2

Introduccion a la Teoría de Haces (v.1.0)

En la Leccion anterior introdujimos los anillos de funciones locales holomorfas, $\mathcal{O}(\mathcal{U})$. Cuando uno quiere tener en consideracion y organizar el conjunto de todos los anillos de funciones locales holomorfas $\mathcal{O}(\mathcal{U}_\alpha)$ para todos los diferentes abiertos $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_\alpha, \ldots \subset M$ surge el concepto de **haz** *de funciones holomorfas.*

La nocion de haz de funciones sera fundamental en lo que sigue pues nos permitira organizar los anillos de funciones locales y relacionarlos entre si. Es el concepto que nos permitira mas adelante 'pegar entre si' los diferentes anillos de funciones locales para obtener informacion global.

Mas aun, cuando se tiene en cuenta el haz de funciones (formado por todos los anillos locales) este da lugar a un nuevo espacio con propiedades geometricas propias: lo que los geometras algebraicos llaman el **espacio etale** *del haz (y que los analistas llaman simplemente* **haz***).*

2.1 Prehaces de grupos abelianos

Definicion

Sea M un espacio topologico, y sea $\mathcal{B} = \{\mathcal{U}_\alpha\}$ una base de la topologia de M. Un **prehaz (de grupos abelianos) $\mathcal{S}$ sobre** *M consiste en*

1. *Para todo abierto $\mathcal{U}_\alpha \subseteq M$ de $\mathcal{B}$, un grupo abeliano $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}(\mathcal{U}_\alpha)$,*
2. *para cada inclusion $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{U}_\beta$ de abiertos de M, un homomorfismo de grupos abelianos $\rho_{\alpha\beta} : \mathcal{S}_\beta \to \mathcal{S}_\alpha$, tal que*
   - *(a) $\mathcal{S}(\varnothing) = 0$ donde $\varnothing$ es el conjunto vacio.*
   - *(b) $\rho_{\alpha\alpha}$ es el homomorfismo identidad $\mathcal{S}_\alpha \to \mathcal{S}_\alpha$.*
   - *(c) Si $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{U}_\beta \subseteq \mathcal{U}_\gamma$. son subconjuntos abiertos,*

$$\rho_{\alpha\beta} \circ \rho_{\beta\gamma} = \rho_{\alpha\gamma}$$

Otra forma de entender lo que es un prehaz es considerarlo como una aplicacion $\mathcal{S}$ que a cada subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de M, asocia un cierto grupo abeliano $\mathcal{S}(\mathcal{U})$.

En la definicion anterior se ha definido el prehaz sobre la base $\mathcal{B}$ de la topologia: es decir, sobre una cierta subfamilia de todos los abiertos de M a partir de los cuales podemos construir todos los demas. En general la base $\mathcal{B}$ de la topologia es una familia de abiertos mas manejable que la familia **Top**(M) de todos los abiertos de M, pero la definicion podria haberse hecho para todos los abiertos de M y el resultado seria el mismo.

Entre varios subconjuntos $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ de la topologia de M existen diferentes relaciones de inclusion. Supongamos que si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ y denotamos la inclusion como

$$\iota_{\mathcal{V}\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$$

de tal modo que $x \mapsto \iota_{\mathcal{V}\mathcal{U}}(x) = x$. La condicion (3) quiere decir que que esta relacion entre los abiertos debe reflejarse en alguna relacion entre los grupos $\mathcal{S}(\mathcal{U})$ y $\mathcal{S}(V)$. Esta relacion es el homomorfismo de grupos abelianos

$$\rho_{\mathcal{U}\mathcal{V}} : \mathcal{S}(\mathcal{V}) \to \mathcal{S}(\mathcal{U}),$$

y es importante notar que como aplicacion va en el sentido contrario que $\iota_{\mathcal{V}\mathcal{U}}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}(\mathcal{U}) & \mathcal{S}(\mathcal{V}) \arrow[l, "\rho_{\mathcal{U}\mathcal{V}}"'] \\ \mathcal{U} \arrow[u, "\mathcal{S}"] \arrow[r, "\iota_{\mathcal{V}\mathcal{U}}"] & \mathcal{V} \arrow[u, "\mathcal{S}"'] \end{tikzcd}$$

Los siguientes dos parrafos son solo informativos, y no forman parte del curso, si bien quien conozca someramente las nociones basicas de Teoria de Categorias apreciara lo compacto de la explicacion.

Asi mismo, este punto de vista nos permite decir que de la misma forma que $\mathcal{S}$ asigna el grupo $\mathcal{S}(\mathcal{U})$ al abierto $\mathcal{U}$, tambien asigna el homomorfismo de grupos $\rho_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ a la inclusion $\iota_{\mathcal{V}\mathcal{U}}$ de modo que podriamos escribir $\rho_{\mathcal{U}\mathcal{V}} = \mathcal{S}(\iota_{\mathcal{V}\mathcal{U}})$.

Este punto de vista da lugar a la definicion categorica del prehaz como un *functor*[1] *contravariante*[2]

$$\mathcal{S} : \mathbf{Top}(M) \to \mathbf{Ab}$$

de la categoria $\mathbf{Top}(M)$ *formada por todos los abiertos de la topologia de* M *(objetos) y sus inclusiones (aplicaciones), en la categoria* $\mathbf{Ab}$ *de todos los grupos abelianos (objetos) con sus homomorfismos (aplicaciones).*

No obstante, no seguiremos el punto de vista categorico en estos apuntes.

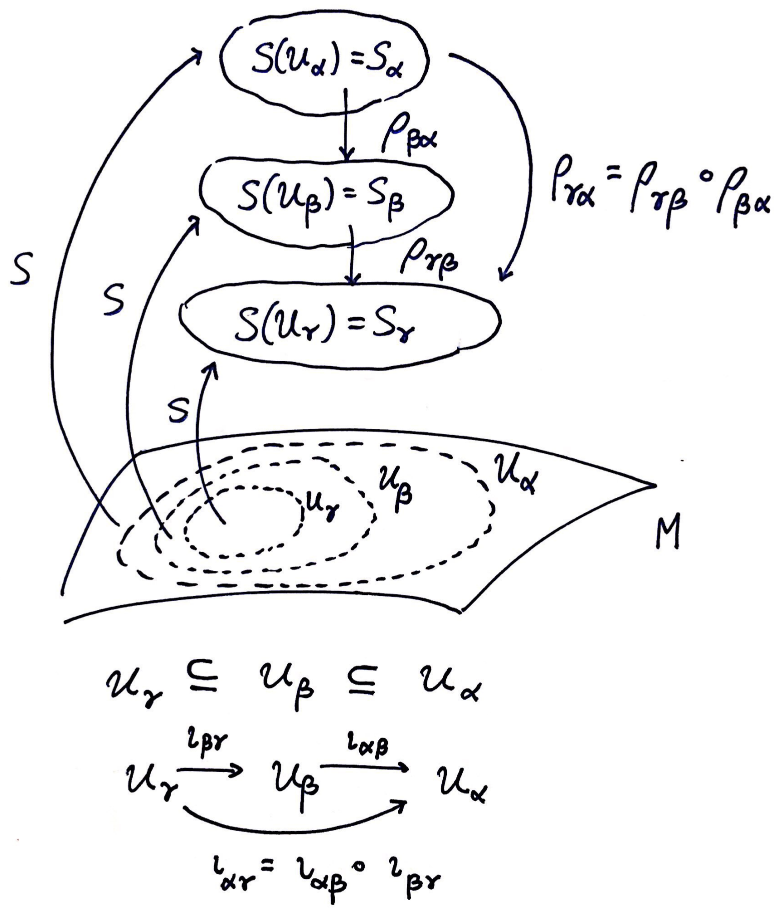
Un poco de *notacion*: Si $\mathcal{S}$ es un prehaz en M, nos referimos a $\mathcal{S}(\mathcal{U})$ como las **secciones** del prehaz $\mathcal{S}$ sobre el abierto $\mathcal{U}$, y a veces utilizaremos la notacion $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ para referirnos al grupo $\mathcal{S}(\mathcal{U})$.

Llamamos aplicaciones de *restriccion* o **restricciones** a las aplicaciones $\rho_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ y a veces escribiremos $s|_{\mathcal{U}}$ en lugar de $\rho_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(s)$ si $s \in \mathcal{S}(\mathcal{V})$.

---

[1] Transforma objetos de un conjunto A en objetos de otro conjunto B, y aplicaciones entre objetos del conjunto A en aplicaciones entre objetos del conjunto B.

[2] Invierte la direccion de las flechas que representan las apliaciones entre objetos



Ejemplo. El prehaz constante

Sea G un grupo abeliano cualqiera (por ejeplo $\mathbb{Z}$). Definimos el prehaz constante G_M sobre M asignando a cada abierto $\mathcal{U}_\alpha \subseteq M$ el grupo $\mathrm{G}_M(\mathcal{U}_\alpha) = \mathrm{G}$. Para cada inclusion $\mathcal{U}_\beta \subseteq \mathcal{U}_\alpha$ definimos $\rho_{\alpha\beta}$ como la aplicacion identidad de G (que denotaremos como simplemente como 1_{G})

$$\rho_{\alpha\beta} = 1_{\mathrm{G}} : \mathrm{G}_M(\mathcal{U}_\beta) \to \mathrm{G}_M(\mathcal{U}_\alpha)$$

En caso contrario (ie $\mathcal{U}_\beta \not\subseteq \mathcal{U}_\alpha$, se define $\rho_{\alpha\beta}$ como la aplicacion $0 : a \mapsto 0$ para todo $a \in \mathrm{G}$). Se obtiene asi el prehaz constante, que denotamos simplemente por G.

Ejemplo. Prehaz de funciones continuas

Sea N un espacio topologico (aunque por simplicidad podriamos suponer que $N = \mathbb{R}$). El **prehaz de funciones continuas** de M en N se suele denotar $\mathcal{C}^N$ o tambien $\mathcal{C}^0(\cdot, N)$. Lo definimos como sigue: Para cada abierto $\mathcal{U}_\alpha \subset M$ le asignamos

$$\mathcal{C}^0(\mathcal{U}_\alpha, N) = \{\text{Conjunto de funciones continuas } f : \mathcal{U}_\alpha \to N\}$$

Para cada inclusion $\mathcal{U}_\beta \subseteq \mathcal{U}_\alpha$ la aplicacion restriccion es la restriccion usual

$$\rho_{\beta\alpha} : \mathcal{C}^0(\mathcal{U}_\alpha, N) \to \mathcal{C}^0(\mathcal{U}_\beta, N) \ : \ f \mapsto f|_{\mathcal{U}_\beta}$$

En general, hemos definido este prehaz como un prehaz de conjuntos (a cada abierto le hemos asignado un conjunto). Si ademas N tiene la estructura de un grupo abeliano (y en el caso particular de $N = \mathbb{R}$ asi es), los conjuntos $\mathcal{C}^0(\mathcal{U}, N)$ tambien seran grupos abelianos, y tendremos un prehaz de grupos abelianos.

Las definiciones de **prehaz de funciones (reales) infinitamente diferenciables**, $\mathcal{C}^\infty$ y el **prehaz de funciones holomorfas** $\mathcal{O}$ se definen de forma similar.

2.2 Prehaces completos: Haces

Quien no se haya dormido en las paginas anteriores reconocera en la definicion de prehaz la alargada sombre de los anillos locales de funciones holomorfas $\mathcal{O}(\mathcal{U})$, *los cuerpos locales de funciones meromorfas* $\mathcal{M}(\mathcal{U})$, *los anillos locales de funciones diferenciables* $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}), \ldots$ *etc. que habiamos introducido en la leccion anterior. En este sentido,* $\mathcal{O}, \mathcal{M}, \mathcal{C}^\infty$ *son prehaces; y el lector atento tal vez reconozca en la contravariancia del functor (es decir, en el hecho de que las restricciones* ρ *inviertan la direccion de las inclusiones* ι*) la idea intuitiva de que, a medida que pedimos que el dominio sea mayor, la 'cantidad' de funciones en el anillo local correspondiente es menor.*
Por otro lado, para que un prehaz sea util y reproduzca el comportamiento que conocemos queremos que las secciones se peguen entre si y se restrinjan de un modo consistente.

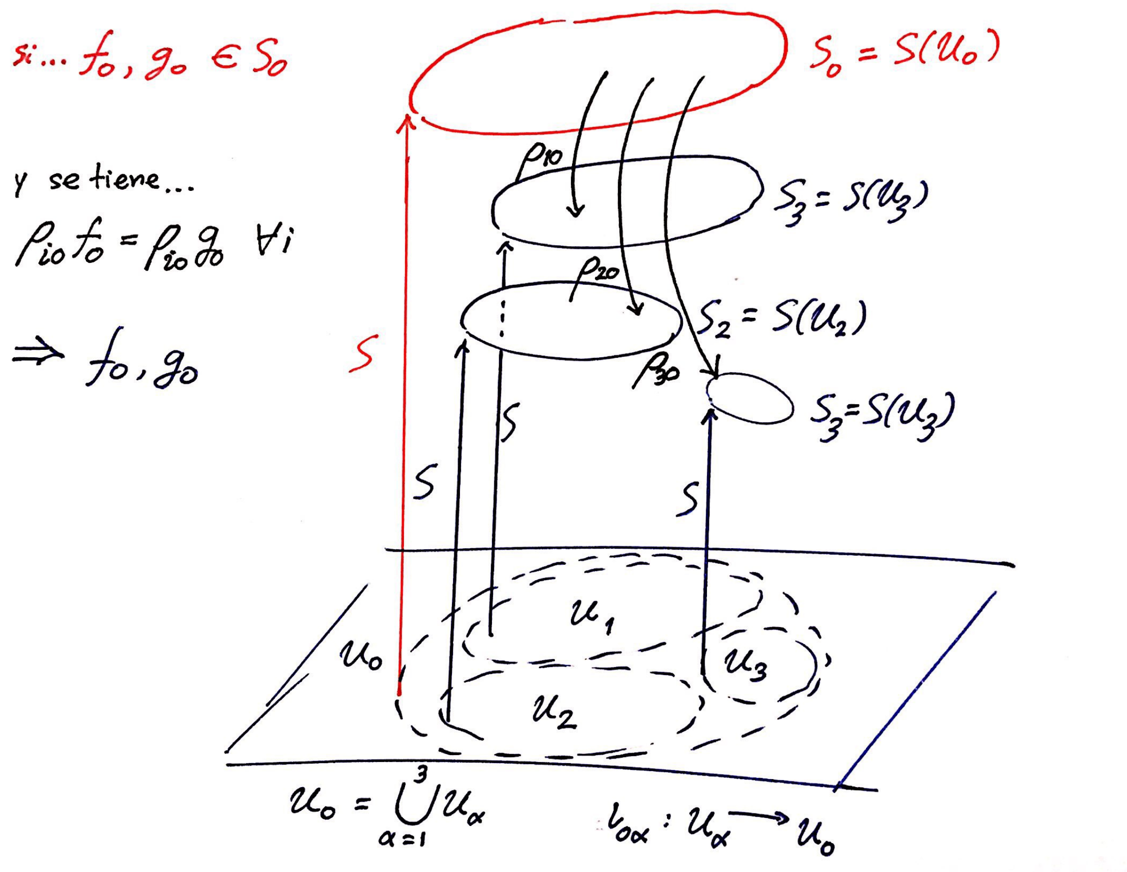
Definicion

Sea M un espacio topologico y $\mathcal{B}$ una base de la topologia de M. Decimos que un prehaz $\mathcal{S}$ sobre M es un **prehaz completo** o simplemente un **haz** si para todo $\mathcal{U}_0 = \cup_\beta \mathcal{U}_\beta$ donde el indice β recorre una subcoleccion cualquiera $\{\mathcal{U}_\beta\} \subset \mathcal{B}$ se cumple que:

1. Si $f_0, g_0 \in \mathcal{S}_0$ son tales que $\rho_{\beta 0} f_0 = \rho_{\beta 0} g_0$ para todo $\mathcal{U}_\beta$, entonces $f_0 = g_0$.

2. Si $f_\beta \in \mathcal{S}_\beta$ son una coleccion de elementos tales que $\rho_{\gamma\beta_1} f_{\beta_1} = \rho_{\gamma\beta_2} f_{\beta_2}$ siempre que $\mathcal{U}_\gamma \subset \mathcal{U}_{\beta_1} \cap \mathcal{U}_{\beta_2}$ para cualquier $\mathcal{U}_\gamma$ de la base $\mathcal{B}$, existe un elmento $f_0 \in \mathcal{S}_0$ tal que $f_\beta = \rho_{\beta 0} f_0$ para todo $\mathcal{U}_\beta$.

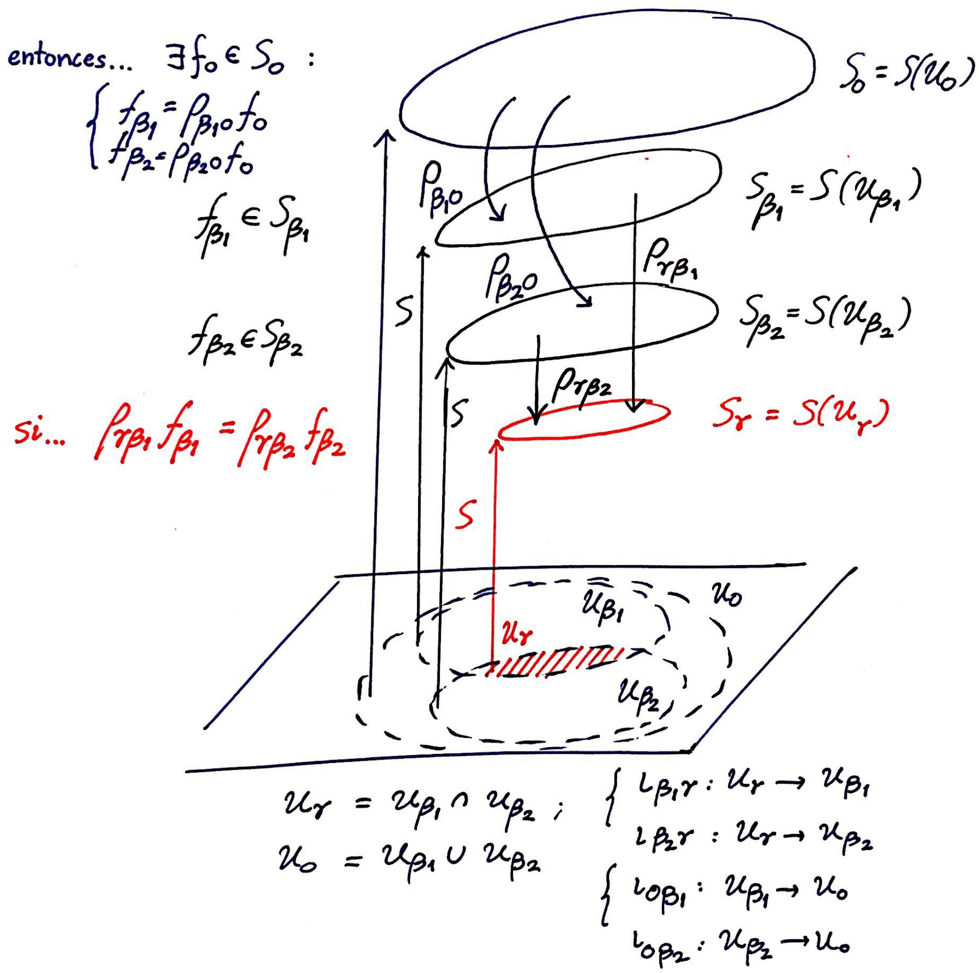
La condicion (1) quiere decir que si dos secciones definidas en un mismo abierto $\mathcal{U}_0$ coinciden cuando se restringen (mediante $\rho_{\beta 0}$) a todos los abiertos mas pequeños $\{\mathcal{U}_\beta\}$ de una descripcion mas fina de su dominio original, entonces es que eran iguales desde el principio en el abierto $\mathcal{U}_0$.



Es decir: *Para comparar dos secciones, basta conocer como son localmente.*

La condicion (2) quiere decir que si tenemos una coleccion de secciones f_β, cada una en algun grupo $\mathcal{S}_\beta$ correspondiente al abierto $\mathcal{U}_\beta$, y son todas compatibles entre si (en el sentido de que cuando dos de estas secciones f_{β_1}, $f_{\beta 2}$ se comparan en alguna interseccion $\mathcal{U}_\gamma \subset \mathcal{U}_{\beta_1} \cap \mathcal{U}_{\beta 2}$, coinciden: $\rho_{\gamma\beta_1} f_{\beta_1} = \rho_{\gamma\beta_2} f_{\beta_2}$), entonces, en realidad cada f_β desciende de una seccion mayor definida en U_0.

Es decir: *secciones compatibles entre si se pueden pegar para construir secciones definidas en abiertos mas grandes.*



Un poco de **notacion**: En los textos algebraicos modernos, se suele llamar *haz* a lo que hemos definido como *prehaz completo*: es decir, un haz es un prehaz que satisface unas condiciones especiales. En otros textos mas clasicos, se suele definir un *haz* como un cierto espacio topologico que se puede construir a partir del prehaz completo. Este espacio topologico se denomina en los textos algebraicos como *espacio etale*.

Ejemplo. El haz de funciones holomorfas en M

Sea M una superficie de Riemann. Para cada subconjunto abierto $\mathcal{U} \subset M$, sea $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ el anillo de funciones holomorfas $\mathcal{U} \to \mathbb{C}$. Y, para cada, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ sea

$$\rho_{\mathcal{V}\mathcal{U}} : \mathcal{O}(\mathcal{U}) \to \mathcal{O}(\mathcal{V})$$

la aplicacion de restriccion, en el sentido usual. Entonces, $\mathcal{O}$ es un prehaz de anillos sobre M, (y en particular un prehaz de grupos abelianos). Para verificar que es un haz, debemos comprobar que el prehaz es completo, ie satisface las condiciones (1) y (2) de la definicion anterior.

La condicion (1) es exactamente el Teorema de Identidad que se sabe que es cierto para funciones holomorfas. Por otro lado, la propiedad de ser holomorfa es una propiedad local: para que una funcion sea holomorfa[3] es condicion necesaria y sufciente que sea holomorfa en un entorno de cada punto: por tanto una funcion obtenida 'pegando' entre si funciones holomorfas tambien lo sera, de modo que se satisface el axioma (2).

Lo mismo es cierto para los prehaces de funciones continuas $\mathcal{C}^0$, y de funciones diferenciables $\mathcal{C}^\infty$, que dan lugar a los haces correspondientes.

Ejemplo. El haz de funciones localmente constantes

En la seccion anterior introdujimos el prehaz constante. En general, el prehaz constante es un ejemplo de un prehaz que no es un haz, porque la propiedad de que una funcion sea constante no es una propiedad local, es decir: una funcion no es constante porque sea constante en cada punto, ya que podria tener diferentes valores (constantes) en diferentes puntos.

Mas detalladamente: supongase que un abierto es disconexo en dos subconjuntos disjuntos. En este caso, una funcion podria ser constante en cada subconjunto, pero con diferentes valores de modo que no seria constante en el conjunto total. Por tanto un prehaz constante no es un haz, a menos que el grupo G sea trivial $\mathrm{G} = \{0\}$ o a menos que el espacio M sea tal que todo par de abiertos tenga interseccion no vacia.

El problema se resuelve considerando funciones *localmente constantes*: Una funcion $f : \mathcal{U} \to \mathrm{G}$ es localmente constante en $\mathcal{U} \subset M$ si para todo $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$ existe un entorno $\mathcal{V}$ de $\mathbf{p}$, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tal que f es constante en V, es decir existe un recubrimiento en que f es constante en cada abierto.

[3] lo mismo ocurre si queremos que la funcion sea continua, o diferenciable

El prehaz correspondiente es un haz, el **haz de funciones localmente constantes**, tambien llamado el **haz constante**.

Ejemplo. El haz rascacielos.

Sea M un espacio topologico, G un grupo abeliano, y $\mathbf{p}$ un punto de M, definimos el **haz rascacielos** $\mathrm{G}_{\mathbf{p}}$ mediante la siguiente asignacion

$$\mathrm{G}_{\mathbf{p}}(\mathcal{U}) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \mathbf{p} \notin \mathcal{U} \\ \mathrm{G} & \text{si } \mathbf{p} \in \mathcal{U} \end{cases}$$

2.3 Localizacion. Limites directos (!)

En las secciones anteriores hemos introducido haces y prehaces asignando cierta informacion a los diferentes abiertos de un espacio topologico. Hemos asignado informacion de caracter local. Como es el comportamiento infinitesimal de un haz? No es del todo trivial preguntarse como es un haz arbitrario en un punto $\mathbf{p} \in M$ *pues el punto esta contenido en muchos diferentes abiertos, que pueden tener asignados grupos abelianos de secciones diferentes. Esta cuestion se resuelve mediante un proceso de limite conocido como* **limite directo** *o* **limite inductivo**.

Es una construccion estandard en topologia y en algebra homologica, pero como sera importante despues vamos a revisarla.

Sistemas directos de grupos abelianos

Definicion

Decimos que un conjunto de indices I es un **conjunto directo creciente** si existe una relacion que denotamos por $\leq$ tal que

1. Es reflexiva $\alpha \leq \alpha$, para todo $\alpha \in I$.
2. Es transitiva: si $\alpha \leq \beta$, y $\beta \leq \gamma$, entonces $\alpha \leq \gamma$, con $\alpha, \beta, \gamma \in I$.
3. Satisface que para todo $\alpha, \beta \in I$ existe un $\gamma \in I$ tal que $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$.

Las condiciones (1) y (2) son lo que se conoce como un *preorden*: Las condiciones del preorden permiten relacionar **algunos** elementos y 'ordenarlos', pero no esta garantizado que dos elementos cualquiera puedan 'ordenarse' mediante la relacion $\leq$. Puede que haya elementos que no se puedan relacionar por $\leq$. Notese que la condicion (2) es un condicional.

Esta relacion es la que se puede establecer entre una familia de conjuntos y las inclusiones con la siguiente precaucion en mente: *Queremos que segun el indice α en el conjunto directo I aumente, el conjunto indexado por α sea 'mas pequeño', de manera que establecemos que*

$$\alpha \leq \beta \longleftrightarrow \mathcal{U}_\beta \subseteq \mathcal{U}_\alpha$$

Es decir, el indice α establece que, si hay una inclusion, enumerariamos en una lista primero el conjunto mayor, y despues el conunto menor, es decir:

$$\alpha \leq \beta \longleftrightarrow \mathcal{U}_\alpha \supseteq \mathcal{U}_\beta$$

Esto es un poco contraintuitivo, asi que hay que tener cuidado. Comprobemoslo:

1. Un conjunto cualquiera $\mathcal{U}_\alpha$ satisface que $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{U}_\alpha$, por tanto, $\alpha = \alpha$ de modo que se tiene tambien que $\alpha \leq \alpha$.

2. Si $\mathcal{U}_\gamma \subseteq \mathcal{U}_\beta$ y $\mathcal{U}_\beta \subseteq \mathcal{U}_\alpha$ entonces $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{U}_\gamma$. Por lo tanto $\alpha \leq$ y $\beta \leq \gamma$ implican que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

3. Finalmente, sean $\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{U}_\beta$ dos abiertos cualesquiera, y escribimos $\mathcal{U}_\gamma = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$. Entonces se tiene que $\mathcal{U}_\gamma \subseteq \mathcal{U}_\alpha$, (es decir $\alpha \leq \gamma$) y tambien que $\mathcal{U}_\gamma \subseteq \mathcal{U}_\beta$, (de donde $\beta \leq \gamma$).

A continuacion definimos un *sistema directo* de grupos abelianos. La definicion podria ser mas general, pero esta sera la unica que nos va a interesar:

Definicion

Un **sistema directo** de grupos abelianos indexado por un conjunto directo creciente I es una familia $\{\mathcal{S}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ junto con un homomorfismo para cada par de indices $(\alpha,\beta)\in I\times I\ :\ \alpha\leq\beta$ de tal modo que

1. $\rho_{\alpha\alpha}=1_{\mathcal{S}_\alpha}$.
2. Para todo $\alpha\leq\beta\leq\gamma\in I$,

$$\rho_{\gamma\alpha}=\rho_{\gamma\beta}\circ\rho_{\beta\alpha}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_\alpha \arrow[rr, "\rho_{\gamma\alpha}"] \arrow[dr, "\rho_{\beta\alpha}"'] & & \mathcal{S}_\gamma \\ & \mathcal{S}_\beta \arrow[ur, "\rho_{\gamma\beta}"'] & \end{tikzcd}$$

Veamos con mas detalle que significa esta definicion. Para ello debemos entender la relacion existente entre el conjunto directo $(I,\leq)$, los conjuntos abiertos $\mathcal{U}_\alpha$ con sus inclusiones $\iota_{\beta\alpha}:\mathcal{U}_\alpha\to\mathcal{U}_\beta$ y los correspondientes grupos abelianos $\mathcal{S}_\alpha$ del prehaz con sus restricciones $\rho_{\alpha\beta}:\mathcal{S}_\beta\to\mathcal{S}_\alpha$.

El punto crucial en la propiedad (2) es que si $\alpha\leq\beta\leq\gamma$, entonces estamos diciendo que tenemos una cadena de inclusiones donde $\mathcal{U}_\gamma\subseteq\mathcal{U}_\beta\subseteq\mathcal{U}_\alpha$ (recuerdese que el indice mas grande corresponde al conjunto mas pequeño!). Es decir, tenemos inclusiones

$$\mathcal{U}_\gamma\xrightarrow{\iota_{\beta\gamma}}\mathcal{U}_\beta\xrightarrow{\iota_{\alpha\beta}}\mathcal{U}_\alpha$$

Pero, al mismo tiempo, los grupos de secciones $\mathcal{S}_\alpha=\mathcal{S}(\mathcal{U}_\alpha),\ldots$ tendran restricciones en el sentido contrario a las inclusiones (!!), es decir

$$\mathcal{S}_\alpha\xrightarrow{\rho_{\beta\alpha}}\mathcal{S}_\beta\xrightarrow{\rho_{\gamma\beta}}\mathcal{S}_\gamma$$

y la condicion (2) resulta ser, simplemente, la propiedad (c) de la definicion de un prehaz de grupos abelianos.

En resumen: *los grupos de secciones de un prehaz forman un sistema directo tal que las restricciones ρ relacionan secciones definidas sobre abiertos cada vez mas, y mas pequeños.* Utilizaremos esto para llegar al concepto equivalente de lo que serian las *'secciones sobre un punto'*.

Limite directo. Tallos de un haz.

Para cada $\mathbf{p} \in M$ considerese la coleccion

$$\mathcal{U}(\mathbf{p}) = \{\mathcal{U}_\alpha : \mathbf{p} \in \mathcal{U}_\alpha\}.$$

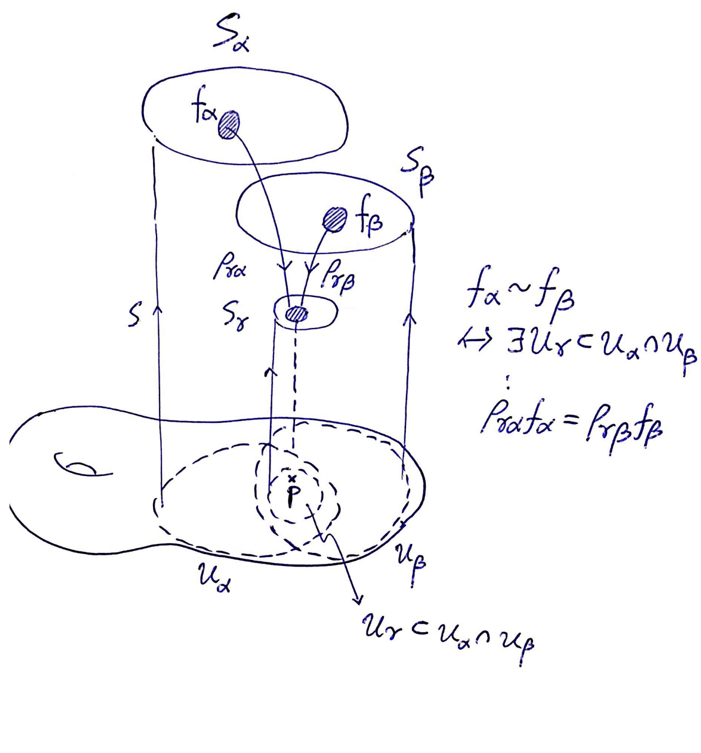
Esta coleccion esta *parcialmente ordenada* por la inclusion, como se ha visto en la seccion anterior y es este orden parcial el que se utilizara para realizar el limite.

Construimos la union disjunta

$$\mathcal{S}^*_{\mathbf{p}} = \bigsqcup_{\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{U}(\mathbf{p})} \mathcal{S}_\alpha = \bigcup_{\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{U}(\mathbf{p})} (f_\alpha, \alpha)$$

y definimos la siguiente relacion de equivalencia: sean $f_\alpha \in \mathcal{S}_\alpha$, $f_\beta \in \mathcal{S}_\beta$. Decimos que $f_\alpha \sim f_\beta$ si existe un conjunto $\mathcal{U}_\gamma \in \mathcal{U}(\mathbf{p})$ tal que

1. $\mathcal{U}_\gamma \subset \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$.
2. $\rho_{\gamma\alpha}(f_\alpha) = \rho_{\gamma\beta}(f_\beta)$.



Denotamos el conjunto de clases de equivalencia por

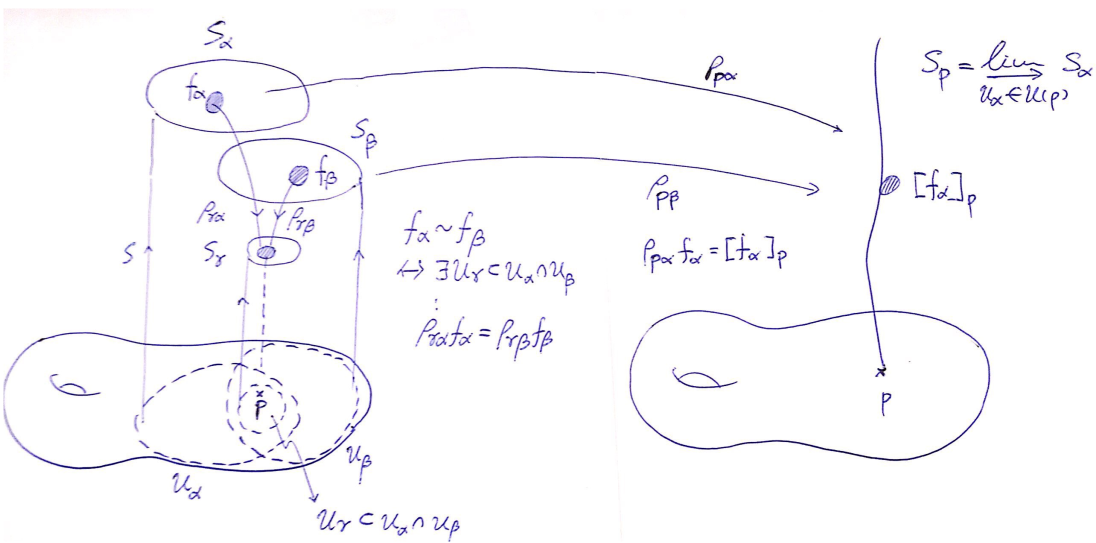
$$\mathcal{S}_{\mathbf{p}} = \mathcal{S}^*_{\mathbf{p}}/\!\sim$$

y denotamos la clase de equivalencia de $f_\alpha \in \mathcal{S}_\alpha$ por $[f_\alpha]_{\mathbf{p}} \in \mathcal{S}_{\mathbf{p}}$.

Para todo abierto $\mathcal{U}_\alpha$ existe una aplicacion natural

$$\rho_{\mathbf{p}\alpha} : \mathcal{S}_\alpha \to \mathcal{S}_{\mathbf{p}} \ : \ f_\alpha \mapsto [f_\alpha]_{\mathbf{p}}$$

que asigna a $f_\alpha \in \mathcal{S}_\alpha$ su clase de equivalencia $[f_\alpha]_{\mathbf{p}}$ en $\mathcal{S}_{\mathbf{p}}$. Estas aplicaciones inducen en $\mathcal{S}_{\mathbf{p}}$ la estructura de grupo abeliano, de tal manera que $\rho_{\mathbf{p}\alpha}$ son homomorfismos.



El procedimiento que hemos seguido para construir $\mathcal{S}_{\mathbf{p}}$ a partir de la familia $\{\mathcal{S}_\alpha\}$ se llamada *limite directo* o tambien *limite inductivo* de la familia $\{\mathcal{S}_\alpha\}$

$$\mathcal{S}_{\mathbf{p}} = \varinjlim_{\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{U}(\mathbf{p})} \mathcal{S}_\alpha.$$

En el contexto que nos ocupa el grupo $\mathcal{S}_{\mathbf{p}}$ es llamado *tallo del haz* $\mathcal{S}$ en $\mathbf{p} \in M$.

Definition

Sea $\mathcal{S}$ un haz de grupos abelianos sobre un espacio topologico M, sea $\mathbf{p}$ un punto de M, y sea $\mathcal{U}(\mathbf{p})$ la familia de subconjuntos abiertos de M dada por $\mathcal{U}(\mathbf{p}) = \{\mathcal{U}_\alpha \ : \ \mathbf{p} \in \alpha\}$. Llamamos **tallo de** $\mathcal{S}$ en $\mathbf{p}$ al limite directo

$$\mathcal{S}_{\mathbf{p}} = \varinjlim_{\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{U}(\mathbf{p})} \mathcal{S}_\alpha.$$

2.4 El espacio *étalé* (!)

Una descripcion equivalente de haz (prehaz completo) viene dada por un cierto espacio topologico –llamado tambien espacio etale Spé($\mathcal{S}$)*– que recubre* M *por medio de una proyeccion* π : Spé($\mathcal{S}$) $\to M$ *que es homeomorfismo local, y de tal modo que las operaciones entre las secciones (recuerdese que son elementos de grupos abelianos) son continuas en la topologia de* M*. Esta es la definicion clasica de haz de grupos abelianos.*

Definicion

Un **haz de grupos abelianos sobre un espacio topológico** M es un espacio topológico Spé($\mathcal{S}$) junto con una aplicación π : Spé($\mathcal{S}$) $\to M$ tal que:

1. π es *homeomorfismo local,*
2. para todo $\mathbf{p} \in M$ el conjunto $\mathcal{S}_{\mathbf{p}} = \pi^{-1}(\mathbf{p}) \subset$ Spé($\mathcal{S}$) tiene la estructura de un grupo abeliano.
3. Las operaciones de grupo son continuas en la topologia de Spé($\mathcal{S}$).

En esta seccion construiremos el espacio etale a partir del haz.

Para construir el espacio etale, 'pegamos' entre si todos los tallos y determinamos una topologia en el espacio resultante.

En primer lugar, definimos

$$\text{Spé}(\mathcal{S}) = \bigcup_{\mathbf{p} \in M} \mathcal{S}_{\mathbf{p}}.$$

Notese que los puntos $\mathbf{s} \in \text{Spé}(\mathcal{S})$ del conjunto union $\text{Spé}(\mathcal{S})$ son las clases de equivalencia que forman los tallos, y por tanto podremos describirlos como

$$\mathbf{s} = [f_\alpha]_\mathbf{p}$$

para alguna seccion $f_\alpha \in \mathcal{S}_\alpha$ representante del germen, perteneciente a alguno de los grupos abelianos $\mathcal{S}_\alpha$ definidos sobre alguno de los abiertos $\mathcal{U}_\alpha$ que contienen al punto $\mathbf{p} \in M$. Evidentemente esta descripcion no es unica (podemos utilizar otra funcion representante, en otro grupo abeliano sobre otro conjunto).

A continuacion definimos la proyeccion natural

$$\pi : \text{Spé}(\mathcal{S}) \to M$$

tal que $\pi(\mathcal{S}_\mathbf{p}) = \mathbf{p}$.

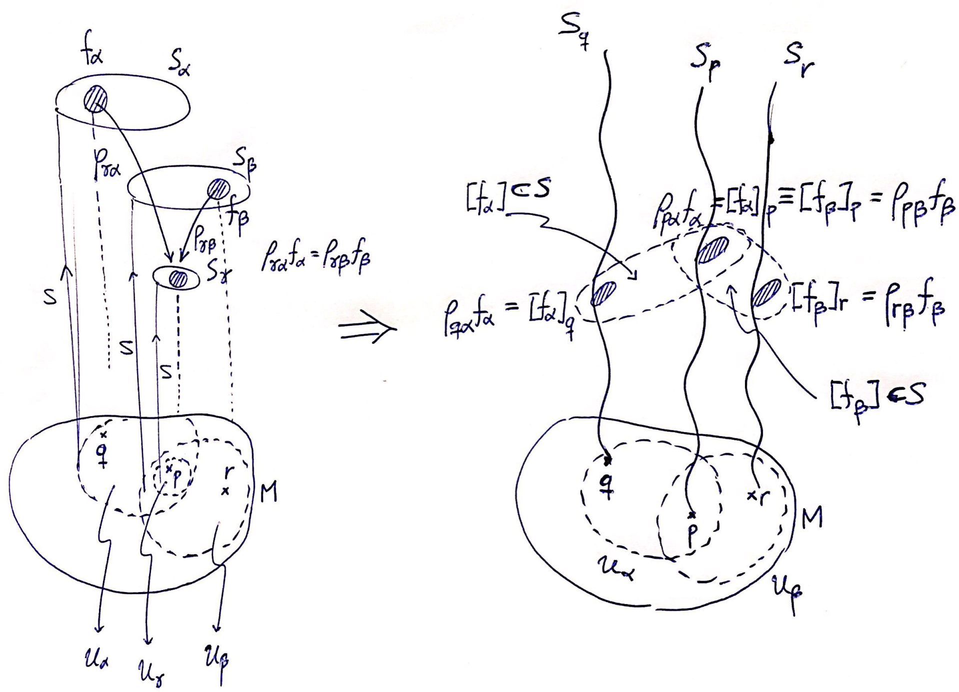
La cuestion mas delicada es definir una topologia en $\text{Spé}(\mathcal{S})$ tal que la proyeccion π sea homeomorfismo local. La idea basica surge de la descripcion local que hemos dado de los germenes $\mathbf{s} \in \text{Spé}(\mathcal{S})$ como la clase $[f_\alpha]_\mathbf{p}$: la seccion $f_\alpha \in \mathcal{S}(\mathcal{U}_\alpha)$ se proyecta (al realizar el limite directo sobre el punto $\mathbf{p} \in \mathcal{U}_\alpha$) en el germen $\rho_{\mathbf{p}\alpha}(f_\alpha) = [f_\alpha]_\mathbf{p} = \mathbf{s} \in \mathcal{S}_\mathbf{p}$.

Comenzando con la misma seccion $f_\alpha \in \mathcal{S}(\mathcal{U}_\alpha)$ pero considerando el limite directo sobre puntos <u>distintos</u> de $\mathbf{p} \in \mathcal{U}_\alpha$, por ejemplo $\mathbf{q} \in \mathcal{U}_\alpha$ obtendremos otro germen, esta vez sobre $\mathbf{q}$, es decir $\rho_{\mathbf{q}\alpha}(f_\alpha) = [f_\alpha]_\mathbf{q} \in \mathcal{S}_\mathbf{q}$.

El resultado de proceder de esta manera, obteniendo los limites directos para todos los puntos de $\mathcal{U}_\alpha$ nos da un conjunto de elementos de $\text{Spé}(\mathcal{S})$ que incluyen a $\mathbf{s}$, y que tomamos como definicion de entorno abierto de $\mathbf{s}$ que denotamos $\mathcal{U}(\mathbf{s}; f_\alpha, \mathcal{U}_\alpha) \subset \text{Spé}(\mathcal{S})$, o a veces simplemente $[f_\alpha] \subset \text{Spé}(\mathcal{S})$, cuando no necesitamos ser tan especificos.

$$\mathcal{U}(\mathbf{s}; f_\alpha, \mathcal{U}_\alpha) = \bigcup_{\mathbf{p} \in \mathcal{U}_\alpha} \rho_{\mathbf{p}\alpha}(f_\alpha)$$

Con esta idea, $\mathcal{U}(\mathbf{s}; f_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ es el conjunto de todos los germenes que proceden de una misma seccion $f_\alpha \in \mathcal{S}_\alpha$ sobre $\mathcal{U}_\alpha \subset M$.



Notese que si $\mathbf{s}$ se puede describir tambien como el germen $[g_\beta]_\mathbf{p}$, a usando la funcion representante $g_\beta \in \mathcal{S}(\mathcal{U}_\beta)$, esto quiere decir que $\mathbf{s}$ tambien pertenece al entorno $\mathcal{U}(\mathbf{s}; g, \mathcal{U}_\beta) = \bigcup_{\mathbf{p}\in\mathcal{U}_\beta} \rho_\mathbf{p}(g_\beta)$ de modo que

$$\mathcal{U}(\mathbf{s}; f_\alpha, \mathcal{U}_\alpha) \cap \mathcal{U}(\mathbf{s}; g_\beta, \mathcal{U}_\beta) \neq \varnothing$$

El siguiente lema demuestra que para cada $\mathbf{s} \in$ Spé($\mathcal{S}$) los subconjuntos $\mathcal{U}(\mathbf{s}; f_\alpha, \mathcal{U}_\alpha) \subset$ Spé($\mathcal{S}$) forman un *sistema fundamental de entornos de* $\mathbf{s}$ y, por tanto, determinan [4] la topologia de Spé($\mathcal{S}$) de tal modo que la aplicacion π es homeomorfismo local.

[4] Recordemos que para definir una topologia en un conjunto (una familia distinguida $\mathcal{T}$ de subconjuntos que se comporta bien bajo uniones, e intersecciones finitas) dando solamente una cantidad razonable de subconjuntos existen diferentes metodos: Uno de ellos es definir la *base de la topologia* $\mathcal{B}$: una coleccion de abiertos tal que todo abierto de la topologia $\mathcal{T}$ puede expresarse como union de los elementos de la base $\mathcal{B}$.

Otro metodo es definir un *sistema fundamental de entornos en cada punto*: Una familia de subconjuntos abiertos $\mathcal{N}$ de $\mathcal{T}$ alrededor de cada punto $\mathbf{p}$ tal que si $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$ con $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$

Lema

Los subconjuntos
$$\mathcal{U}(\mathbf{s}; f_\alpha, \mathcal{U}_\alpha) = \bigcup_{\mathbf{p}\in\mathcal{U}_\alpha} \rho_{\mathbf{p}\alpha}(f_\alpha)$$
forman un sistema fundamental de entornos de la topologia de Spé($\mathcal{S}$), y con esta topologia π es homeomorfismo local.

Proof. Sean $[f_\alpha] = \mathcal{U}(\mathbf{s}; f_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ y $[f_\beta] = \mathcal{U}(\mathbf{s}; f_\beta, \mathcal{U}_\beta)$, etc. entornos de $\mathbf{s} \in$ Spé($\mathcal{S}$).

Debemos demostrar que para todo $\mathbf{s} \in [f_\alpha] \cap [f_\beta] \subset$ Spé($\mathcal{S}$) existe un $[f_\gamma] \subset$ Spé($\mathcal{S}$) tal que $\mathbf{s} \in [f_\gamma] \subset [f_\alpha] \cap [f_\beta]$.

La busqueda del abierto $[f_\gamma]$ equivale a la busqueda de la seccion adecuada f_γ en el grupo abeliano $\mathcal{S}(\mathcal{U}_\gamma)$.

Ahora bien si $\mathbf{s} \in [f_\alpha] \cap [f_\beta]$ y se tiene que $\pi(\mathbf{s}) = \mathbf{p}$ entonces, esto quiere decir por la definicion de limite directo y la construccion de los tallos que (a) $\mathbf{p} \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$, y (b) $\rho_{\mathbf{p}\alpha} f_\alpha = \rho_{\mathbf{p}\beta} f_\beta$.

Pero por definicion de la aplicacion $\rho_{\mathbf{p}\alpha} : \mathcal{S}_\alpha \to \mathcal{S}_\mathbf{p}$ debe existir un subconjunto abierto $\mathcal{U}_\gamma$ tal que $\mathbf{p} \in \mathcal{U}_\gamma \subset \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ y que cumpla que $\rho_{\gamma\alpha} f_\alpha = \rho_{\gamma\beta} f_\beta$.

La imagen en cualquiera de los dos miembros de esta ultima igualdad es la seccion f_γ que buscamos. En particular
$$[f_\gamma] = \mathcal{U}(\mathbf{s}; f_\gamma, \mathcal{U}_\gamma) = \bigcup_{\mathbf{p}\in\mathcal{U}_\gamma} \rho_{\mathbf{p}\gamma}(f_\gamma)$$
que contiene a $\mathbf{s}$ y cumple que $[f_\gamma] \subset [f_\alpha] \cap [f_\beta]$. Como consecuencia de esto, la familia de conjuntos $\mathcal{U}(\mathbf{s}; \mathbf{f}_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ forma un sistema fundamental de entornos y define una base de la topologia, y la topologia en si, de Spé($\mathcal{S}$).

Esto concluye la primera parte de la demostracion. Debemos comprobar que con esta topologia π es *homeomorfsimo local*, es decir *para todo* $\mathbf{s} \in$ Spé($\mathcal{S}$) *existe un* $\mathcal{U}(\mathbf{s}; f_\alpha; \mathcal{U}_\alpha) \subset$ Spé($\mathcal{S}$) *tal que* $\pi : \mathcal{U}(\mathbf{s}; f_\alpha, \mathcal{U}_\alpha) \to \mathcal{U}_\alpha$ *es homeomorfsimo.*

---

entonces haya siempre un entorno $\mathcal{V} \in \mathcal{N}$ tal que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.

Ambos metodos son en ultima instancia equivalentes porque para tener una base $\mathcal{B}$ de la topologia $\mathcal{T}$ es condicion necesaria y suficiente que esta defina un sistema fundamental de entornos $\mathcal{N}$ en cada punto.

El problema se reduce a comprobar que $\pi : \mathcal{U}(\mathbf{s}; f_\alpha, \mathcal{U}_\alpha) \to \mathcal{U}_\alpha$ es homeomorfismo. Ahora bien, restringido a $\mathcal{U}(\mathbf{s}; f_\alpha \mathcal{U}_\alpha)$, todo punto $\mathbf{t} \in \mathcal{U}(\mathbf{s}; f_\alpha \mathcal{U}_\alpha)$ puede escribirse como $\mathbf{t} = [f_\alpha]_\mathbf{q}$ (asumiendo $\mathbf{t} \in \mathcal{S}_\mathbf{q}$) con $\mathbf{q} \in \mathcal{U}_\alpha$, y en este caso

$$\pi(\mathbf{t}) = \pi([f_\alpha]_\mathbf{q}) = \mathbf{q}$$

es una biyeccion, y aplicacion abierta. □

* * *

Finalmente, el tercer paso de la construccion consiste en demostrar que las operaciones de grupo en Spé($\mathcal{S}$) son continuas con esta topologia.

Suponganse $\mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_2 \in \mathcal{S}_\mathbf{p}$ es decir $\pi(\mathbf{s}_1) = \pi(\mathbf{s}_2) = \mathbf{p} \in M$; y sea $[f_\alpha] = \mathcal{U}(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2; f_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ cualquier entorno de $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$. Se sigue automaticamente que

$$\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 = \rho_{\mathbf{p}\alpha}(f_\alpha).$$

Considerense tambien elementos $f_{\beta_1} \in \mathcal{S}_{\beta_1}$ y $f_{\beta_2} \in \mathcal{S}_{\beta_2}$ tales que

$$\rho_{\mathbf{p}\beta_1}(f_{\beta_1}) = \mathbf{s}_1, \qquad \rho_{\mathbf{p}\beta_2}(f_{\beta_2}) = \mathbf{s}_2.$$

Entonces, la resta $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$ puede escribirse tambien como

$$\rho_{\mathbf{p}\alpha}(f_\alpha) = \rho_{\mathbf{p}\beta_1}(f_{\beta_1}) - \rho_{\mathbf{p}\beta_2}(f_{\beta_2})$$

Ahora bien, por la propia definicion de las aplicaciones $\rho_{\mathbf{p}\alpha} : \mathcal{S}_\alpha \to \mathcal{S}_\mathbf{p}$, ambos miembros deben coincidir sobre algun abierto $\mathcal{U}_\gamma$ de tal modo que

$$\rho_{\gamma\alpha}(f_\alpha) = \rho_{\gamma\beta_1}(f_{\beta_1}) - \rho_{\gamma\beta_2}(f_{\beta_2})$$

Esto representa una aplicacion continua

$$\text{Spé}(\mathcal{S}) \times_M \text{Spé}(\mathcal{S}) \to \text{Spé}(\mathcal{S})$$

tal que

$$\mathcal{U}(\mathbf{s_1}; f_{\beta_1}, \mathcal{U}_{\beta_1}) \times \mathcal{U}(\mathbf{s_2}; f_{\beta_2}, \mathcal{U}_{\beta_2}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbf{s_1} - \mathbf{s_2}; f_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$$

de donde se sigue la continuidad.

2.4.1 Prehaz de secciones del espacio étalé. *"Sheafificación"*.

Definicion

Sea Spé($\mathcal{S}$) el espacio étalé sobre M y sea $\mathcal{U} \subset M$. Una **seccion** de $\pi : \text{Spé}(\mathcal{S}) \to M$ es una aplicacion continua $F : \mathcal{U} \to \text{Spé}(\mathcal{S})$ tal que

$$\pi \circ F = 1_{\mathcal{U}}$$

Denotamos al conjunto de todas las secciones de Spé($\mathcal{S}$) sobre $\mathcal{U}$ como $\Gamma(\mathcal{U}, \text{Spé}(\mathcal{S}))$.

Veamos la relacion existente entre las *secciones de un prehaz/haz* sobre un abierto $\mathcal{U} \subset M$, esto es, los elementos de los grupos abelianos $\mathcal{S}(\mathcal{U})$, y las *secciones del espacio étalé sobre* $\mathcal{U} \subset M$, es decir la definicion anterior.

1. Sea $\mathcal{U} \subset M$ y sea $f \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$ una seccion del prehaz/haz $\mathcal{S}$, podemos definir una aplicacion $F : \mathcal{U} \subset M \to \text{Spé}(\mathcal{S})$ como $F(\mathbf{p}) = [f]_{\mathbf{p}}$ para todo $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$, esto es, una seccion del espacio étalé. Todas las secciones $F \in \Gamma(\mathcal{U}, \text{Spé}(\mathcal{S}))$ proceden de alguna seccion $f \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$.

2. De hecho la imagen por F de $\mathcal{U}$ es un abierto de Spé($\mathcal{S}$) homeomorfo a $\mathcal{U}$, en particular $F(\mathcal{U}) = \mathcal{U}([f]_{\mathbf{p}}; f, \mathcal{U})$. Ademas, puesto que π es homeomorfismo local, esto es, homeomorfism sobre cualquier $\mathcal{V} \subset \text{Spé}(\mathcal{S})$ su inverso es una seccion de Spé($\mathcal{S}$) y todo $\mathbf{s} \in \text{Spé}(\mathcal{S})$ esta contenido en la imagen de alguna seccion F.

3. En concreto, la aplicacion $\mathbf{p} \mapsto 0_{\mathbf{p}} \in \mathcal{S}_{\mathbf{p}}$ es una seccion **global**, es decir, un elemento de $\Gamma(M, \text{Spé}(\mathcal{S}))$. Sinembargo, en general encontrar otras secciones globales es extremadamente dificil.

4. Los conjuntos de secciones $\Gamma(\mathcal{U}, \text{Spé}(\mathcal{S}))$ sobre $\mathcal{U} \subset M$ son en realidad grupos abelianos de tal modo que $\Gamma(\cdot, \text{Spé}(\mathcal{S}))$ es un haz de grupos abelianos llamado **haz de secciones de** Spé($\mathcal{S}$) $\to M$. Dicho de otro modo, de la misma forma que hemos podido construir un espacio étalé a partir de un haz, podemos construir un haz a partir del espacio étalé.

$$\mathcal{S} \longrightarrow \text{Spé}(\mathcal{S}) \longrightarrow \Gamma(\cdot, \text{Spé}(\mathcal{S}))\ldots$$

5. *Estas dos construcciones son inversas la una de la otra en la medida que $\mathcal{S}$ sea un haz, es decir, un prehaz completo.* Esto quiere decir lo siguiente: El haz de secciones de un espacio étalé es un haz (prehaz completo), y su espacio étalé correspondiente es precisamente el espacio étalé original.
   Si por otro lado tomamos un haz (prehaz completo) y construimos su espacio étalé asociado, el haz de secciones de este espacio étalé es justamente el haz original.
   Sinembargo si comenzamos la construccion con un prehaz (no 'completo', no haz), es posible construir el espacio étalé, pero su haz de secciones no coincidira con el prehaz original. La condicion de 'completitud' de un prehaz especifica que prehaces pueden actuar como haces de secciones de un espacio étalé.

NOTACION Y JUSTIFICACION

En las secciones anteriores hemos utilizado una notacion poco comun (en el contexto que nos ocupa). Hemos utilizado $\mathcal{S}$ para denotar al prehaz, hemos definido un haz como un prehaz con hipotesis adicionales (prehaz completo) y, finalmente, por un procedimiento de limite hemos construido el espacio étalé $\text{Spé}(\mathcal{S})$ *como cierto espacio topologico equipado con una proyeccion que es homeomorfismo local sobre M.*
En la seccion inmediatamente anterior hemos visto como las secciones de $\text{Spé}(\mathcal{S})$ *determinan un prehaz completo,esto es un haz* $\Gamma(\cdot, \text{Spé}(\mathcal{S}))$*, que coincide con $\mathcal{S}$. Es decir, el haz $\mathcal{S}$ determina* $\text{Spé}(\mathcal{S})$ *y viceversa.*
Debido a esto **no haremos diferencia entre el haz y su espacio étalé***: abandonaremos la notacion* $\text{Spé}(\mathcal{S}) \to M$ *en favor de simplemente $\mathcal{S} \to M$ y llamaremos al espacio étalé simplemente haz sobre M.*

2.5 Restricciones, subhaces y cocientes

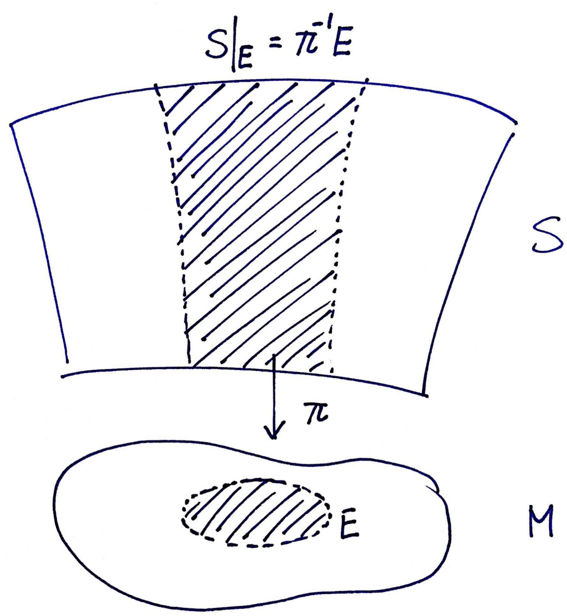
Vamos a introducir varias relaciones entre diferentes haces definidos sobre un espacio topologico fijo M.

(a) Restriccion de un haz a un subconjunto de M

Supongase que $\mathcal{S}$ es un haz sobre M y que $E \subset M$ es un subconjunto cualquiera de M.

Definicion

La **restriccion** del haz $\mathcal{S}$ a E es el subconjunto $\pi^{-1}E \subset \mathcal{S}$, donde $\pi : \mathcal{S} \to M$ es la proyeccion. La restriccion se denotara por $\mathcal{S}|_E$.



La restriccion $\mathcal{S}|_E$ es un haz sobre E. En particular, $\mathcal{S}|_{\mathbf{p}} = \mathcal{S}_{\mathbf{p}}$.

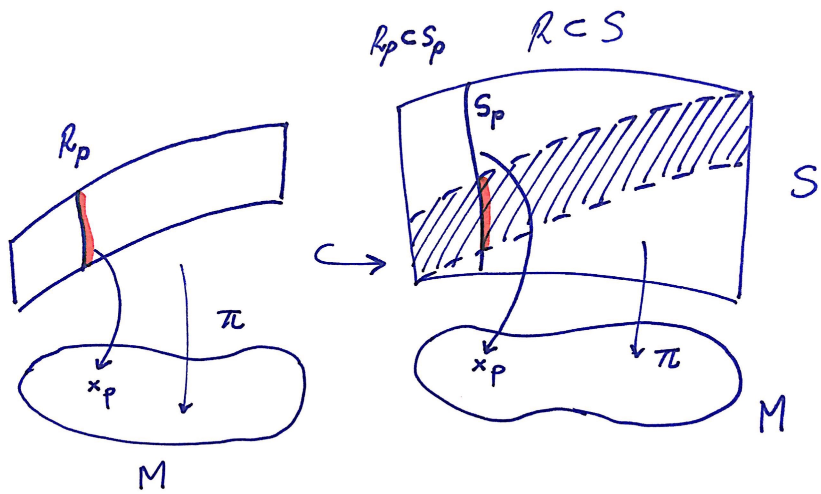
(b) Subhaces

Sea $\mathcal{S}$ un haz de grupos abelianos sobre M, y sea $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ un subconjunto de $\mathcal{S}$.

Definicion

El subconjunto $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ se dice que es un **subhaz** de $\mathcal{S}$ si

1. $\mathcal{R}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{S}$,
2. Para todo punto $\mathbf{p} \in M$, se tiene que el subconjunto $\mathcal{R}_{\mathbf{p}} = \mathcal{R} \cap \mathcal{S}_{\mathbf{p}}$ es un subgrupo de $\mathcal{S}_{\mathbf{p}}$.



El subhaz $\mathcal{R}$ es por si mismo un haz de grupos abelianos sobre M y su proyeccion es la restriccion de $\mathcal{R}$ de la proyeccion π definida en $\mathcal{S}$.

(c) El haz cociente

Esta construccion es particularmente importante

Sea $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ un subhaz del haz $\mathcal{S}$. El **haz cociente** $\mathcal{Q} = \mathcal{S}/\mathcal{R}$ se define como sigue: para cada $\mathbf{p} \in M$ sea

$$\mathcal{Q}_\mathbf{p} = \mathcal{S}_\mathbf{p}/\mathcal{R}_\mathbf{p}$$

el grupo cociente natural, y sea

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{\mathbf{p} \in M} \mathcal{Q}_\mathbf{p}$$

con la proyeccion natural $\pi(\mathcal{Q}_\mathbf{p}) = \mathbf{p}$.

La aplicacion natural

$$\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{Q}$$

que a $\mathbf{s} \in \mathcal{S}_\mathbf{p}$ asocia el elemento

$$\varphi(\mathbf{s}) = \mathbf{s} + \mathcal{R}_\mathbf{p} \in \mathcal{Q}_\mathbf{p} \equiv \mathcal{S}_\mathbf{p}/\mathcal{R}_\mathbf{p}$$

conmuta con las proyecciones π a M, es decir

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{Q} \arrow[dl, "\pi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Se introduce en $\mathcal{Q}$ la topologia cociente natural, es decir, $\mathcal{U} \subset \mathcal{Q}$ es abierto en $\mathcal{Q}$ si $\varphi^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{S}$ es abierto en $\mathcal{S}$. De este modo $\mathcal{Q}$ tiene la estructura de un haz (entendido como espacio etale sobre M).

Lema

El cociente $\mathcal{Q} = \mathcal{S}/\mathcal{R}$ definido como se ha indicado arriba tiene la estructura de un haz.

Proof.

$* * *$

□

Ejemplo de haz cociente: El haz rascacielos, II

Sea M una superficie de Riemann, y sea $\mathcal{O}$ el haz de germenes de funciones holomorfas en M.

Sea $\mathrm{P} = \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ un conjunto finito de puntos distintos sobre M, y para cada abierto $\mathcal{U} \subset M$ sea $\mathcal{R}$ el prehaz siguiente:

$$\mathcal{R}(\mathcal{U}) = \begin{cases} \mathcal{O}(\mathcal{U}) & \text{si } \mathbf{p}_i \neq \mathcal{U} \\ f \in \mathcal{O}(\mathcal{U}) : f(\mathbf{p}_i) = 0 & \text{si } \mathbf{p}_i \in \mathcal{U} \end{cases}$$

Notese que $\mathcal{R}(\mathcal{U})$ es un subgrupo de $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ y que la familia de todos los grupos $\{\mathcal{R}(\mathcal{U})\}$ para todos los abiertos $\mathcal{U}$ de M con la restriccion natural forman un prehaz sobre M. El haz asociado es por tanto un subhaz $\mathcal{R} \subset \mathcal{O}$, dando lugar aun haz cociente

$$\mathcal{Q} = \mathcal{O}/\mathcal{R}.$$

Pasemos a describir el haz cociente que acabamos de construir.

En primer lugar, los germenes de funciones holomorfas en $\mathbf{p}$ se identifican con las series de potencias convergentes alrededor de $\mathbf{p}$ por lo que cada elemento en $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}$ tiene la forma

$$P(z,\mathbf{p}) = \sum_{0}^{\infty} P_i(z-\mathbf{p})^i = P_0 + P_1(z-\mathbf{p}) + P_2(z-\mathbf{p})^2 + \dots$$

Dado un punto $\mathbf{p} \notin \mathrm{P}$ se tiene por construccion que $\mathcal{R}(\mathcal{U}) = \mathcal{O}(\mathcal{U})$ y, necesariamente, que $\mathcal{R}_{\mathbf{p}} = \mathcal{O}_{\mathbf{p}}$. En consecuencia

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{p}} = \mathcal{S}_{\mathbf{p}}/\mathcal{R}_{\mathbf{p}} = \mathcal{O}_{\mathbf{p}}/\mathcal{O}_{\mathbf{p}} = 0.$$

Si, por el contrario, $\mathbf{p} \in \mathrm{P}$ entonces $\mathcal{R}_{\mathbf{p}} \subset \mathcal{O}_{\mathbf{p}}$ es el subgrupo de germenes de funciones holomorfas que se anulan en $\mathbf{p}$. El subgrupo $\mathcal{R}_{\mathbf{p}}$ esta formado por aquellas series de potencias convergentes con termino constante igual a cero:

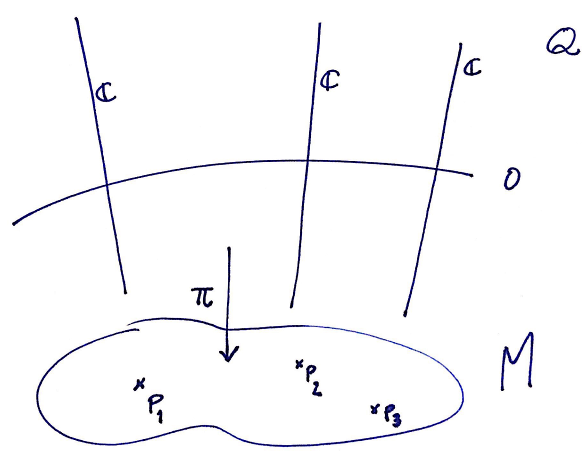
$$P(z,\mathbf{p}) = \sum_{1}^{\infty} P_i(z-\mathbf{p})^i = P_1(z-\mathbf{p}) + P_2(z-\mathbf{p})^2 + \dots$$

Por tanto

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{p}} = \mathcal{O}_{\mathbf{p}}/\mathcal{R}_{\mathbf{p}} \cong \mathbb{C}$$

El homomorfismo $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{Q}$ consiste en asignar a la serie $P(z,\mathbf{p}) \in \mathcal{O}_{\mathbf{p}}$ su termino constante

$$\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{Q} : P(z,\mathbf{p}) \mapsto P_0$$



En resumen, $\mathcal{Q}$ tiene tallos triviales, consistentes en el grupo $\{0\}$ solamente, en todos los puntos menos en la coleccion finita P, que tienen tallo $\mathbb{C}$. Este es justamente el haz rascacielos de la seccion anterior.

2.6 Homomorfismos de haces

Supongase que $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ son haces de grupos abelianos sobre M, con proyecciones $\sigma : \mathcal{F} \to M$ y $\tau : \mathcal{G} \to M$.

Definicion

Una aplicacion $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es una **aplicacion entre haces** si

1. φ es continua;
2. $\tau \circ \varphi = \sigma$, es decir: para todo punto $\mathbf{p} \in M$, $\varphi(\mathcal{F}_{\mathbf{p}}) \subset \mathcal{G}_{\mathbf{p}}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & \mathcal{G} \arrow[dl, "\tau"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Equivalentemente, la aplicacion φ preserva los tallos.

Por la propiedad (2) de la definicion, se tiene que si $f \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ entonces $\varphi \circ f$ sera una aplicacion continua $\mathcal{U} \to \mathcal{G}$ tal que

$$\tau(\varphi \circ f) = \sigma \circ f = 1$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rr, "\varphi"] & & \mathcal{G} \\ & M \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "\varphi\circ f"'] & \end{tikzcd}$$

por tanto $\varphi \circ f \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{G})$.

Definicion

La aplicacion entre haces $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ determina una **aplicacion inducida** φ^*

$$\varphi^* : \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{G})$$

Definicion

Una aplicacion entre haces φ se dice que es un **homomorfismo de haces** si es un homomorfismo de grupos abelianos en cada tallo. La aplicacion inducida φ^* entre los grupos de secciones se llama **homomorfismo inducido**. Un **isomorfismo de haces** es un homomorfismo de haces tal que su aplicacion inversa es tambien homomorfismo de haces. Denotaremos $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$ cuando $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sean haces isomorfos.

Ejemplo: El homomorfismo exponencial

Sea $\mathcal{O}$ el haz de germenes de funciones holomorfas sobre la superficie de Riemann M. Para cada germen $\mathbf{s} \in \mathcal{O}_\mathbf{p}$ (representado localmente como $\mathbf{s} = [f_\alpha]_\mathbf{p}$ para cierta funcion holomorfa $f_\alpha \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_\alpha)$ definida en $\mathcal{U}_\alpha \subset M$) asociamos el germen $\exp(\mathbf{s}) = [\exp(2\pi i f_\alpha)]_\mathbf{p} \in \mathcal{O}^*_\mathbf{p}$. Esto determina un homomorfismo de haces

$$\exp : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$$

Como la estructura de los tallos de los haces con los que estamos trabajando es de grupo abeliano (de hecho podriamos haber trabajado directamente con **A**-modulos), las nociones standard de los subespacios determinados por aplicaciones de tipo lineal (nucleos, etc) se trasladan naturalmente al contexto que nos ocupa, permitiendo definir el los haces nucleo e imagen de los homomorfismos de haces de grupos abelianos.

Definicion

Para cualquier homomorfismo de haces $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sobre M el **nucleo** $\ker\varphi$ de φ es el subconjunto de $\mathbf{s} \in \mathcal{F}$ tales que $\varphi(\mathbf{s}) = 0$ en cada $\mathcal{G}_\mathbf{p}$.
La **imagen** $\mathrm{im}\varphi$ de φ es $\varphi(\mathbf{s}) \in \mathcal{G}$ para todo $\mathbf{s} \in \mathcal{F}$.

Es decir, $\ker\varphi$ el subconjunto $\varphi^{-1}(0) \subset \mathcal{F}$ donde $0 \in \Gamma(M, \mathcal{G})$ es la seccion nula de $\mathcal{G}$. Es evidente que $\ker\varphi$ es un subhaz de $\mathcal{F}$. Por otro lado $\mathrm{im}\varphi$ es tambien un subhaz de $\mathcal{G}$ y se sigue que $\mathrm{im}\varphi \cong \mathcal{F}/\ker\varphi$, aplicando el primer teorema de isomorfismo a cada tallo.

2.6.1 Secuencias exactas

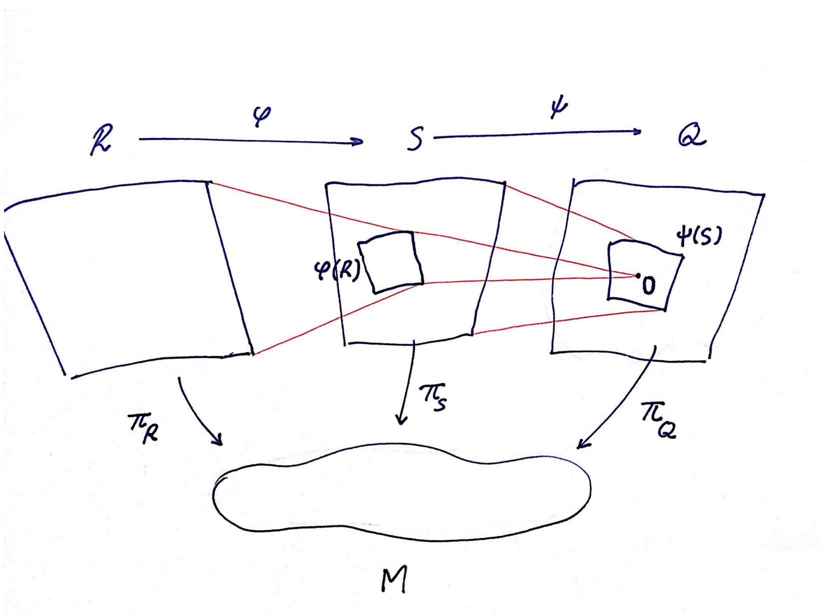
Definicion

Sean $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ y $\psi : \mathcal{S} \to \mathcal{Q}$ homomorfismos de haces cualesquiera $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{Q}$, el diagrama

$$\mathcal{R} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{S} \xrightarrow{\psi} \mathcal{Q}$$

es una **secuencia (de haces) exacta** (en $\mathcal{S}$) si la imagen de φ es el nucleo de ψ

$$\text{im } \varphi = \ker\ \psi$$



Analogamente, una concatenacion de haces y homomorfismos

$$\ldots \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathcal{S}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{S}_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \mathcal{S}_{i+2} \xrightarrow{\varphi_{i+2}} \ldots$$

sera llamada secuencia exacta en $\mathcal{S}_{i+1}$ si el par de homomorfismos consecutivos $\varphi_i : \mathcal{S}_i \to \mathcal{S}_{i+1}$ y $\varphi_{i+1} : \mathcal{S}_{i+1} \to \mathcal{S}_{i+2}$ la imagen del primero coincide con el nucleo del segundo

$$\text{im } \varphi_i = \ker\ \varphi_{i+1}$$

La secuencia sera exacta si es exacta para todo $\mathcal{S}_i$.

La nocion de secuencia exacta de haces sera central en lo que sigue. De hecho, un gran numero de los conceptos basicos de las matematicas pueden escribirse en terminos de la exactitud (o inexactitud) de estas cuencias.

Lema

Sea 0 el haz trivial cuyo tallo es el grupo $\{0\}$ en cada punto de M, y sean $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{Q}$ haces cualesquiera sobre M. La secuencia de haces y homomorfismos

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{S} \xrightarrow{\psi} \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

es exacta si y solo si

1. φ es inyectiva ,
2. ψ es suprayectiva, y
3. $\ker\ \psi = \mathrm{im}\ \varphi$ de modo que $\mathcal{Q} \cong \mathcal{S}/\varphi(\mathcal{R})$.

Proof. Si φ es inyectiva, entonces

$$\ker \varphi = 0.$$

Interpretando en esta ecuacion el termino de la derecha como la imagen de la aplicacion $0 \to \mathcal{R}$, es equivalente a que la secuencia es exacta en $\mathcal{R}$. Se tiene automaticamente que $\varphi(\mathcal{R}) \cong \mathcal{R}$ y $\mathcal{R}$ es un subhaz de $\mathcal{S}$.

Si ψ es suprayectiva, se tiene que

$$\mathrm{im}\ \psi = \mathcal{Q}$$

y por tanto, interpretando $\mathcal{Q}$ en esta ecuacion como el nucleo de la aplicacion $\mathcal{Q} \to 0$, se obtiene que la secuencia es exacta en $\mathcal{Q}$.

Si ademas $\ker \psi = \mathrm{im}\varphi$ entonces la secuencia seria exacta tambien en $\mathcal{S}$ por definicion, y por tanto la secuencia completa seria exacta.

Ademas, aplicando el primer teorema de isomorfismo $\mathrm{im}\psi \cong \mathcal{S}/\ker\psi$ pero por la exactitud de la secuencia

$$\mathcal{Q} = \mathrm{im}\psi \cong \mathcal{S}/\ker\psi = \mathcal{S}/\mathrm{im}\varphi = S/\varphi(\mathcal{R}) \cong \mathcal{S}/\mathcal{R}.$$

□

La reciproca es cierta

Lema

Sea $\mathcal{R}$ un subhaz de $\mathcal{S}$, la inclusion $\iota : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ es un homomorfismo de haces. Simultaneamente la proyeccion natural $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}/\mathcal{R}$ es tambien un homomorfismo de haces tal que

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\ \iota\ } \mathcal{S} \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathcal{S}/\mathcal{R} \longrightarrow 0$$

es una secuencia exacta.

Ejemplo: La secuencia exacta exponencial

Consideremos una superficie de Riemann M y, como siempre, el haz de germenes de funciones holomorfas $\mathcal{O}$ sobre M.

En el ejemplo anterior introdujimos tambien un homomorfismo de haces (el homomorfismo exponencial) $\exp : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$ en el haz de germenes de funciones holomorfas no-nulas. Este homomorfismo exponencial es suprayectivo en cada tallo.

El nucleo de este homomorfismo es el haz de germenes de funciones holomorfas que toman solamente valores en $\mathbb{Z}$ (y que denotare simplemente como $\mathbb{Z} \subset \mathcal{O}$. Este haz es isomorfo al haz de funciones localmente constantes (valoradas en $\mathbb{Z}$) sobre M, de ahi la notacion.

Por tanto tenemos la secuencia exacta de haces

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\ \exp\ } \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$

Analogamente, trabajando con el haz de germenes de funciones continuas tendriamos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\ \exp\ } \mathcal{C}^* \longrightarrow 0$$