

GEOMETRIA DIFERENCIAL CLASSICA – Primer parcial
20 de Gener del 2016

TEORIA (Fins 4.5 punts)

Demostre les afirmacions següents:

1. Siga $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una corba regular plana. L'angle de rotació $\theta(t)$ i la curvatura signada $\kappa(t)$ de α estan relacionades per

$$\theta'(t) = \|\alpha'(t)\|\kappa(t).$$

2. En cada punt p d'una superfície regular M l'operador de forma és un operador lineal $S_p : T_p M \rightarrow T_p M$ en el pla tangent de M en p . A més a més, l'operador de forma és simètric, és a dir $(S(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = (S(\mathbf{w}), \mathbf{v})$ per a qualsevol parell de vectors tangents a M en p .
3. Si p és un punt no umbilical de la superfície regular $M \subset \mathbb{R}^3$ llavors hi ha exactament dos direccions principals, i són ortogonals. A més a més, si $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ sn els vectors principals en estes direccions, aleshores les curvatures principals de M en p són els valors propis de S , i els vectors principals de M en p són els vectors propis de S .
4. Siga p un punt de la superfície regular $M \subset \mathbb{R}^3$. Aleshores,
 - (a) si $K(p) > 0$, no hi ha direccions asimptòtiques en p .
 - (b) Si $K(p) < 0$, aleshores hi ha exactament dues direccions asimptòtiques en p que queden bisectades per les direccions principals en un angle θ tal que

$$\tan^2 \theta = -\frac{k_1(p)}{k_2(p)}.$$

- (c) Si $K(p) = 0$, aleshores tota direcció és asimptòtica si p es punt pla; si no, hi ha exactament una direcció asimptòtica que és també principal.

GEOMETRIA DIFERENCIAL CLASSICA – Primer parcial
20 de Gener de 2016

EXERCICIS (Fins 5.5 punts)

1. Demuestra que si una corba amb curvatura i torsió no nul·les, i amb curvatura no constant verifica que

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2 = r^2$$

amb $r > 0$ aleshores la corba està continguda en una esfera de radi r . (Ajuda: Demuestra primer que $\alpha + \frac{1}{\kappa}N - \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \frac{1}{\tau}B$ és constant. Aquest punt és el centre de l'esfera.)

2. Sigui α una corba parametritzada per longitud d'arc, amb curvatura κ i torsió τ . Considereu la superfície tubular

$$\mathbf{x}(s, v) = \alpha(s) - rN(s) \cos(v) + rB(s) \sin v$$

on N i B són els vectors normal i binormal de la corba α . Suposeu també que r és constant i que $r\kappa(s) < 1$.

- (a) Demuestra que $\mathbf{x}$ és una superfície parametritzada regular.
 - (b) Calculeu la primera forma fonamental de $\mathbf{x}$.
 - (c) Si $\alpha(s) = 2(\cos(s/2), \sin(s/2), 0)$ i $r = 1$ calculeu el pla tangent en $p = (3, 0, 0)$.
3. ¹ Considereu el catenoide donat per la parametrització:

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos(u) \cosh(v), \sin(u) \cosh(v), v)$$

on $u \in (0, 2\pi)$, $v \in \mathbb{R}$.

- (a) Comproveu que l'imatge per la aplicació de Gauss d'un paral·lel del catenoide és un paral·lel de l'esfera S^2 . de què centre i radi? Descriviu l'imatge de l'aplicació de Gauss del catenoide. Ajuda: $\cosh(v) = \frac{e^v + e^{-v}}{2}$, $\sinh(v) = \frac{e^v - e^{-v}}{2}$.
- (b) Determineu la matriu de l'operador de forma S en $p = (1, 0, 0)$, respecte de la base del pla tangent donada pels vectors $(0, 1, 1)_{(1,0,0)}$ i $(0, 1, -1)_{(1,0,0)}$.

¹L'exercici 3 puntua el doble

- (c) Calculeu la curvatura Gaussiana i mitjana del catenoide en p a partir dels invariants algebraics del operador de forma.
- (d) Calculeu la curvatura Gaussiana y mitjana a partir de la primera y segona formas fonamentals i compara el resultat amb l'apartat anterior.
- (e) Classifica els punto del catenoide en funció de les curvatures Gaussiana i mitjana.