producen mezclando tres materias primas A, B y C que están contaminadas por azufre (3%, 1% y 2%, respectivamente), pero los productos no pueden exceder el 2.5% y 1.5%, respectivamente su contenido en azufre,. Al año no pueden venderse más que 100 unidades de X a 9 $/unidad y 200 de Y a 15 $/unidad. El coste unitario de las materias primas es de 6$, 16$ y 10$, pero los productos A y B no pueden comprarse separadamente, pues se mezclan en el tanque que los transporta. Formula y resuelve el programa no lineal que maximiza los beneficios.

Jul03. Resuelve el problema de mimizar la función $f_2(x)= -8x_1-18x_2 + 2x_1^2+ 3x_2^2$, sujeta a las restricciones: $x_1+x_2\leq 3$, $- x_1+x_2\leq 2$, $x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$. Hazlo mediante el algoritmo de suboptimización en variedades, partiendo de $x^0 = (0,0)^T$.Representa gráficamente la región factible y los puntos que se van obteniendo durante la aplicación del algoritmo. Comenta brevemente, sobre este ejemplo, cómo funciona el algoritmo.

ej99.- Determinar los mínimos de la función $f(x)=\{(x_1+x_2)^2+(x_3+x_2)^2\}$ s.a. $x_1+2x_2+3x_3=1$, mediante EXCEL, partiendo de (0, 0, 0), (-5, 5, -10). Discute la optimalidad de la(s) solución(es) obtenida(s). $x^* = (0.5, -0.5, 0.5)$

ej911.- Determina los mínimos de $f(x)=\{(4x_1-x_2)^2+(x_2+x_3-2)^2+(x_4-1)^2+ (x_2-1)^2\}$ sujeto a las restricciones $x_1+3x_2=0$, $x_3+x_4-5x_2=0$, mediante la aplicación EXCEL, partiendo de $x=\mathbf{0}$ y de (-1, 1, -1, 1) $x^*=(-0.1596, 0.05319, 0.6064, -0.3404)$

ej95.- Determina los mínimos de $f(x)=\{x_1^2+4x_2^2\}$ s.a. $x_1+2x_2\geq 1$, $-x_1+x_2\leq 0$, x_1, $x_2 \geq 0$ mediante la aplicación EXCEL, partiendo de (3,0), (0, 0), (3, 5) y (-7, -9). $x^*=(0.5, 0.25)$

ej98.- Determina los mínimos de $f(x)=\{0.01x_1^2+x_2^2-100\}$ s.a. $10\ x_1-x_2\geq 10$, $2\leq x_1\leq 50$, $-50\leq x_2\leq 50$ mediante EXCEL partiendo de (0, 0). Construir dos modelos de EXCEL, uno en el que todas las condiciones se expresan como restricciones y otro en el que las cotas se fijan fuera del modelo. $x^*=(2, 0)$

ber2.- Consideremos el problema de minimizar $f(x)=\{0.5\ (x_1^2+x_2^2+0.1\ x_3^2)+0.55x_3\}$, s.a. $x_1+x_2+x_3=1$, $x\geq\mathbf{0}$. Aplica los métodos GRG2 y suboptimización en variedades partiendo de la solución inicial (0.5, 0.25, 0.25) y utiliza la regla de minimización para el cálculo de α. Contrasta su evolución y calcula la función de error para el valor de la función objetivo.

ber5.- Consideremos el problema de minimizar $f(x)=\{\ x_1^2+2x_2^2+3x_3^2\}$, s.a. $x_1+x_2+x_3\geq 1$, $x\geq\mathbf{0}$. Aplica los métodos GRG2 y suboptimización en variedades partiendo de la solución inicial (0, 0, 1) y utiliza la regla de minimización para el cálculo de α. Calcula la función de error para el valor de la función objetivo.

bs10.- Consideremos el problema de minimizar $f(x)=\{2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4x_1-6x_2\}$, s.a. $x_1+x_2\leq 2$, $x_1+5x_2\leq 5$, $x\geq\mathbf{0}$. Aplica los métodos GRG2 y suboptimización en variedades partiendo de la solución inicial (0, 0, 2, 5) y utiliza la regla de minimización para el cálculo de α. Calcula la función de error para el valor de la función objetivo.

ej84.- Determina los mínimos de la función $f(x)=\{(x_1-3)^2+(x_2-2)^2\}$ s. a. $x_1^2+ x_2^2-5\leq 0$, $x_1+x_2-3\leq 0$, x_1, $x_2\geq 0$ y discute la optimalidad de la solución obtenida aplicando las condiciones de Karush, Kuhn y Tucker. $x^*=(2, 1)$

ej82.- Determina los mínimos de $f(x)=\{x_1\}$ s. a. $-x_1^3+x_2\ \leq 0$, $-x_1^3-x_2\leq 0$ mediante la aplicación EXCEL. Discutir la optimalidad de la solución aplicando las condiciones de Karush, Kuhn y Tucker. $x^*=(0, 0)$

ej89.- Determina los mínimos de la función f(x)={$-x_1^3+x_2$} s. a. $x_1-x_2\leq 0$, $x_1^2+3x_2\leq 4$, $x_2\geq 0$ mediante la aplicación EXCEL. Discutir la optimalidad de la(s) solucion(es) obtenida(s) aplicando las condiciones de Karush, Kuhn y Tucker. $x^*=\{(0, 0), (1, 1)\}$

bs822.- Determina los mínimos de la función f(x)={x_1+x_2} s. a. $x_1^2+x_2^2=4$, $-2x_1-x_2\leq 4$, mediante la aplicación EXCEL. Discutir la optimalidad de la(s) solucion(es) obtenida(s) aplicando las condiciones de Karush, Kuhn y Tucker. $x^*=(-1.2, -1.6)$

Enero03. Consideremos el siguiente problema de minimización:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 2x_1^3+x_2 \\ \text{s.a.} & x_1^2+x_2\leq 4 \\ & x_2\geq 0 \\ & -3x_1+2x_2\leq 6 \end{array}$$

a) Estudia la posible optimalidad de los puntos siguientes mediante las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad vistas en clase: $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

b) Representa gráficamente la región factible y algunas de las curvas de nivel de la función objetivo e indica qué punto es el mínimo global**.**

c) Realiza dos iteraciones del algoritmo de Programación cuadrática secuencial.

Práctica 3.- Resolución de problemas restringidos utilizando esquemas de penalización

En esta práctica se trata de comparar el comportamiento del método GRG2, implementado en la aplicación EXCEL, y los métodos de penalización desarrollados en el Tema 4: método de minimización irrestringida secuencial y método del Lagrangiano aumentado. Se modelizará el esquema general de estos métodos y se aplicará para resolver algunos de los problemas siguientes.

ej103.- Consideremos el problema de minimizar {x^3+y^3} s.a. x+y=1. Formular el problema de penalización adecuado y partiendo del punto (0, 0) determinar su solución óptima para c=2, β =10 y λ =1.

per77.- Consideremos el problema: Min {x^2+y^2} s. a. $(x-2)^3 -y^2 =0$.

a) Determinar su solución óptima utilizando la teoria de los multiplicadores de Lagrange.

b) b) Formular el problema de penalización adecuado y resolverlo. Discutir la solución obtenida.

bss924.- Consideremos el problema de minimizar {$(x_1-2)^4+(x_1-2x_2)^2$} s.a. $x_1^2-x_2=0$. Formular el problema de penalización adecuado y partiendo del punto (2, 1) determinar su solución óptima para $c^0=0.1$, β=10 y k=4. Discutir la solución obtenida.

ej215.- Consideremos el problema de maximizar $f(x)=\{3x_1+x_3^2-x_2\}$ s.a $x_1+x_2+x_3=0$, $-x_1+x_3^2+2x_2=0$. Formular el problema de penalización adecuado y determinar su solución óptima utilizando un método de minimización secuencial partiendo de (1,1,1).

ej106.- Consideremos el problema de minimizar $\{-x_1x_2x_3\}$, s.a. $72-x_1-2x_2-2x_3=0$. Resolverlo utilizando un método de minimización secuencial partiendo de (1,1,1). Especificar la solución de todos los subproblemas de optimización resueltos.

ej107.- Consideremos el problema

$$\begin{aligned} &\text{Min } \{x_1+x_2-2x_3\} \\ &\text{s.a } x_1^2+x_2^2+x_3^2=9 \\ &\qquad x_1-2x_2^2+x_3=2 \end{aligned}$$

Resolver el problema mediante el método de penalización de los multiplicadores, empezando con $x=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\lambda=0}$ y $c=2$. Resolver con un método de direcciones conjugadas los subproblemas irrestringidos que aparezcan durante la aplicación del método de penalización. Justificar la solución obtenida en cada subproblema de optimización resuelto.

Sep98.- Consideremos el problema de minimizar $\{x_1^3+2x_2^3-(x_1+2x_2+x_1^2)\}$ sujeto a las restricciones $x_1+2x_2\le 6$, $-x_1+2x_2\le 3$, $x_i\ge 0$, i =1, 2. Resolve el problema mediante el método de penalización. Justifica la elección del método. Utilizar un método de direcciones factibles para encontrar la solución óptima de los subproblemas. Realizar tres iteraciones partiendo del punto (1, 1).

Jn99 Consideremos el problema de minimizar $\{-x_1+x_3-x_2\}$ s. a. $x_1^3+x_3^2\le 1$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1$, $x_3\ge 0$. ¿Qué método consideras más adecuado para resolver este problema?. Justifica tu respuesta. Reformula el problema planteado y realiza tres iteraciones del método elegido partiendo del punto $x^1=(0,0,1)$, $\mu^1=(1,1,1)$; para resolver los subproblemas de optimización que aparezcan utiliza esquemas de direcciones factibles.

Set99- Consideremos el problema de minimizar $f(x)=1.5x_1^2+0.5x_2^2-4x_1-x_1x_2-14x_2+x_3+56$, s.a. $x_1+2x_2+x_3=5$, $x_1^2+1\ge x_2$, $x\ge\mathbf{0}$. Reformula adecuadamente el problema. ¿Qué método consideras más adecuado para resolverlo? Partiendo de x=(0,0) realizar 3 iteraciones del método elegido. Justifica teóricamente la solución obtenida en cada subproblema de optimización resuelto.

Set00 Consideremos el problema de maximizar $\{x+y\}$, s.a. $1-x^2-y^2=0$. Reformular el problema para que pueda resolverse mediante una estrategia de penalización. Partiendo del punto $(x,y)^0=(0,1)$, $c^0=0.25$, $\lambda^0=1$, realizar 3 iteraciones de un método de gradiente conjugado, utilizar la regla de minimización o la regla de Armijo para el cálculo de la amplitud de salto.

Set00 Consideremos el problema de minimizar $f(x)= -0.5\,x_1^2+x_3$, s.a. $x_1^2+x_2+x_3\ge 0$, $x_1^2-x_2+x_3\ge 0$, $x_3\ge 0$. ¿Qué método consideras más adecuado para resolverlo? Partiendo de x=(1,1,1) realizar 3 iteraciones del método elegido.