
3. Geometría analítica

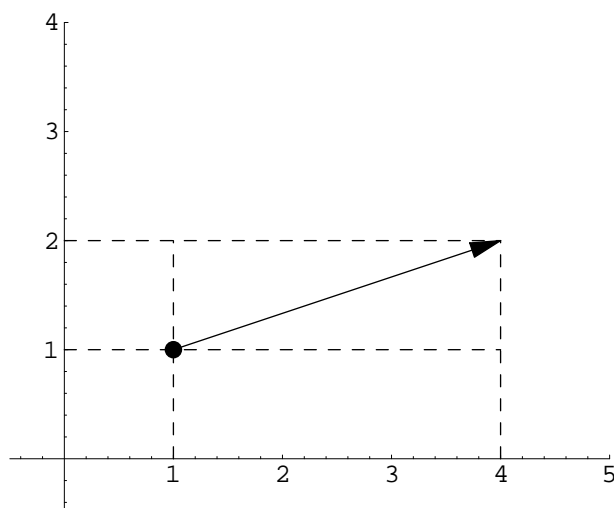
3.1 El espacio afín \mathbb{R}^n

Consideremos el conjunto \mathbb{R}^n , formado por las listas ordenadas (x_1, \dots, x_n) de números reales. Convengamos en llamar *puntos* a los elementos de \mathbb{R}^n .

Pero recordemos que, en el tema anterior, hemos visto que \mathbb{R}^n es un espacio vectorial (porque sus elementos se pueden sumar y se pueden multiplicar por escalares).

Dado un **punto** $P = (p_1, \dots, p_n)$ del conjunto \mathbb{R}^n y un **vector** $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ del espacio vectorial \mathbb{R}^n , podemos considerar que el vector \vec{v} **actúa** sobre el punto P , *trasladándolo* al punto $Q = P + \vec{v} = (p_1 + v_1, \dots, p_n + v_n)$, cuyas coordenadas se obtienen sumando las coordenadas del punto P con las del vector \vec{v} .

Para hacernos una idea intuitiva, observemos la siguiente figura, en la que, sobre el punto $(1, 1)$ en \mathbb{R}^2 actúa el vector $(3, 1)$, para darnos el punto $(4, 2)$.



Cuando se contempla este tipo de “actuación” en \mathbb{R}^n se dice que éste, \mathbb{R}^n , es un **espacio afín**.

Terminología. A los elementos de \mathbb{R}^n como espacio afín les llamaremos **puntos** y los denotaremos mediante letras mayúsculas, P, Q, R, \dots , y a los vectores por letras minúsculas $\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}, \dots$

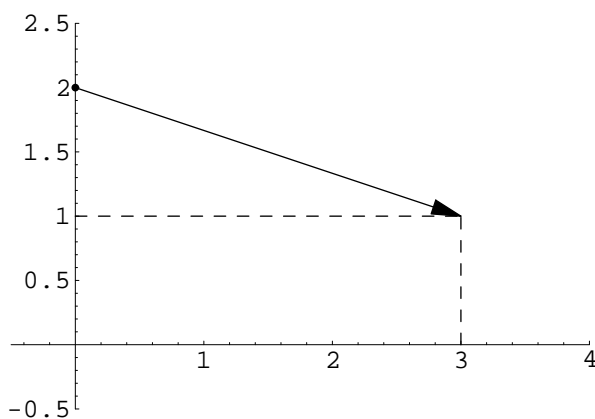
Es evidente que el **espacio afín** \mathbb{R}^n satisface las siguientes propiedades:

A-1) Para cualesquiera $P \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ tenemos que $(P + \vec{v}) + \vec{w} = P + (\vec{v} + \vec{w})$.

A-2) $P + \vec{0} = P$.

A-3) Dados dos puntos $P, Q \in \mathbb{R}^n$, existe un único vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que $P + \vec{v} = Q$. Este vector se denota mediante \overrightarrow{PQ} .

Ejemplo. Sea $P = (0, 2)$ un punto de \mathbb{R}^2 y \vec{v} el vector $(3, -1)$, entonces el punto $P + \vec{v}$ tiene por coordenadas $Q = (0 + 3, 2 - 1) = (3, 1)$.



De otra forma: el vector que va de $P = (0, 2)$ a $Q = (3, 1)$ es $\overrightarrow{PQ} = (3 - 0, 1 - 2) = (3, -1)$, que es el vector \vec{v} .

Propiedades. Sean P, Q y R puntos de \mathbb{R}^n , entonces

- $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.
- $\overrightarrow{PQ} = 0$ si y sólo si $P = Q$.
- $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.

3.2 Sistema de referencia canónico

Definición 3.2.1 Sean $O = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ y sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canónica de \mathbb{R}^n . Al conjunto $S = \{O; e_1, e_2, \dots, e_n\}$ se le llama **sistema de referencia canónico de \mathbb{R}^n** y al punto O se le llama **origen del sistema de referencia**.

Definición 3.2.2 Llamaremos **coordenadas del punto P** en el sistema de referencia canónico S a las coordenadas del vector \overrightarrow{OP} en la base canónica de \mathbb{R}^n , $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Proposición 3.2.3 Si las coordenadas de los puntos $P, Q \in \mathbb{R}^n$ en el sistema de referencia canónico son $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ y $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, respectivamente, entonces las coordenadas del vector \overrightarrow{PQ} en la base canónica son

$$\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, \dots, q_n - p_n).$$

3.3 Variedad lineal afín

Vamos a definir de una forma más matemática los conceptos de recta y plano que ya conocemos de años anteriores.

Definición 3.3.1 Sea V un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n . Se denomina **variedad lineal afín que pasa por $P \in \mathbb{R}^n$** y de **dirección V** al conjunto de puntos

$$V_P = \{Q \in \mathbb{R}^n \text{ tales que } \overrightarrow{PQ} \in V\} = \{P + \vec{v} \text{ tales que } \vec{v} \in V\}.$$

En otras palabras, es el conjunto de todos los puntos Q tales que el vector que une P con Q pertenece al subespacio vectorial V .

Ejemplo. Los ejes coordenados. Dado un sistema de referencia canónico de \mathbb{R}^n , $S = \{O; e_1, e_2, \dots, e_n\}$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, consideramos el subespacio de dimensión 1 generado por el vector e_i de la base, $W^i = \langle e_i \rangle$. Las variedades lineales afines W_O^i , que pasan por el origen con dirección W^i , se llaman **ejes** del sistema de referencia.

Ejemplo. Consideramos el subespacio dirección $V = \langle (1, 2, 3), (-1, 0, 1) \rangle$, es decir, el subespacio vectorial generado por los vectores $\{(1, 2, 3), (-1, 0, 1)\}$, y sea $P = (1, 1, 1)$. La variedad lineal afín que pasa por P con dirección V es el conjunto de puntos

$$\begin{aligned} V_P &= \{Q \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que } \overrightarrow{PQ} = \lambda \cdot (1, 2, 3) + \mu \cdot (-1, 0, 1) \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{Q = (1, 1, 1) + \lambda \cdot (1, 2, 3) + \mu \cdot (-1, 0, 1) \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1 + \lambda - \mu, 1 + 2\lambda, 1 + 3\lambda + \mu) \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Definición 3.3.2 Si V_P es una variedad lineal afín, entonces se denomina *dimensión de V_P* a la dimensión del subespacio vectorial V . En particular,

- si la dimensión de V es 1, entonces se dice que V_P es una **recta**.
- si la dimensión de V es 2, entonces se dice que V_P es un **plano**.
- si la dimensión de V es $n - 1$, entonces se dice que V es un **hiperplano**.

Ejemplo 3.3.3 Sea $P = (0, 0, 1)$ y $V = \langle (1, 0, 0) \rangle$, entonces V_P es una recta que podemos expresar como

$$V_P = \{(x, y, z) = P + \lambda \cdot \vec{v}; \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, 0); \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Otro ejemplo: Sea $Q = (0, 0, 2)$ y $U = \langle (1, 1, 0), (1, -1, 0) \rangle$, entonces U_Q es un plano que podemos expresar como

$$\begin{aligned} U_Q &= \{(x, y, z) = Q + \lambda \cdot (1, 1, 0) + \mu \cdot (1, -1, 0); \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) = (\lambda + \mu, \lambda - \mu, 2); \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda + \mu, \lambda - \mu, 2); \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

3.4 Paralelismo de variedades lineales afines

Definición 3.4.1 Se dice que dos variedades lineales afines U_Q y V_P son paralelas si $V \subset U$ o $U \subset V$.

Esta definición en el caso de una recta significa que tienen el mismo vector director o bien uno es igual al producto de un escalar por el otro. Esto también queda reflejado en la siguiente Proposición.

Proposición 3.4.2 Sean U_Q y V_P dos variedades lineales afines de forma que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$ es una base de U y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s\}$ es una base de V . Entonces, U_Q y V_P son paralelas si y sólo si el rango de $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s\}$ es igual al máximo de r y s .

Por tanto, para averiguar si son o no paralelas hay que estudiar el rango de la familia formada por los vectores directores de las variedades afines. En particular, en \mathbb{R}^3

- dos rectas son paralelas si el rango es 1.
- una recta y un plano son paralelos si el rango es 2.
- dos planos son paralelos si el rango es 2.

Ejemplo. Estudiemos si son o no paralelas la recta y el plano del ejemplo 3.3.3. Las direcciones eran $V = \langle (1, 0, 0) \rangle$ y $U = \langle (1, 1, 0), (1, -1, 0) \rangle$; por tanto, hay que ver si el rango de $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, -1, 0)\}$ es 2. Es fácil probar que el rango es 2, y que por tanto, la recta y el plano son paralelos. De hecho, la recta es paralela al eje x y el plano es paralelo al plano xy .

3.5 Punto que divide un segmento en una proporción dada

Consideremos el segmento que une los puntos P y Q , y sea λ un número real positivo y menor que 1. Queremos encontrar el punto R en el segmento \overrightarrow{PQ} tal que el sub-segmento \overrightarrow{PR} sea λ veces el segmento inicial \overrightarrow{PQ} . Es decir, tal que $\overrightarrow{PR} = \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}$.

Por la definición de la operación suma de puntos y vectores, esta expresión es equivalente a

$$R = P + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}.$$

Por tanto, el punto buscado es el dado por esta expresión.

Nota. Observemos que si λ es más grande que 1 entonces se aumenta el segmento en la proporción dada por λ .

Ejemplo. Calcula el punto que divide el segmento entre $P = (1, 2, 3)$ y $Q = (4, -2, 5)$ en $\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} R &= P + \frac{1}{4}\overrightarrow{PQ} = (1, 2, 3) + \frac{1}{4}(4 - 1, -2 - 2, 5 - 3) = (1, 2, 3) + \frac{1}{4}(3, -4, 2) \\ &= (1, 2, 3) + \left(\frac{3}{4}, -1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{7}{4}, -5, \frac{5}{2}\right). \end{aligned}$$

3.6 Condición para que tres puntos estén en una recta

Proposición 3.6.1 Sean P, Q y R tres puntos de un espacio afín. Los tres puntos pertenecen a la misma recta si y sólo si la familia formada por los dos vectores $\{\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\}$ es una familia ligada (linealmente dependiente).

Ejemplo. Comprueba si los tres puntos $\{(1, 2, 3), (-2, -4, 1), (0, 4, 2)\}$ están en la misma recta.

Los vectores a considerar son $\{(3, 6, 2), (1, -2, 1)\}$ y puesto que es una familia libre, los tres puntos no están en la misma recta.

Ejemplo. Comprueba si los tres puntos $\{(1, 2, 3), (-2, -4, 1), (7, 14, 7)\}$ están en la misma recta.

Los vectores a considerar son ahora $\{(3, 6, 2), (-6, -12, -4)\}$ que sí forman una familia ligada. Por tanto, los tres puntos están en la misma recta.

3.7 Ecuaciones de una variedad lineal afín

Puesto que sólo estudiaremos las variedades afines en los casos $n = 2$ y $n = 3$, sólo hablaremos de las ecuaciones de las rectas y los planos en estos casos.

En el caso $n = 2$; es decir, en \mathbb{R}^2 , las únicas variedades lineales afines no triviales son las de dimensión 1; es decir, las rectas.

3.7.1 Ecuación de una recta en \mathbb{R}^2

En \mathbb{R}^2 consideremos el sistema de referencia afín $\{O; e_1, e_2\}$. Sea $P \in \mathbb{R}^2$ con $P = (p_1, p_2)$ y sea V_P una recta con subespacio dirección $V = \langle \vec{v} \rangle$ con $\vec{v} = (v_1, v_2) = v_1 e_1 + v_2 e_2$.

Ecuación vectorial de una recta en \mathbb{R}^2 . Un punto X pertenece a V_P si y sólo si $\vec{PX} \in V$, si y sólo si existe un escalar λ tal que

$$\vec{PX} = \lambda \vec{v}.$$

Así, la ecuación vectorial de la recta V_P es

$$\boxed{\{X = P + \lambda \cdot \vec{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Ecuación paramétrica de una recta en \mathbb{R}^2 . Un punto X de coordenadas $X = (x, y)$ pertenece a V_P si y sólo si $\vec{PX} \in V$, si y sólo si existe un escalar λ tal que $\vec{PX} = \lambda \cdot \vec{v}$. La expresión $\vec{PX} = (x - p_1, y - p_2) = (x - p_1)e_1 + (y - p_2)e_2$ nos indica que

$$\lambda(v_1 e_1 + v_2 e_2) = (x - p_1)e_1 + (y - p_2)e_2.$$

Haciendo operaciones llegamos a

$$\boxed{\begin{aligned} x &= p_1 + v_1 \lambda, \\ y &= p_2 + v_2 \lambda. \end{aligned}}$$

Así, $V_P = \{X \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } x = p_1 + v_1 \lambda \text{ e } y = p_2 + v_2 \lambda\} = \{(p_1 + v_1 \lambda, p_2 + v_2 \lambda) ; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Ecuación cartesiana de una recta en \mathbb{R}^2 . Sea V_P la recta con dirección $V = \langle \vec{v} \rangle$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Puesto que $\vec{v} \neq 0$, entonces alguno de los escalares v_1 o v_2 es distinto de cero. Suponemos que $v_1 \neq 0$. Despejando el parámetro λ de las ecuaciones paramétricas anteriores tenemos que $\lambda = \frac{x - p_1}{v_1}$. Así, la ecuación cartesiana es

$$\boxed{y - p_2 = v_2 \frac{x - p_1}{v_1}.$$

En el caso de que también $v_2 \neq 0$, podemos escribirla como

$$\boxed{\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}.$$

En este caso, también se denomina **ecuación continua** de la recta.

Ecuación implícita de una recta en \mathbb{R}^2 .

Haciendo operaciones, la ecuación cartesiana de la recta se puede escribir también como

$$\boxed{b_1 x + b_2 y = c,$$

donde $b_1 = v_2$, $b_2 = -v_1$ y $c = v_2 p_1 - v_1 p_2$.

Esta ecuación se denomina ecuación implícita de la recta.

3.7.2 Ecuación de una recta en \mathbb{R}^3

Pasemos ahora al caso $n = 3$; es decir, \mathbb{R}^3 . Las variedades lineales afines no triviales ahora son las rectas (dimensión 1) y los planos (dimensión 2). Los diferentes tipos de ecuaciones de una recta son similares al caso de una recta en el plano, sólo hay que tener en cuenta que estamos en \mathbb{R}^3 .

Ecuación vectorial de una recta en \mathbb{R}^3 . Formalmente es la misma ecuación. Sea V_P una recta y sea $\{\vec{v}\}$ una base del subespacio de dirección V . Un punto X pertenece a V_P si y sólo si $\vec{PX} \in V$, si y sólo si existe un escalar λ tal que

$$\vec{PX} = \lambda \cdot \vec{v}.$$

Así, la ecuación vectorial de la recta V_P es

$$\boxed{\{X = P + \lambda \cdot \vec{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Ecuación paramétrica de una recta en \mathbb{R}^3 . Sea V_P una recta y sea $\{\vec{v}\}$ una base del subespacio de dirección $V = \langle \vec{v} \rangle$. Suponemos que $P = (p_1, p_2, p_3)$ y que $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3 = (v_1, v_2, v_3)$.

Un punto $X = (x, y, z)$ pertenece a V_P si y sólo si $\vec{PX} \in V$, si y sólo si existe un escalar λ tal que $\vec{PX} = \lambda \cdot \vec{v}$. La expresión de $\vec{PX} = (x, y, z) - (p_1, p_2, p_3)$ y sustituyendo el vector \vec{v} , tenemos que

$$\lambda(v_1, v_2, v_3) = (x, y, z) - (p_1, p_2, p_3).$$

Haciendo operaciones, llegamos a

$$\boxed{\begin{aligned} x &= p_1 + v_1\lambda, \\ y &= p_2 + v_2\lambda, \\ z &= p_3 + v_3\lambda. \end{aligned}}$$

Así, $V_P = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que satisfacen las ecuaciones anteriores}\}$.

Ecuación cartesiana de una recta en \mathbb{R}^3 . Sea V_P la recta con dirección $V = \langle \vec{v} \rangle$, donde $\vec{v} = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$. Puesto que $\vec{v} \neq 0$, alguno de los escalares v_1, v_2, v_3 es distinto de 0. Supongamos que $v_1 \neq 0$ y pongamos $P = (p_1, p_2, p_3)$. Despejando el parámetro λ de las ecuaciones paramétricas anteriores tenemos que $\lambda = \frac{x-p_1}{v_1}$. Así, las ecuaciones cartesianas son

$$\boxed{\begin{aligned} y - p_2 &= v_2 \frac{x-p_1}{v_1}, \\ z - p_3 &= v_3 \frac{x-p_1}{v_1}. \end{aligned}}$$

En el caso de que también $v_2 \neq 0, v_3 \neq 0$, podemos escribirlas como

$$\boxed{\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} = \frac{z-p_3}{v_3}.$$

Ecuaciones implícitas de una recta en \mathbb{R}^3 . Operaciones con las ecuaciones anteriores permiten llegar a expresiones de la forma

$$\boxed{\begin{aligned} b_1x + b_2y &= d_1, \\ c_1x + c_3z &= d_2, \end{aligned}}$$

que se pueden ver como un sistema de ecuaciones lineales. Ahora bien, puesto que si hacemos combinaciones lineales con las dos ecuaciones, los sistemas resultantes son equivalentes, entonces, también podemos escribir las ecuaciones de una recta en el espacio de la forma más general

$$\begin{cases} b_1x + b_2y + b_3z = d_1 \\ c_1x + c_2y + c_3z = d_2. \end{cases}$$

Estas expresiones se denominan ecuaciones implícitas de la recta en \mathbb{R}^3 .

Ecuación vectorial de un plano en \mathbb{R}^3 . Sea V_P un plano y sea $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ una base del subespacio de dirección V . Un punto X pertenece a V_P si y sólo si $\vec{PX} \in V$, si y sólo si existen escalares λ y μ tales que

$$\vec{PX} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}.$$

Así, la ecuación vectorial del plano V_P es

$$\{X = P + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Ecuación paramétrica de un plano en \mathbb{R}^3 . Sea V_P un plano y sea $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ una base del subespacio de dirección V . Supongamos que $P = (p_1, p_2, p_3)$ y sean

$$v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3 = (v_1, v_2, v_3), \quad w = w_1e_1 + w_2e_2 + w_3e_3 = (w_1, w_2, w_3).$$

Un punto X , de coordenadas $X = (x, y, z)$, pertenece a V_P si y sólo si $\vec{PX} \in V$, si y sólo si existen escalares λ, μ tales que

$$\vec{PX} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}.$$

Con la expresión $\vec{PX} = (x, y, z) - (p_1, p_2, p_3)$ y sustituyendo los vectores \vec{v}, \vec{w} , tenemos que

$$\lambda(v_1, v_2, v_3) + \mu(w_1, w_2, w_3) = (x, y, z) - (p_1, p_2, p_3).$$

Haciendo operaciones llegamos a

$$\begin{cases} x = p_1 + v_1\lambda + w_1\mu, \\ y = p_2 + v_2\lambda + w_2\mu, \\ z = p_3 + v_3\lambda + w_3\mu. \end{cases}$$

Así, $V_P = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que cumplen las ecuaciones anteriores}\}.$

Ecuación implícita de un plano en \mathbb{R}^3 . Las ecuaciones paramétricas anteriores forman un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, los parámetros λ y μ . Puesto que los vectores \vec{v}, \vec{w} son linealmente independientes, al menos uno de los tres sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas que se

pueden formar con estas ecuaciones es un sistema de Cramer. Resolviéndolo, se obtendrán valores para λ y μ que, sustituidos en la tercera ecuación, nos proporcionarán una de la forma

$$c_1x + c_2y + c_3z = d.$$

Esta expresión se denomina ecuación implícita del plano, que también puede obtenerse a partir de los dos razonamientos siguientes

- (i) Un punto del plano, $P = (x_0, y_0, z_0)$, y dos vectores linealmente independientes, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, los cuales nos determinan el subespacio de dirección del plano. La ecuación del plano se puede obtener con

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

- (ii) Tres puntos del plano, P_1, P_2 y P_3 no alineados. Entonces, los vectores de dirección pueden ser $\vec{P_2P_1}$ y $\vec{P_3P_1}$ y el punto el P_1 . Ahora la ecuación se puede obtener como en el apartado anterior.

3.8 El espacio euclídeo \mathbb{R}^n

Hasta ahora hemos estudiado la estructura de espacio vectorial de \mathbb{R}^n ; es decir, considerando sólo vectores. Después hemos estudiado la estructura de espacio afín; es decir, considerando los elementos de \mathbb{R}^n como puntos y definiendo una suma entre puntos y vectores. Nos falta otro concepto, el de distancia entre puntos, o, equivalentemente, el de longitud de vectores. El resultado de añadir la noción de distancia al espacio afín da lugar al concepto de espacio euclídeo.

La noción básica para definir distancias y longitud es la de producto escalar.

Definición 3.8.1 La aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle (v_1, v_2, \dots, v_n), (w_1, w_2, \dots, w_n) \rangle = v_1w_1 + v_2w_2 + \dots + v_nw_n,$$

se denomina producto escalar euclídeo. También se suele utilizar la notación $\vec{v} \cdot \vec{w} = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

Ejemplo. Calculamos el producto escalar de dos vectores de \mathbb{R}^2 y dos de \mathbb{R}^3 ,

$$(1, 2) \cdot (-1, 3) = -1 + 6 = 5 \quad , \quad (2, 3, 5) \cdot (-4, 0, 1) = -8 + 0 + 5 = -3.$$

Propiedades 3.8.2 El producto escalar verifica las siguientes propiedades:

- Es simétrico, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$.
- $\langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{s} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{s} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{s} \rangle$.

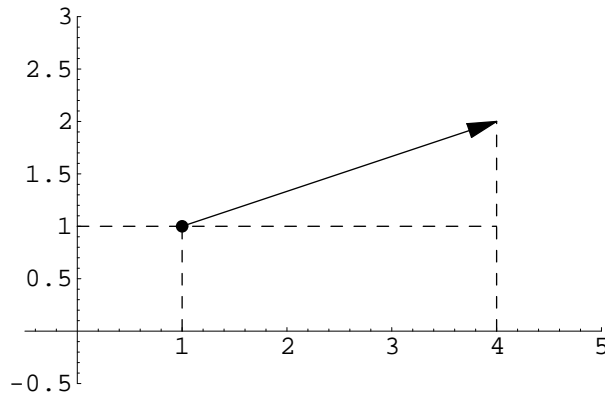
- $\langle \alpha \cdot \vec{v}, \vec{w} \rangle = \alpha \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.
- **Definido positivo**, $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$.
- $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ si y sólo si $\vec{v} = 0$.

Una vez definido el producto escalar, ya podemos definir longitudes y distancias.

Definición 3.8.3 Definimos la **longitud** o **norma** de un vector $v \in \mathbb{R}^n$ como

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}.$$

Definimos la **distancia entre dos puntos** $P, Q \in \mathbb{R}^n$, como la longitud del vector que los une \vec{PQ} .



Ejemplos 3.8.4 La longitud de $\vec{v} = (4, 2, -4)$ es

$$\|(4, 2, -4)\| = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6.$$

La distancia del punto $P = (-1, 0, 3)$ al punto $Q = (3, 2, -1)$ es igual a la longitud del vector $\vec{PQ} = (3 - (-1), 2 - 0, -1 - 3) = (4, 2, -4) = \vec{v}$; es decir, la distancia es $\|(4, 2, -4)\| = 6$.

Definición 3.8.5 Sean \vec{v}, \vec{w} dos vectores, entonces

- Diremos que un vector es **unitario** si es de longitud o norma igual a 1.
- Diremos que \vec{v} y \vec{w} son **ortogonales** si su producto escalar es cero, es decir, si $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$.
- Diremos que \vec{v} y \vec{w} son **ortonormales** si son unitarios y ortogonales.

Definición 3.8.6 Dado un subespacio vectorial V de \mathbb{R}^n , se llama **complemento ortogonal** de V al conjunto

$$V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in V\}.$$

Se comprueba fácilmente de V^\perp es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n de dimensión $n - \dim V$.

Se dice que una variedad afín V_P es ortogonal a un vector \vec{v} si $\vec{v} \in V^\perp$.

Nota 3.8.7 La ecuación de un plano en \mathbb{R}^3 ortogonal a un vector (a, b, c) ($\neq (0, 0, 0)$) se determina del siguiente modo: Si $P = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto cualquiera del plano, para cualquier otro punto $X = (x, y, z)$ se debe tener que el vector $\overrightarrow{PX} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, que pertenece al subespacio vectorial generador del plano, ha de ser ortogonal al vector (a, b, c) , por lo que

$$0 = \langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), (a, b, c) \rangle = ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0),$$

es decir, la ecuación es de la forma

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Recíprocamente, si un plano en \mathbb{R}^3 tiene por ecuación

$$ax + by + cz + d = 0,$$

y consideramos en él tres puntos no alineados $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$, los vectores

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

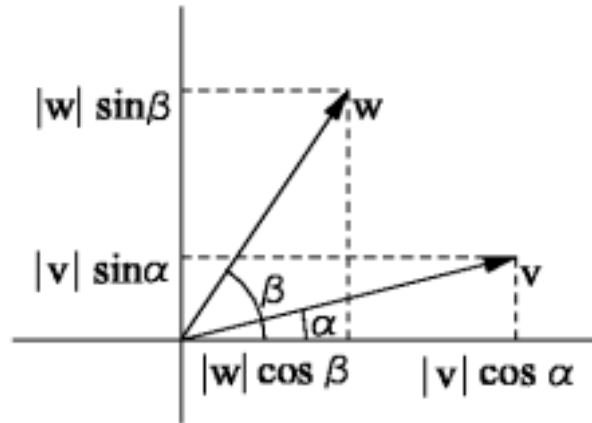
determinan el subespacio de dirección del plano. Si calculamos sus productos escalares por el vector $\vec{v} = (a, b, c)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \overrightarrow{P_2P_1} &= a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = ax_2 + by_2 + cz_2 - (ax_1 + by_1 + cz_1) \\ &= d - d = 0, \\ \vec{v} \cdot \overrightarrow{P_3P_1} &= a(x_3 - x_1) + b(y_3 - y_1) + c(z_3 - z_1) = ax_3 + by_3 + cz_3 - (ax_1 + by_1 + cz_1) \\ &= d - d = 0. \end{aligned}$$

por lo que el plano de ecuación $ax + by + cz + d = 0$ es ortogonal al vector (a, b, c) .

3.9 Interpretación trigonométrica del producto escalar

Dados dos vectores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, escribiremos sus coordenadas, con respecto a la base canónica de \mathbb{R}^2 en función del ángulo que forman con el eje x .



Observando este gráfico vemos que podemos expresar las coordenadas $\vec{v} = (v_1, v_2)$ en función del ángulo que forma el vector con el eje x y su longitud (coordenadas polares) como sigue,

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{v_1}{\|\vec{v}\|} & v_1 &= \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha, \\ \sin \alpha &= \frac{v_2}{\|\vec{v}\|} & v_2 &= \|\vec{v}\| \cdot \sin \alpha, \end{aligned}$$

y por tanto, podemos escribir el vector como $\vec{v} = \|\vec{v}\| \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Si hacemos lo mismo con el vector \vec{w} llegamos a la expresión $\vec{w} = \|\vec{w}\| \cdot (\cos \beta, \sin \beta)$.

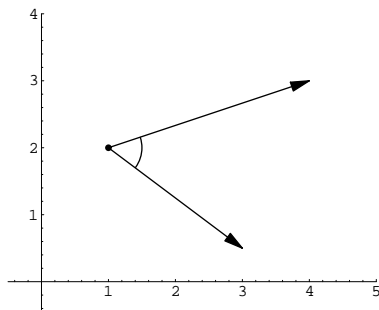
Calculamos ahora el producto escalar de los dos vectores

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \langle (\cos \alpha, \sin \alpha), (\cos \beta, \sin \beta) \rangle \\ &= \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\beta - \alpha), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la fórmula del coseno de la suma (ver ecuación (7.4)). Por tanto, tiene sentido la siguiente definición.

Definición 3.9.1 Sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$. Definimos el ángulo que forman \vec{v} y \vec{w} como el número real θ tal que

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}.$$



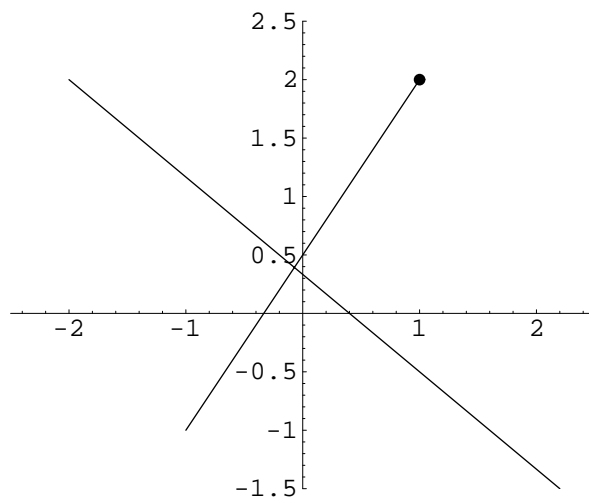
De acuerdo con la anterior definición se tiene que

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cos \theta,$$

es decir, el producto escalar de dos vectores es igual al producto de sus normas multiplicado por el coseno del ángulo que forman.

3.10 Distancia de un punto a una recta en \mathbb{R}^2

Sea $P = (x_0, y_0)$ un punto y sea ℓ una recta de ecuación $ax + by + c = 0$, con $(a, b) \neq (0, 0)$. La distancia de P a la recta ℓ se define como la distancia entre el punto P y el punto intersección de ℓ con la recta ortogonal a ℓ que pasa por P .



Calculemos explícitamente la distancia. Un vector director de la recta es $(-b, a)$. Por tanto, un vector ortogonal al vector director es el vector (a, b) . La recta que pasa por P y es ortogonal a la recta ℓ tiene

como ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \lambda \cdot a, \\y &= y_0 + \lambda \cdot b.\end{aligned}$$

El punto intersección con la recta ℓ se obtiene cuando se sustituye este valor en la recta ℓ ,

$$a(x_0 + \lambda a) + b(y_0 + \lambda b) + c = 0.$$

Despejando el parámetro λ ,

$$\lambda = -\left(\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\right).$$

Por tanto, el punto intersección es $Q = (x_1, y_1)$, donde

$$x_1 = x_0 - \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} a, \quad y_1 = y_0 - \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} b.$$

La distancia entre P y Q es igual a

$$\begin{aligned}d(P, Q) &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \sqrt{\left(\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} a\right)^2 + \left(\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} b\right)^2} \\&= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},\end{aligned}$$

de modo que la fórmula buscada es

$$d(P, \ell) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ejemplo. Calcula la distancia entre el punto $P = (1, 2)$ y la recta $2x + 3y - 2 = 0$.

La solución es

$$d(P, \text{recta}) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-2)|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

El dibujo correspondiente es el que hay en este apartado.

3.11 Distancia de un punto a un plano en \mathbb{R}^3

Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto y sea π un plano de ecuación $ax + by + cz + d = 0$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. La distancia de P al plano π se define como la distancia entre P y el punto intersección de π con la recta ortogonal a π que pasa por P .

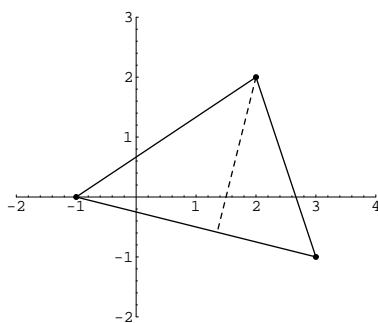
De una manera muy parecida a la del apartado anterior se puede obtener la expresión de la distancia de un punto a un plano.

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

3.12 Área de un triángulo

Sean P, Q, R tres puntos en \mathbb{R}^3 no colineales; es decir, que no están en la misma recta. El área del triángulo definido por los tres puntos se puede calcular simplemente a partir de una aplicación de la fórmula de la distancia de un punto a una recta. En efecto, calculemos primero la recta que pasa por dos de los puntos, digamos P y Q . Entonces, la distancia del otro punto, R , a la recta, es la altura del triángulo si tomamos como base el lado \vec{PQ} . Por tanto, el área del triángulo es

$$\text{área triángulo } PQR = \frac{1}{2}d(P, Q)d(R, \text{recta } PQ).$$

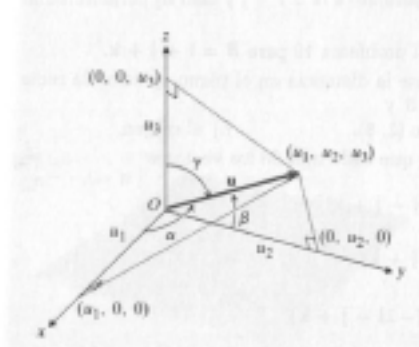


3.13 Cosenos directores

Sea ℓ una recta en \mathbb{R}^3 . Los cosenos directores de la recta son los cosenos de los ángulos que forma la recta con los ejes coordenados. Es decir, los ángulos definidos por un vector director de la recta y cada uno de los tres vectores de la base canónica. Si (a, b, c) es un vector director de la recta,

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\langle (a, b, c), (1, 0, 0) \rangle}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{\langle (a, b, c), (0, 1, 0) \rangle}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{\langle (a, b, c), (0, 0, 1) \rangle}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.\end{aligned}$$

Observemos que el vector de componentes $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ es el vector (a, b, c) normalizado; es decir, es un vector en la misma dirección, pero de norma igual a 1. Por tanto, es también un vector director de la recta.



Los cosenos directores de un plano son los cosenos directores de una recta normal al plano. Si el plano tiene como ecuación $ax + by + cz + d = 0$, entonces los cosenos directores son

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right).$$

3.14 El producto vectorial

Vamos ahora a definir una operación entre vectores de \mathbb{R}^3 , es decir, una aplicación que a cada par ordenado de vectores le hará corresponder otro vector.

Definición 3.14.1 Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de \mathbb{R}^3 y sean $\vec{v} = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3 = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = w_1e_1 + w_2e_2 + w_3e_3 = (w_1, w_2, w_3)$ dos vectores de \mathbb{R}^3 . Definimos el producto vectorial de \vec{v} y \vec{w} y lo denotamos por $\vec{v} \wedge \vec{w}$ como el vector

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} e_3.$$

Como regla mnemotécnica para su cálculo se puede usar el desarrollo formal por los elementos de la primera fila del “determinante”:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Las siguientes propiedades del producto vectorial son consecuencia de propiedades semejantes de los determinantes.

Propiedades 3.14.2 . Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{r} \in \mathbb{R}^3$ vectores y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

(i) $\vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge \vec{v}$.

(ii) $\vec{v} \wedge \vec{w} = 0$ si y sólo si los vectores \vec{v}, \vec{w} son linealmente dependientes.

(iii) El producto vectorial de dos vectores es ortogonal a cada uno de ellos, es decir,

$$\langle \vec{v} \wedge \vec{w}, \vec{v} \rangle = 0 \quad , \quad \langle \vec{v} \wedge \vec{w}, \vec{w} \rangle = 0.$$

(iv) $(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} \wedge \vec{w} + \beta \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}.$

(v) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \cdot \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \cdot \vec{u}.$

(vi) $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v} \wedge \vec{w}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{w} \wedge \vec{u}, \vec{v} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$

(vii) $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{r} \wedge \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{r} \rangle \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{r} \rangle \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle .$

Nota. La expresión $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle$ se denomina **producto mixto** de los vectores \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} .

La última de las propiedades nos da una interpretación del módulo del producto vectorial de dos vectores. En efecto, si θ es el ángulo definido por los dos vectores, entonces

$$\begin{aligned} \|\vec{v} \wedge \vec{w}\|^2 &= \langle \vec{v} \wedge \vec{w}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 = \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \cos^2(\theta) \\ &= \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 (1 - \cos^2(\theta)) = \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot \sin^2(\theta). \end{aligned}$$

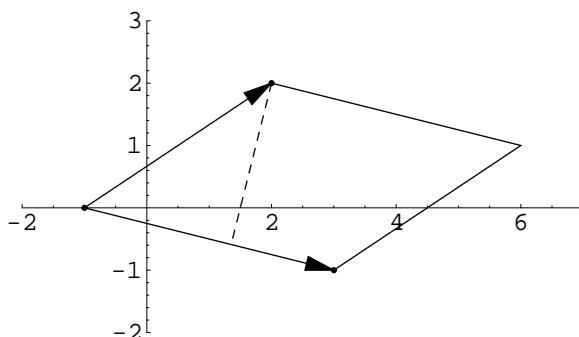
Por tanto,

$$\|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin(\theta).$$

3.15 Áreas y volúmenes

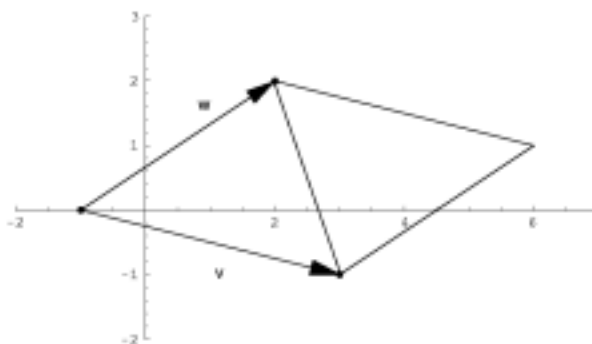
La expresión anterior se puede interpretar como el área del paralelogramo definido por los vectores \vec{v} y \vec{w} . En efecto $\|\vec{w}\| \sin \theta$ corresponde a la altura del paralelogramo si tomamos otro vector \vec{v} como base del mismo.

$$\text{Área} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \sin(\theta).$$



Además tenemos así otra manera de calcular áreas de triángulos. Sean P, Q, R tres puntos en \mathbb{R}^3 no colineales. El área del triángulo definido por los tres puntos es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores \vec{PQ} y \vec{PR} . Es decir,

$$\text{área triángulo } PQR = \frac{1}{2} \|\vec{PQ} \wedge \vec{PR}\|.$$



Una vez vista la interpretación del módulo del producto vectorial y conocida también la interpretación del producto escalar, podemos también calcular volúmenes de paralelepípedos, de prismas y de pirámides.

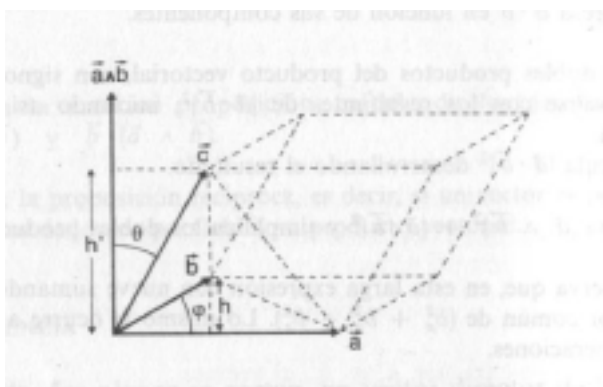
En particular, dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$,

- (i) el volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores es igual al área de la base ($\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ según hemos calculado) multiplicada por la altura ($h = \|\vec{w}\| \cdot \cos \theta$), y por lo tanto,

$$\text{Volumen} = \text{Área base} \times \text{altura} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \theta,$$

es decir,

$$\text{Volum Parap} = \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle.$$



(ii) el volumen del prisma definido por los mismos tres vectores es

$$\text{Volum Prisma} = \frac{1}{2} \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle.$$

Cabe señalar que la base es triangular y de área la mitad de la base anterior (y por eso aparece el $\frac{1}{2}$!).

(iii) el volumen de la pirámide definida por los mismos tres vectores es

$$\text{Volum Pirámide} = \frac{1}{6} \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle.$$

3.16 Ejercicios

- 1 Encontrar las coordenadas del punto medio del segmento definido por los puntos $(-4, -2)$ y $(8, 4)$ y encontrar también las coordenadas de los puntos que lo dividen en tres partes iguales.
- 2 Los puntos $(2, -3)$, $(3, 2)$ y $(4, x)$ están en línea recta. Calcula x y representa gráficamente la recta.
- 3 Los puntos $A = (3, 1)$, $B = (2, 4)$ y $C = (-1, -1)$ determinan un triángulo. Escribe las ecuaciones de los lados, de las medianas y de las rectas que unen los puntos medios de dos lados.
- 4 Las rectas $x + y - 1 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$ y $3x - 2y + 6 = 0$ determinan un triángulo. Calcula las coordenadas de los vértices y escribe las ecuaciones de las paralelas a los lados trazadas por los vértices opuestos.
- 5 Los puntos medios de los lados de un cierto triángulo son $(-1, -2)$, $(6, 1)$ y $(3, 2)$. Encontrar las coordenadas de los vértices del triángulo.
- 6 En un triángulo las coordenadas de dos de los vértices son $(-7, -1)$, $(-2, -9)$. Sabemos también que el punto intersección de las rectas medianas es el origen. Calcula las coordenadas del tercer vértice.
- 7 Encuentra las ecuaciones de la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta $\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{y-3}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{1}$.
- 8 Encuentra las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(2, 2, 1)$ y es paralela a los planos $x + z + 1 = 0$ y $3x - 3y - 2z = 0$.
- 9 Encuentra la ecuación del plano determinado por el punto $(3, 1, 0)$ y que es paralelo al plano XZ .
- 10 Encuentra la ecuación del plano determinado por el punto $(2, -1, 1)$ y que es paralelo al plano $2x + 4y - z = 7$.
- 11 Encuentra la ecuación del plano que pasa por los puntos $(3, -1, 4)$, $(1, 1, -1)$ y es paralelo a la recta $x = z, y = -z$.
- 12 Encuentra la ecuación del plano que pasa por el punto $(2, 1, -1)$ y es paralelo a las rectas $r_1) x = z = y$ y $r_2) x = -2z, y = -3z$.
- 13 Encuentra la ecuación del plano que pasa por la recta $x = z - 3, y = 2z + 2$ y es paralela a la recta $x = 2, y = z$.

14 Las ecuaciones de una recta son $2x + 3y - 4z + 1 = 0$, $x + 5y + z - 7 = 0$. Demuestra que la recta está en el plano $4x - y - 14z + 17 = 0$.

15 Averigua si se cortan las siguientes rectas

$$x = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}, \quad x - 2 = \frac{y - 3}{4} = \frac{z - 4}{2}.$$

16 Encuentra las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(1, 0, -1)$ y corta las rectas $r_1) x = 3y = 3z - 1$ y $r_2) x = y - 4 = 1 - z$.

17 Encuentra las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(1, -1, 3)$, corta a la recta $x = 3, y = z - 2$ y es paralela al plano $x + 4y + z = 0$.

18 ¿Qué propiedad geométrica tiene el triángulo de vértice $(-6, 3)$, $(-2, -1)$ y $(3, 8)$?

19 ¿Qué propiedad geométrica tiene el triángulo de vértice $(-7, 4)$, $(-2, -1)$ y $(6, 7)$?

20 Los puntos $A = (-6, 2)$, $B = (3, -4)$ y $C = (8, 8)$ determinan un triángulo. Demuestra que la longitud del segmento que une los puntos medios de AB y BC es igual a la mitad de la longitud de AC .

21 Determina las ecuaciones de las rectas perpendiculares a $2x - 3y + 16 = 0$ que pasan por los puntos $(4, -3)$ y $(7, -2)$. ¿Cuáles son las coordenadas de los pies de las rectas perpendiculares?

22 Los vértice de un triángulo son $(7, 2)$, $(-5, -3)$ y $(-3, 2)$. Determina los ángulos del triángulo.

23 Un trapecio está formado por las rectas $3x - 4y = 5$, $3x - 4y + 10 = 0$, $2x - y + 5 = 0$ y $y = 7$. Encuentra la longitud del perímetro y el área.

24 Una recta que pasa por el punto $(4, -2, 3)$ corta perpendicularmente un plano en el punto $(5, 1, 7)$. Encuentra la ecuación del plano.

25 Encuentra la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1, 1, -1)$, $(2, 0, 2)$ y $(0, -2, 1)$.

26 Obtener la ecuación del plano determinado por el punto $(3, 1, 0)$ y la recta $x = 3z + 1, y = z + 2$.

27 Encuentra la ecuación del plano que pasa por el punto $(0, 2, -1)$ y es perpendicular al vector $(3, -2, -1)$.

28 Encuentra la ecuación del plano perpendicular al plano XY y que pasa por los puntos $(2, 1, 3)$ y $(-4, -6, 0)$.

- 29 Encuentra la ecuación del plano perpendicular a los planos $x - 3y + z - 6 = 0$ y $x + 4z - 8 = 0$ y que pasa por el punto $(4, 2, -1)$.
- 30 Encuentra la ecuación del plano que pasa por el punto $(-5, 2, 7)$, pasa por el punto -4 del eje X y es perpendicular al plano $x - 2z + 6 = 0$.
- 31 Prueba que la recta intersección de los planos $\pi_1 \equiv x + 2y - 2z = 5$ y $\pi_2 \equiv 5x - 2y - z = 0$ es paralela a la recta
- $$x = -3 + 2t \quad , \quad y = 3t \quad , \quad z = 1 + 4t.$$
- b) Encuentra las ecuaciones del plano determinado por las dos rectas.
- 32 Encuentra el ángulo entre la recta $x + y - 2z + 4 = 0$, $2x - 3y - z - 5 = 0$ y el plano $3x - 5y - 7z + 2 = 0$.
- 33 Si la distancia del origen al plano $3x + 4y - 12z + k = 0$ es 4, ¿Cual es el valor del parámetro k ?
- 34 Encuentra la ecuación del plano tal que su distancia al punto $(2, -3, 1)$ es 3 y tal que su recta normal tiene cosenos directores proporcionales a $(1, 4, -8)$. (Nota: Hay dos soluciones.)
- 35 Un plano que pasa por el punto $(2, 5, -1)$ es normal a una recta de la cual conocemos dos de los ángulos directores, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ y $\beta = \frac{2\pi}{3}$. Encuentra la ecuación del plano. (Nota: Hay dos soluciones.)
- 36 Determina el ángulo entre los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 5$ y $\pi_2 \equiv x + 2y + z = 7$.
- 37 Encuentra el volumen del tetraedro formado por el plano $Ax + By + Cz + D = 0$ y los planos coordenados. (A, B, C, D no nulos.)
- 38 Dado el tetraedro que tiene como vértices los puntos $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(-2, 1, 0)$ y $(1, 1, 1)$, calcula la longitud de su lados, el área de las caras y el volumen.