Sistemas de ecuaciones

Problemas

1 Método de Gauss

Resuelve estos sistemas por el método de Gauss:

$$2x - 5y + 4z = 9$$
$$2x - 5y + 4z = 12$$
$$6x + 47 - 7z = -1$$

Solución :

$$x = \frac{-26}{9}, y = \frac{-73}{45}, z = \frac{5}{3}$$

$$x - y + 3z + 8t = 0$$
$$-3x + 4y - 6z + t = 3$$
$$-x + y - 7z = -1$$
$$2x + z - 4t = -2$$

Solución :

$$x = \frac{-393}{368}, y = \frac{177}{368}, z = \frac{67}{184}, t = \frac{21}{368}$$

$$x - y + z + t = 6$$
$$-2x + 10y - 6z + t = 4$$
$$-x + y - 5z + 12t = 34$$
$$2x - y - z - 4t = -19$$

Solución :

$$x = 1, y = 2, z = 3, t = 4$$

$$2x - 6y + 4z + 5t = -1$$
$$x + 8z = 8$$
$$y + 3z - 3t = 6$$
$$3x - 4t = 4$$

Solución :

$$x = 0, y = 0, z = 1, t = -1$$

$$3x - 11y + z + t = -1$$
$$13x + y - z = 8$$
$$y + z - t = 6$$
$$8x - y + z - t = 4$$

Solución :

$$x = \frac{29}{3}, y = \frac{113}{3}, z = \frac{514}{3}, t = -215$$

$$\begin{aligned} x-y+z+t&=-1\\ 13x-z&=8\\ y+z-t&=6\\ 7x-y+z-t&=4 \end{aligned}$$

Solución :

$$x=\frac{7}{9}, y=\frac{67}{18}, z=\frac{19}{9}, t=-\frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} 10x+t&=-10,\\ 13x-12z&=8\\ 6y-t&=6\\ z-2t&=4 \end{aligned}$$

Solución :

$$x=\frac{-8}{11}, y=\frac{6}{11}, z=\frac{-16}{11}, t=-\frac{-30}{11}$$

$$\begin{aligned} 10x+t&=-10\\ 13x-12t&=8\\ 27x+16t&=-48 \end{aligned}$$

Solución :

$$x=\frac{-16}{19}, t=-\frac{-30}{19}$$

$$\begin{aligned} 6x+2y&=-9\\ x-2y&=1\\ 8x-2y&=-7 \end{aligned}$$

Solución :

$$x=\frac{-8}{7}, y=-\frac{-15}{14}$$

$$\begin{aligned} 4x-y+2z+t&=9\\ 13x-12z&=-11\\ 2y+3z-11t&=-14\\ 4x+y+5z-10t&=-5\\ 4y+6z-22t&=-28 \end{aligned}$$

Solución :

$$x=1, y=1, z=2, t=2$$

$$\begin{aligned} x-y+2z+t&=9\\ 13x-12z&=-11\\ 2y+3z-11t&=-14\\ 4x+y+5z-10t&=-5\\ 4y+6z-22t&=-28 \end{aligned}$$

Solución : Sistema incompatible.

$$\begin{aligned} 6x+2y&=0\\ -3x-y&=0\\ 8x+\tfrac{8y}{3}&=0 \end{aligned}$$

Solución : Sistema indeterminado. $x=-3\lambda, y=\lambda, \lambda \epsilon R$

$$\begin{aligned} 3x-4y+z&=-2\\ x+2y+3z&=6\\ 7x-6y+5z&=2 \end{aligned}$$

Solución : Sistema indeterminado.

$$x=-7\lambda+2, y=-4\lambda+2, z=5\lambda, \lambda\epsilon R$$

$$\begin{aligned} 3x-4y+z-2t&=-2\\ x+2y+3z&=6\\ 7x-6y+5z-4t&=2 \end{aligned}$$

Solución : Sistema indeterminado, hay 2 parámetros libres.

$$x=-7\lambda+2\mu+2, y=-4\lambda-6\mu+2, z=5\lambda, t=5\mu; \lambda,\mu\epsilon R$$

2 Análisis de sistemas con parámetros

Vamos a resolver por el método de Gauss este sistema y lo analizaremos según los valores del parámetro a.

$$\begin{aligned} x-3y-4z&=3\\ ax+5y-az&=6\\ 15x+5ay-30z&=3 \end{aligned}$$

Lo ponemos en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & | & 3\\ a & 5 & -a & | & 6\\ 15 & 5a & -30 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Comenzaremos a pivotar:

$$\begin{pmatrix} F_1\mapsto F_1 & 1 & -3 & -4 & | & 3\\ F_2\mapsto aF_1+F_2 & 0 & 3a+5 & 3a & | & -3a+6\\ F_3\mapsto 15F_1+F_3 & 0 & 45+5a & 30 & | & -42 \end{pmatrix}$$

Para poder seguir pivotando, utilizamos el coeficiente 30, que no depende de a.

$$\begin{pmatrix} F_1\mapsto F_1 & 1 & -3 & -4 & | & 3\\ F_3\mapsto F_3 & 0 & 45+5a & 30 & | & -42\\ F_2\mapsto 10F_2-aF_3 & 0 & -5a^2-15a+50 & 0 & | & 12a+60 \end{pmatrix}$$

Y ahora pasaremos a resolver, pero con mucho cuidado.
En la ecuación $(-5a^2-15a+50)y=12a+60$ podremos despejar y siempre que el coeficiente (que es toda la expresión que la multiplica entre paréntesis) sea diferente de 0, así pues, debemos calcular los números que anulan dicho coeficiente. Para ello resolvemos la ecuación de segundo grado :

$$-5a^2-15a+50=0$$

Las soluciones son 2 y -5, además, esto permite factorizar esa expresión :

$$-5a^2-15a+50=-5(a-2)(a+5)$$

En definitiva la ecuación es :

$$-5(a-2)(a+5)y=12a+60$$

Los casos que nos interesan serán pues

- $a = 2$
- $a = -5$
- $a \neq 2$ y $a \neq -5$

1) $a = 2$, la ecuación quedaría $0.y = 84$, que es absurdo, por tanto en este caso el sistema es incompatible.

2) $a = -5$, en este caso la ecuación es $0.y = 0$, esto es cierto para cualquier valor de y, pongamos

$$y = \lambda$$

sustituyendo obtenemos :

$$(45 - 25)\lambda + 30z = -42$$

que da como resultado

$$z = \frac{-21 - 10\lambda}{15}$$

para la incógnita x se tiene que :

$$x = \frac{5\lambda - 39}{15}$$

Así pues, en este caso el sistema es compatible indeterminado.

3) $a \neq 2$ y $a \neq -5$. La ecuación queda

$$y = \frac{12a + 60}{-5(a-2)(a+5)}$$

que se puede simplificar fácilmente:

$$y = \frac{12a + 60}{-5(a-2)(a+5)} = \frac{12(a+5)}{-5(a-2)(a+5)} = \frac{-12}{5(a-2)}$$

Sustituyendo en las otras ecuaciones, sacamos el resto de las variables:

$$z = \frac{-5a + 32}{5(a-2)}; x = \frac{-5a + 62}{5(a-2)}$$

Comprobadlo.
En este caso, el sistema es compatible determinado.

Analizad y resolved según los valores del parámetro a
$$\begin{array}{c} 2x - 4y + az = -1 \\ x - y + 3z = a \\ 3x - 5ay + (a+3)z = 0 \end{array}$$

Solución :

1) Si $a = 6$ el sistema es incompatible.

2) Si $a \neq 6$ el sistema es compatible determinado y sus soluciones son:

$$x = \frac{5a^2 + a + 3}{5a - 30}; y = \frac{1}{5}; z = \frac{10a + 3}{5a - 30}$$