2

Leccion 2 (v1.0)

2.1 Funciones holomorfas sobre superficies de Riemann

La nocion de funcion holomorfa puede trasladarse de $\mathbb{C}$ a las superficies de Riemann. Para ello, basta interpretar una funcion $M \to \mathbb{C}$ como una funcion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ componiendo apropiadamente con las cartas locales, dando lugar a una expresion local de la funcion, y comprobar si la expresion local es holomorfa.

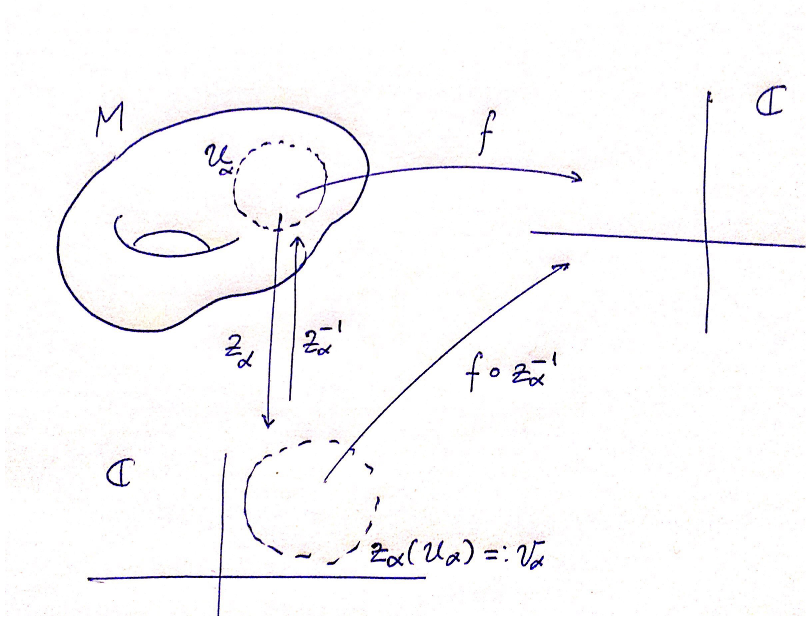
Este es el modo usual de proceder sobre variedades o, en particular, en superficies de Riemann. Mas adelante, cuando nos preguntemos por ejemplo por una propiedad de una funcion holomorfa sobre la superficie de Riemann como podria ser el 'orden de la funcion en un punto' *dicho analisis no se realizara sobre la funcion directamente sino sobre su expresion local*

Definicion

Supongase que M es una superficie de Riemann, y $\{\mathcal{U}_\alpha, z_\alpha\}$ un atlas complejo de M. Una aplicación f de un abierto $\mathcal{U} \subset M$ en $\mathbb{C}$ se dice que es una **función holomorfa** *en $\mathcal{U}$ si para toda intersección $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_\alpha \neq \varnothing$, la aplicación*

$$f \circ z_\alpha^{-1} : z_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

es una función holomorfa (en el sentido usual $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$)



Esta definición es independiente del recubrimiento coordenado escogido ie depende sólo de la estructura compleja.

En general, cuando pensemos en funciones, es util considerar diferentes 'elementos de funcion', *es decir, parejas* $(\mathcal{U}, f)$ *formadas por un region (abierta)* $\mathcal{U}$, *y una funcion* $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ *definida en dicha region De este modo, aunque consideremos una misma expresion formal de la funcion* f, *tener en cuenta regiones diferentes o restricciones de una misma region, como por ejemplo* $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$, *corresponderia a tener diferentes elementos de funcion, esto es, por ejemplo,* $(\mathcal{U}, f)$ *y* $(\mathcal{W}, f)$ *son elementos de funcion diferentes. Usualmente me referire a tales elementos de funcion como* 'funciones locales' *y obviare especificar la region de definicion si no es imprescindible.*

Definicion

El conjunto de todas las funciones holomorfas en el abierto $\mathcal{U}$ de M se llama **anillo de funciones holomorfas en** $\mathcal{U}$ y se denota por $\mathcal{O}_M(\mathcal{U})$ o simplemente $\mathcal{O}(\mathcal{U})$.
Este conjunto es un anillo bajo la adición y multiplicación puntual de funciones,

$$(f+g)(p) = f(p) + g(p), \qquad (f \cdot g)(p) = f(p)g(p).$$

Además contiene el conjunto de las funciones constantes como un sub–anillo isomorfo a $\mathbb{C}$.

La definicion anterior es un ejemplo de **anillo de funciones locales**.

Por ejemplo, considerada como una variedad diferenciable, seria posible definir de modo similiar el l anillo de **funciones** infinitamente **diferenciables** definidas en $\mathcal{U}$ que se denota por $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$.

El **cuerpo de funciones meromorfas**[1] en un abierto $\mathcal{U} \subset M$ se define análogamente y se denota por $\mathcal{M}(\mathcal{U})$.

Definicion

Sea $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ y $\mathbf{p} \in \mathcal{U} \subset M$. Entonces, el **orden de la función** f **en** $\mathbf{p}$ denotado por $\nu_{\mathbf{p}}(f)$ se define como el orden de la expresion local de la función holomorfa $f \circ z_\alpha^{-1}$ en el punto $z_\alpha(\mathbf{p}) \in \mathbb{C}$ para cualquier entorno coordenado $\mathcal{U}_\alpha$, i.e.,

$$\nu_{\mathbf{p}}(f) = \nu_{z_\alpha(\mathbf{p})}(f \circ z_\alpha^{-1})$$

El orden no depende del recubrimiento coordenado, sólo de la estructura compleja.

En analisis complejo, es fundamental el estudio de los puntos del dominio de una cierta funcion en la que esta se anula (los ceros de la funcion), o bien en que tiende a infinito (los polos de la funcion). Si esto no ocurre, el orden de la funcion es cero. De otro modo el orden es positivo (en los ceros) o negativo (en los polos) con un valor absoluto que tiene que ver con la multiplicidad.

[1] Para repasar detalles sobre el concepto de funcion meromorfa, asi como sobre el orden de una funcion meromorfa en un punto (siguiente definicion) vease **Apendice B - Funciones meromorfas**

En general, para una funcion holomorfa, el orden es $\nu_{\mathbf{p}}(f) \geq 0$ y sera $\nu_p(f) > 0$ sólamente en un subconjunto discreto de puntos de $\mathcal{U}$ si f no es identicamente cero.

El orden de la función f en $\mathbf{p}$, para una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$ definida en $\mathcal{U}$ puede definirse de manera análoga. En este caso $\nu_{\mathbf{p}}(f)$ puede ser negativo, pero de nuevo $\nu_{\mathbf{p}}(f) \neq 0$ sólo en un subconjunto discreto.

Concluimos esta seccion volviendo por un momento al asunto de las funciones locales. En el caso de que decidamos tomar como region abierta toda la superficie de Riemann, escribimos $\mathcal{O}(M)$ para el **anillo de funciones holomorfas globales**. Cabe esperar que el anillo de funciones globales $\mathcal{O}(M)$ sea *mas reducido* que los anillos de funciones locales $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ ya que, intuitivamente, hay mas puntos que se prestan a que la funcion puede tener problemas.

Lema 1

Si M es una superficie de Riemann compacta conexa, $\mathcal{O}(M) = \mathbb{C}$.

Proof. En primer lugar el anillo de funciones constantes $\mathbb{C}$ es un subanillo de $\mathcal{O}(M)$.

Para toda $f \in \mathcal{O}(M)$ se puede considerar una nueva funcion global, continua, valorada en $\mathbb{R}$, dada por su norma, es decir,

$$|f| : M \to \mathbb{R}.$$

El dominio de la funcion $|f|$ es todo M que es compacta por hipotesis; por tanto, por el *Teorema del Valor Maximo* la funcion $|f|$ alcanza su valor maximo en algun punto $\mathbf{p} \in M$. Llamemos a este valor $|f(\mathbf{p})| = c$, y denotemos por S al conjunto de todos los puntos $\mathbf{q} \in M$ tales que comparten dicha imagen por $|f|$, es decir

$$S = \{\mathbf{q} \in M : |f(\mathbf{q})| = c\}$$

Por definicion, el conjunto S es cerrado.

Sea ahora $\mathbf{q} \in S$ un punto cualquiera de S, y $(\mathcal{U}_\alpha, z_\alpha)$ un sistema de coordenadas de M en $\mathbf{q}$. Por medio este sistema de coordenadas podemos encontrar la expresion local de la funcion holomorfa $f : M \to \mathbb{C}$, es decir

$$f \circ z_\alpha^{-1} : z_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

y tambien la expresion local de la funcion continua $|f| : M \to \mathbb{R}$, ie

$$|f \circ z_\alpha^{-1}| : z_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R},$$

que tiene un maximo en el punto interior $z_\alpha(\mathbf{q}) \in z_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$. Por el *Principio del Modulo Maximo* del analisis complejo, si la funcion continua $|f \circ z_\alpha^{-1}|$ tiene un maximo en un punto interior de un abierto, entonces la funcion holomorfa $f \circ z_\alpha^{-1}$ es constante en un entorno abierto $\mathcal{V} \subset z_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$ de $z_\alpha(\mathbf{p})$. Se sigue que f es constante en un entorno abierto $\mathcal{U} = z_\alpha^{-1}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}_\alpha$ de $\mathbf{q}$. Esto quiere decir que todo punto $\mathbf{q}$ tiene un entorno abierto de puntos que tambien perteneen a S, lo que implica que S es abierto.

Por todo lo anterior S es abierto y cerrado en M, pero por la hipotesis de conexion, los unicos subconjuntos de M que son a la vez abiertos y cerrados son M y el vacio $\varnothing$.

Sinembargo, S no es vacio (tenemos la existencia del punto $\mathbf{p}$), y por tanto $S = M$; es decir, si $f \in \mathcal{O}(M)$ es constante, y el Lema queda demostrado. □

* Funciones Meromorfas

El desarrollo de la teoria requiere no solo de funciones holomorfas, sino tambien de las funciones meromorfas. La relacion entre funciones holomorfas y meromorfas es aquella entre funciones polinomicas y funciones racionales. Utilizaremos por tanto los polinomios y las funciones racionales como ejemplos sencillos de funciones holomorfas y meromorfas para ilustrar las propiedades mas relevantes, es decir, nos restringiremos a la categoria algebraica.

Polinomios y sus ceros

Como ejemplos triviales de funciones holomorfas tenemos la **funcion constante** $f(z) = c$, y la **funcion lineal** $f(z) = z$ que son evidentemente holomorfas pues en ambos casos $\bar{\partial} f = 0$. Por otro lado la suma y el producto de funciones holomorfas es una funcion holomorfa, y esto nos permite introducir la **funcion polinomica** de grado n

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

donde por hipotesis $P(z) \neq 0$, que es tambien holomorfa.

Por el *Teorema Fundamental del Algebra*, la ecuacion

$$P(z) = 0, \qquad n > 0$$

tiene n soluciones posiblemente repetidas, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ y entonces

$$P(z) = a_n(z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_n)$$

o, si tomamos $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, $s \le n$ como soluciones sin repeticion pero con multiplicidades $m(\alpha_1), \dots, m(\alpha_s)$

$$P(z) = a_n(z - \alpha_1)^{m(\alpha_1)} \dots (z - \alpha_s)^{m(\alpha_s)}$$

Notese que $m(\alpha_1) + \cdots + m(\alpha_s) = n$.

Definicion

Decimos que α es un **cero de** $P(z)$ **de orden** m si, $P(\alpha) = 0$ y su multiplicidad es $m(\alpha) = m$.

Un criterio para caracterizar los ceros

$\alpha \in \mathbb{C}$ es un cero de $P(z)$ de orden m si

$$P(\alpha) = 0$$

y las derivadas sucesivas cumplen que

$$\begin{aligned} P'(\alpha) = P''(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) &= 0 \\ P^{(m)}(\alpha) &\neq 0 \end{aligned}$$

Funciones racionales y sus polos

Una **funcion racional** es el cociente de dos polinomios

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Diremos que es **irreducible** si los polinomios $P(z), Q(z)$ no tienen ceros comunes.

Se entiende que una funcion racional es $R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ donde $\mathbb{C}_\infty$ denota la *representacion esferica de los numeros complejos* o *esfera de Riemann*[2] de tal modo que $R(z) = \infty$ en los ceros de $Q(z)$.

Definicion

Llamamos **polos** de $R(z)$ a los ceros de $Q(z)$. El orden de un polo α es el **orden** de α como cero de $Q(z)$.

Es conveniente definir R no como una funcion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ sino como una funcion extendida en $\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$. Para ello se definie una nueva funcion $R_1(z) := R(1/z)$ de tal modo que $R(\infty) = R_1(z)$ en $z = 0$.

Supongase que $R_1(0) = 0$. Entonces R tendria un **cero en** ∞. Si por el contrario $R_1(0) = \infty$, diremos que R tiene un **polo en** ∞. El correspondiente **orden del cero (o el polo) de** R **en** ∞ es el orden del cero (o polo) de R_1 en cero.

Notese que si

$$R(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}$$

entonces

$$\begin{aligned} R_1(z) &= \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}} \\ &= z^{m-n} \left(\frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m} \right) \end{aligned}$$

por tanto,

1. Si $m > n \Rightarrow R_1(0) = 0 \Rightarrow R(\infty) = 0$ es un cero de orden $\nu_\infty(R) = m - n$.

2. Si $m = n \Rightarrow R_1(0) = \frac{a_n}{b_m} \Rightarrow R(\infty) = \frac{a_n}{b_m}$ y el orden es $\nu_\infty(R) = 0$.

3. Si $m < n \Rightarrow R_1(0) = \infty \Rightarrow R(\infty) = \infty$ y se trata de un polo de orden $\nu_\infty(R) = n - m$.

[2]

Cantidad total de ceros y polos en una funcion racional

Supongase una funcion racional irreducible $R(z) = P(z)/Q(z)$ donde $P(z)$, $Q(z)$ son funciones polinomicas de grado n y m respectivamente.

Por el Teorema Fundamental del Algebra, $P(z)$ tiene n ceros (contados con sus respectivas multiplicidades). Analogamente, $Q(z)$ tiene m ceros (contados con sus respectivas multiplicidades), de modo que, $R(z)$ tiene (al menos) m polos (contados con sus multiplicidades). Considerando ademas el punto en el infinito $\infty \in \mathbb{C}_\infty$ se tiene por el razonamiento anterior que, ademas, si $m > n$ $R(z)$ tiene un cero en ∞ de orden (multiplicidad) $\nu_\infty R = m - n$. En consecuencia la cantidad total de ceros de $R(z)$ seria $n + (m - n) = m$. Igual que el numero de polos (ceros de $Q(z)$).

Si $m = n$ el numero de ceros y polos de $R(z)$ tambien coincide.

Finalmente si $m < n$, el punto del ∞ es un polo de orden $n - m$ y la cantidad total de polos seria $m + (n - m) = n$ ie, el numero de polos y de ceros tambien coincide.

En resumen, *en una funcion racional, la cantidad total de ceros y polos, contados con multiplicidad, e incluyendo los ceros o polos en infinito con sus multiplicidades, coincide.*

Generalizacion

> *No todas las funciones holomorfas son polinomios, ni todas las funciones meromorfas son funciones racionales. Sinembargo, todas las propiedades descritas arriba se generalizan directamente al substituir los adjtivos 'polinomica' por 'holomorfa', y 'racional' por 'meromorfa'. Reproducimos aqui sucintamente las definiciones y propiedades generalizadas.*

1. Diremos que $\alpha \in \mathbb{C}$ es un *cero de orden m de la funcion holomorfa f* si $f(\alpha) = 0$ y las derivadas sucesivas cumplen que $f'(\alpha) = f''(\alpha) = \cdots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$ con $f^{(m)} \neq 0$.

2. Localmente, una *funcion meromorfa h* puede expresarse como el *cociente de dos funciones holomorfas*, $h = f/g$.

3. Decimos que α es un *polo de orden m de la funcion meromorfa h* si $h(\alpha) = \infty$ con multiplicidad m, es decir, si en la representacion racional $h(z) = f(z)/g(z)$, α es un cero de orden m de g.

4. La *cantidad total de ceros y polos de una funcion meromorfa*, contados con multiplicidad, e incluyendo los ceros o polos en infinito con sus multiplicidades, coincide.

2.2 Ejemplos de funciones holomorfas, y meromorfas en superficies de Riemann

... sobre la esfera de Riemann

Consideremos la esfera de Riemann S^2 identificado con el plano complejo extendido mediante la representacion esferica $\mathbb{C}_\infty$.

Sea $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}$ una funcion definida en algun entorno de ∞. Entonces f es holomorfa en $z = \infty$ si y solo si $f_1(z) = f(1/z)$ es holomorfa en $z = 0$. En particular, si $f(z) = P(z)/Q(z)$ es una funcion racional, entonces f es holomorfa en $z = \infty$ si y solo si $deg\ (P) \leq deg\ (Q)$ puesto que en estos casos ∞ seria un cero, o un punto regular de f pero no un polo. Si $deg(P) > deg(Q)$ la funcion tendria un polo en ∞ y seria estrictamente meromorfa.

Por tanto, toda funcion racional sobre la esfera de Riemann es meromorfa (entendiendo aqui las funciones holomorfas como subclase de las meromorfas).

En general, cualquier funcion racional $P(z)/Q(z)$ es meromorfa (en sentido amplio) en la esfera de Riemann. De hecho, se puede demostrar que la reciproca es cierta: *toda funcion meromorfa sobre la esfera de Riemann es una funcion racional.*

... sobre la linea proyectiva compleja

Sea $\mathbb{P}^1$ la linea proyectiva compleja, vista como el cociente

$$\mathbb{P}^1 = \frac{\mathbb{C}^2 - \{0\}}{\mathbb{C}^*}$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}^*$ actua en $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ enviando el vector $\mathbf{v} = (\zeta_0, \zeta_1)$ a $(\lambda\zeta_0, \lambda\zeta_1)$. La orbita de esta accion en $\mathbb{C}^2$ es justamente la recta

$$l =< \{\mathbf{v}\} >= \{\mathbf{w} \in \mathbb{C}^{\mathbf{2}} : \mathbf{w} = \lambda\mathbf{v},\ \lambda \in \mathbb{C}^*\}$$

que corresponde al punto $[\mathbf{v}] = [\zeta_0 : \zeta_1]$ en $\mathbb{P}^1$.

Para construir una funcion en $\mathbb{P}^1$ intentamos primero definir funciones en $\mathbb{C}^2$ que sean invariantes por la accion de $\mathbb{C}^*$, es decir, que den el mismo valor a todos los puntos en una misma recta $l \subset \mathbb{C}^2$

$$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \ : \ f(\mathbf{v}) = f(\lambda\mathbf{v})$$

y que por tanto descienda a $\mathbb{P}^1$ definiendo una funcion (que denotamos por el mismo simbolo) que asigne un valor bien definido al punto que representa a dicha recta.

$$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C} \ : \ [\mathbf{v}] \mapsto f([\mathbf{v}]) := f(\mathbf{v})$$

Una vez tengamos esta funcion, comprobamos si es o no holomorfa/meromorfa.

El prototipo de una tal funcion es

$$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \ : \ (\zeta_0, \zeta_1) \mapsto \frac{\zeta_0}{\zeta_1}$$

como

$$f(\mathbf{v}) = f(\zeta_0, \zeta_1) = \frac{\zeta_0}{\zeta_1} = \frac{\lambda\zeta_0}{\lambda\zeta_1} = f(\lambda\zeta_0, \lambda\zeta_1) = f(\mathbf{v})$$

esta funcion define una nueva funcion (denotada con el mismo simbolo)

$$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C} \ : \ [\mathbf{v}] \mapsto f([\mathbf{v}]) := f(\mathbf{v}) = \frac{\zeta_0}{\zeta_1}$$

Un polinomio de dos variables $P(z, w)$ es **homogeneo de grado** d si todos sus terminos tienen el mismo grado total d (esto es, sumando los exponentes de las variables z y w), y podra escribirse como

$$P(z, w) = \sum_{i=0}^{d} a_i z^i w^{d-i}$$

Un polinomio homogeneo de grado d, considerado como una funcion polinomia definida en $\mathbb{C}^2$ no es invariante bajo la accion de $\mathbb{C}^*$, pues

$$P(\lambda z, \lambda w) = \lambda^d P(z, w)$$

asi que no define una funcion holomorfa en P^1. Sinembargo, el cociente de dos polinomios $P(z, w)$ y $Q(z, w)$ homogeneos del mismo grado, y tal que $Q(z, w)$ no sea identicamente cero, si es invariante por la accion de $\mathbb{C}^*$

$$R(\lambda z, \lambda w) = \frac{P(\lambda z, \lambda w)}{Q(\lambda z, \lambda w)} = \frac{\lambda^d P(z, w)}{\lambda^d Q(z, w)} = \frac{P(z, w)}{Q(z, w)} = R(z, w)$$

Lema

Si $P(z.w)$ y $Q(z, w)$ son polinomios homogeneos del mismo grado, con Q no identiamente nulo, entonces $R(z, w) = P(z, w)/Q(z, w)$ desciende a una funcion meromorfa sobre $\mathbb{P}^1$.

Proof. Consideremos uno de los abiertos coordenados estandard de $\mathbb{P}^1$, por ejemplo $\mathcal{U}_1 \subset \mathbb{P}^1$ ie

$$\{[\zeta_0 : \zeta_1] \in \mathbb{P}^1 \ : \ \zeta_1 \neq 0\}$$

con aplicacion de coordenadas:

$$z_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathbb{C} \ : \ [\zeta_0 : \zeta_1] \mapsto z_1([\zeta_0 : \zeta_1]) = \frac{\zeta_0}{\zeta_1}.$$

Dado un punto de $w \in \mathbb{C}$, su inversa por z_1 es

$$z_1^{-1}(w) = [w : 1].$$

Para comprabar que la funcion racional

$$R : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C} \ : \ [\zeta_0 : \zeta_1] \mapsto R([\zeta_0 : \zeta_1]) = \frac{P(\zeta_0, \zeta_1)}{Q(\zeta_0, \zeta_1)}$$

es meromorfa en $\mathcal{U}_1$ debemos comprobar que $R \circ z_1^{-1}$ es meromorfa como funcion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, lo cual es evidente pues

$$R(z_1^{-1}(w)) = R([w : 1]) = \frac{P(w, 1)}{Q(w, 1)}$$

es una funcion racional $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y por tanto meromorfa.

El calculo en la otra carta es similar. $\square$

Notamos, sin demostracion, que la reciproca es cierta: *Toda funcion meromorfa en* $\mathbb{P}^1$ *es el cociente de polinomios homogeneos en dos variables, del mismo grado.*

2.3 Aplicaciones Holomorfas

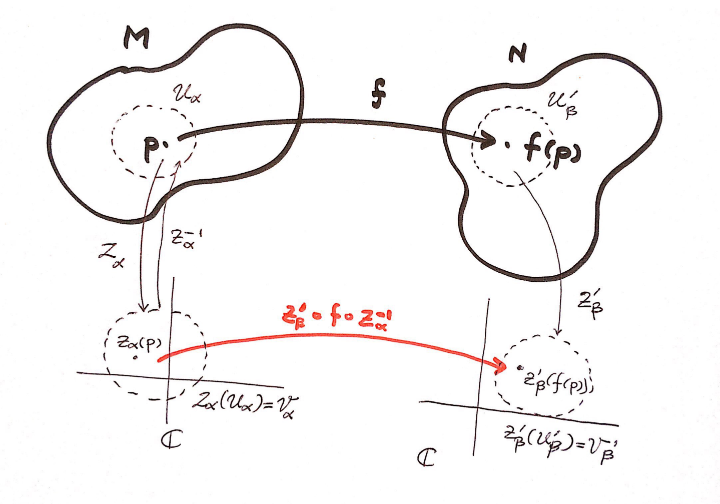
Definicion de aplicacion holomorfa entre superficies de Riemann

Definicion

Sean M y N dos superficies de Riemann, y sean $\{\mathcal{U}_\alpha, z_\alpha\}$ y $\{\mathcal{U}'_\alpha, z'_\alpha\}$ dos atlas complejos correspondientes a sus respectivas estructuras complejas. Una aplicacion $f : M \to N$ es **aplicacion holomorfa** si para todo $\mathbf{p} \in M$ y para todos los entornos coordenados $\mathcal{U}_\alpha$ de M tales que $\mathbf{p} \in \mathcal{U}_\alpha \subset M$, y $\mathcal{U}'_\beta$ de N tales que $f(\mathbf{p}) \in \mathcal{U}'_\beta \subset N$, la funcion $z'_\beta \circ f \circ z_\alpha^{-1}$ es holomorfa en el sentido usual

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p} \in \mathcal{U}_\alpha \subset M & \xrightarrow{f} & f(p) \in \mathcal{U}'_\beta \subset N \\ {\scriptstyle z_\alpha}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle z'_\beta} \\ z_\alpha(\mathbf{p}) \in \mathcal{V}_\alpha \subset \mathbb{C} & \xrightarrow[z'_\beta \circ f \circ z_\alpha^{-1}]{} & z'_\beta(f(\mathbf{p})) \in \mathcal{V}'_\beta \subset \mathbb{C} \end{array}$$

Denotaremos al conjunto de aplicaciones holomorfas $M \to N$ como $\mathcal{O}(M, N)$.



La propiedad de ser aplicacion holomorfa asi definida no depende de las cartas utilizadas para expresar la funcion localmente, pues si $f : M \to N$ es holomorfa usando las cartas $(\mathcal{U}_\alpha, z_\alpha)$ de M y $(\mathcal{U}'_\beta, z'_\beta)$ de N, esto es asi porque $z'_\beta \circ f \circ z_\alpha^{-1}$ es holomorfa como funcion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Utilizando nuevas cartas $(\mathcal{U}_\gamma, z_\gamma)$ de M y $(\mathcal{U}'_\delta, z'_\delta)$ de N se tendria que

$$\begin{aligned} z'_\delta \circ f \circ z_\gamma^{-1} &= z'_\delta \circ (z'^{-1}_\beta \circ z'_\beta) \circ f \circ (z_\alpha^{-1} \circ z_\alpha) \circ z_\gamma^{-1} \\ &= (z'_\delta \circ z'^{-1}_\beta) \circ (z'_\beta \circ f \circ z_\alpha^{-1}) \circ (z_\alpha \circ z_\gamma^{-1}) \end{aligned}$$

que es la composicion de una funcion holomorfa (el termino central) con dos funciones de transicion (que son holomorfas).

Caracterizacion de aplicaciones holomorfas

Supongamos que $f : M \to N$ es una aplicacion continua entre las superficies de Riemann M y N, y sea $\mathcal{V} \subset N$ un subconjunto cualquiera de N. Denotemos por simplicidad $\mathcal{U} = f^{-1}(\mathcal{V})$.

La aplicacion f induce un homomorfismo

$$f^* : \mathcal{C}^0_N(\mathcal{V}) \to \mathcal{C}^0_M(\mathcal{U}) \ : \ h \mapsto f^*h = h \circ f$$

entre el anillo local de funciones continuas definidas en $\mathcal{V} \subset M$, es decir $\mathcal{C}^0_N(\mathcal{V})$, y el anillo local de funciones continuas en $f^{-1}(\mathcal{V}) = \mathcal{U} \subset M$, es decir, $\mathcal{C}^0_M(\mathcal{U})$.

Llamamos a este homomorfismo f^* el *pull-back por f*.

En particular las funciones holomorfas son continuas, y esto quiere decir que

$$\mathcal{O}_N(\mathcal{V}) \subset \mathcal{C}^0_N(\mathcal{V}),$$

y tambien que

$$f^*\mathcal{O}_N(\mathcal{V}) \subset \mathcal{C}^0_M(\mathcal{U}).$$

Sinembargo, nada garantiza que el pull-back por f (continua) de una funcion local holomorfa en $\mathcal{V}$, vaya a ser una funcion holomorfa en $\mathcal{U}$

$$f^*\mathcal{O}_N(\mathcal{V}) \overset{?}{\subset} \mathcal{O}_M(\mathcal{U})$$

Esta propiedad sera caracteristica a las aplicaciones holomorfas.

Lema 2

Una aplicacion continua $f : M \to N$ entre superficies de Riemann es aplicacion holomorfa si y solo si

$$f^*\mathcal{O}_N(\mathcal{V}) \subset \mathcal{O}_M(\mathcal{U})$$

para todo $\mathcal{V} \subset N$, donde $\mathcal{U} = f^{-1}(\mathcal{V})$.

Proof. Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{U}_\alpha \subset M$ y sea $f(\mathbf{p}) \in \mathcal{V}_\beta \in N$.

Supongase que $f^*\mathcal{O}(\mathcal{V}_\beta) \subset \mathcal{O}(\mathcal{U}_\alpha)$, y considerese en particular la aplicacion de coordenadas z'_β que es en particular una aplicacion holomorfa $z'_\beta \in \mathcal{O}(\mathcal{V}_\beta)$. Entonces, por hipotesis, $f^*z'_\beta = z'_\beta \circ f$ pertenece a $\mathcal{O}(\mathcal{U}_\alpha)$ y es por tanto holomorfa, implicando automaticamente que f es aplicacion holomorfa, pues $z'_\beta \circ f \circ z_\alpha^{-1} = (z'_\beta \circ f) \circ z_\alpha^{-1}$ es composicion de funciones holomorfas.

Reciproamente, supongase que $f : M \to N$ es una aplicacion holomorfa, y sea $h \in \mathcal{O}(\mathcal{V})$ una funcion holomorfa en un entorno abierto $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_\beta$ de $f(\mathbf{p})$. La expresion local de la funcion f^*h es $f^*h \circ z_\alpha^{-1}$. Entonces,

$$f^*h \circ z_\alpha^{-1} = (h \circ f) \circ z_\alpha^{-1} = (h \circ z'^{-1}_\beta) \circ (z'_\beta \circ f \circ z_\alpha^{-1})$$

que es la composicion de una funcion holomorfa (la expresion local de la funcion h, ie $h \circ z'^{-1}_\beta$) con una aplicacion holomrfa (expresion local de f, ie $z'_\beta \circ f \circ z_\alpha^{-1}$), por lo que f^*h es holomorfa en un entorno de $\mathbf{p}$. □

Definicion

Un homeomorfismo $f : M \to N$ entre superficies de Riemann es un **isomorfismo holomorfo** o **biholomorfismo** si f y f^{-1} son aplicaciones holomorfas; se dice entonces que las superficies de Riemann M, N son **holomorficamente isomorfas** o **biholomorfas**.

2.4 Funciones meromorfas, y aplicaciones holomorfas en $\mathbb{P}^1$.

El siguiente resultado importante permite traducir problemas sobre el analisis global sobre superficies de Riemann (estudio de funciones holomorfas y meromorfas definidas en una superficie de Riemann) en cuestiones geometricas (esto es, en aplicaciones entre superficies de Riemann).

Proposicion

Sea M una superficie de Riemann arbitraria. Existe una correspondencia biunivoca

$$\mathcal{M}(M) \cong \mathcal{O}(M, \mathbb{P}^1)$$

Proof. Supongase que $f \in \mathcal{M}(M)$, y sea $\mathbf{p}$ un punto de M. En un entorno $\mathcal{U}$ de $\mathbf{p}$ es posible expresar la funcion meromorfa f como el cociente de dos funciones holomorfas $f_0, f_1 \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ de modo que $f(\mathbf{p}) = f_0(\mathbf{p})/f_1(\mathbf{p})$. Esto permite definir una aplicacion holomorfa

$$F : U \subset M \to \mathcal{U}_1 \subset \mathbb{P}^1$$

en el entorno $\mathcal{U}$ de $\mathbf{p}$ como

$$F(x) = [f_0(x) : f_1(x)]$$

en cordenadas homogeneas, lo que en coordenadas inhomogeneas seria, precisamente, $f_0(x)/f_1(x)$.

La representacion de funciones meromorfas como el ratio de funciones holomorfas solo se puede hacer localmente, de modo que esta representacion de la aplicacion $F \in \mathcal{O}(M, \mathbb{P}^1)$ solo puede hacerse localmente. No obstante, toda aplicacion en $\mathbb{P}^1$ tiene localmente esta forma. $\square$

Evidentemente el resultado anterior podria haberse expresado en terminos de la esfera de Riemann, en lugar de la linea proyectiva compleja, al ser biholomorfas.