

TEORIA

1. Demuestra que si p és un punt d'una superfície regular orientada, la curvatura mitjana H de S en p és igual a la mitjana aritmètica de les curvatures normals en dos direccions perpendiculars qualsevol del pla tangent a S en p .
2. Enuncia i demostra el teorema fonamental de les corbes a l'espai $\mathbb{R}^3$ (només UNICITAT).

EXERCICIS

1. Siga $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba amb curvatura $\kappa \neq 0$, definim una nova corba

$$\beta(s) = T_\alpha(s).$$

Aquesta corba s'anomena imatge esfèrica tangent o indicatriu tangent.

- (a) Demuestra que

$$\kappa_\beta = \sqrt{1 + \frac{\tau_\alpha^2}{\kappa_\alpha^2}}, \quad \tau_\beta = \frac{\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)'}{\kappa_\alpha \left(1 + \frac{\tau_\alpha^2}{\kappa_\alpha^2}\right)}$$

- (b) Prova que la imatge esfèrica tangent es una corba constant si i només si la corba és una línia recta.
2. Considereu el tor donat per la marametrització:

$$\mathbf{x}(u, v) = ((R + r \cos(v)) \cos(u), (R + r \cos(v)) \sin(u), r \sin(v))$$

on $R > r$ son constants i $u, v \in (0, 2\pi)$.

- (a) Demuestra que el tor és una superfície parametritzada regular.
- (b) Calcula l'àrea del tor.
- (c) Calcula la curvatura Gaussiana i mitjana.
- (d) Classifica els punts del tor per la seva curvatura Gaussiana i mitjana.