1

Leccion 1

1.1 Definiciones basicas

Definicion

Una **variedad topológica** *n-dimensional es un espacio Hausdorff M tal que todo punto $p \in M$ tiene un entorno abierto $\mathcal{U}$ homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$.*

Los siguientes parrafos pretenden expresar matematicamente de una forma mas explicita el contenido de la definicion anterior.

A la pareja $(\mathcal{U}, z)$ formada por el abierto $\mathcal{U}$ y el homeomorfismo $z : \mathcal{U} \to \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ de la definición se la llama **carta**, o **sistema de coordenadas** en p. En este caso, se dice que $\mathcal{U}$ es el **entorno coordenado** de p, y la aplicación z es la **aplicación de coordenadas** en p.

En coordendandas locales,

$$\begin{array}{rcl} z : \mathcal{U} & \to & \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n \\ p & \mapsto & z(p) = (x^1, \ldots, x^n) \end{array}$$

Sea M una variedad topológica. Se dice que la familia de cartas/sistemas de coordenadas $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, para un cierto conjunto de indices A, es un

atlas, o **recubrimiento coordenado** de M si

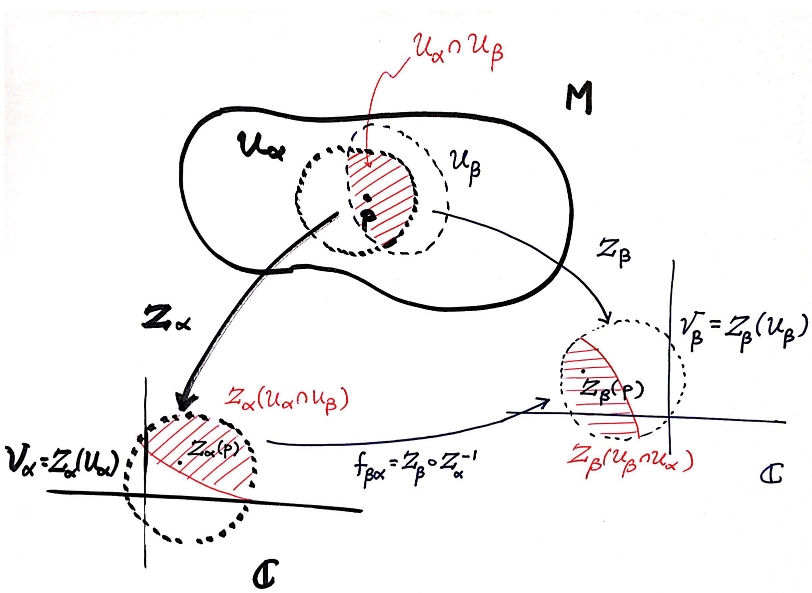
$$\bigcup_{\alpha} \mathcal{U}_\alpha = M$$

En el caso en que el atlas este compuesto por mas de una carta, las coordenadas locales vienen también indexadas por el índice que determina el abierto coordenado, de modo que

$$\begin{array}{rcl} z_\alpha : \mathcal{U}_\alpha & \to & \mathcal{V}_\alpha \\ p & \mapsto & z_\alpha(p) = (x^1_\alpha(p), \ldots, x^n_\alpha(p)) \end{array}$$

Supongase que los índices α, β son fijos y que $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \varnothing$. Los sistemas coordenados $(\mathcal{U}_\alpha, z_\alpha)$ y $(\mathcal{U}_\beta, z_\beta)$ definen los siguientes dos homeomorfismos entre abiertos de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{ll} f_{\alpha\beta} = z_\alpha \circ z_\beta^{-1} & : z_\beta(\mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\alpha) \longrightarrow z_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \\ f_{\beta\alpha} = z_\beta \circ z_\alpha^{-1} & : z_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \longrightarrow z_\beta(\mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\alpha) \end{array}$$



Estas aplicaciones se llaman **funciones de transición** del sistema de coordenadas, y jugarán un papel crucial en lo que sigue. A veces denotare $z_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \subset \mathcal{V}_\alpha$ como $\mathcal{V}_{\alpha\beta} \subset \mathcal{V}_\alpha$, etc. Es decir

$$\mathcal{V}_{\alpha\beta} = \{z_\alpha(p) : p \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta\} \subset \mathcal{V}_\alpha.$$

Notese que el orden de los indices es importante en esta definicion.

Comentarios.

1. Usualmente se introducen algunas condiciones adicionales de tipo tecnico en la definicion de variedad, como la condicion de *maximalidad* del atlas: es decir, en lugar de considerarse un atlas definido por una coleccion concreta de cartas, se considera el mayor atlas posible compatible con este; es decir, tal que las funciones de transicion sigan siendo homeomorfismos. Todo atlas esta contenido en un unico atlas maximal.

   Esto garantiza que no llamemos variedades diferentes a aquellas que hemos descrito mediante atlas distintos, pero que tienen el mismo atlas maximal.

2. En lo que sigue se supondrá que $n = 2$. Este numero es la **dimension** (real) de la variedad. Llamamos **superficies** a las variedades de dimension (real) 2.

3. Las imagenes de los entornos coordenados considerarán contenidos en $\mathbb{C}$ identificado con $\mathbb{R}^2$ ie $\mathcal{V} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Por tanto,

   $$z(p) = (x^1(p), x^2(p)) \cong x^1(p) + ix^2(p) = z^1(p)$$

   De este modo las funciones de transición serán aplicaciones $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

4. Por último, asumiremos que todas nuestras variedades son conexas.

1.2 Estructura Compleja

En la seccion anterior analizamos el concepto de variedad topologica e introdujimos las funciones de transicion. Para obtener nuevas clases de variedades mas especiales, se imponen condiciones adicionales a las funciones de transicion. Dependiendo del tipo de condiciones extra que se impongan a las funciones de transicion, las variedades tendran unas propiedades u otras, y reciben diferentes nombres (variedades diferenciables, variedades complejas, etc...)

Sea $\{(\mathcal{U}_\alpha, z_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ el atlas de una superficie M. Diremos que se trata de un **atlas complejo** si todas las funciones de transición

$$f_{\alpha\beta} : \mathcal{V}_{\beta\alpha} \subset \mathbb{C} \to \mathcal{V}_{\alpha\beta} \subset \mathbb{C}$$

son funciones holomorfas[1]. Equivalentemente, se dice que un tal atlas define una **estructura compleja** en M. Una superficie en que se ha fijado una estructura compleja determinada se denomina **superficie de Riemann.**

En resumen,

Definicion

Una **superficie de Riemann** es una variedad topologica 2-dimensional Hausdorff dotada de una familia de cartas $\{(\mathcal{U}_\alpha, z_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ para un cierto conjunto de indices A, donde $\mathcal{U}_\alpha \subset M$ son abiertos de M, y $z_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{V}_\alpha \subset \mathbb{C}$ son homeomorfismos, tales que:

1. Los entornos coordenados $\mathcal{U}_\alpha \subset M$ recubren M, es decir,
$$\bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha = M.$$
2. En cada interseccion $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \varnothing$ las funciones de transicion
$$f_{\beta\alpha} = z_\beta \circ z_\alpha^{-1} : z_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \to z_\beta(\mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\alpha)$$
son funciones holomorfas $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Notese que en la definicion anterior la dimension real de la variedad topologica subyacente es 2. La dimension compleja de la superficie de Riemann es 1, pues las cartas esta valoradas en $\mathbb{C}$.

En la definicion anterior, hemos decidido imponer la condicion de que las funciones de transicion fuesen holomorfas. Sinembargo, la única cualidad de las funciones holomorfas que es necesaria para la definición es *que la propiedad de ser holomorfa es cerrada bajo la composición, alli donde la composición esté bien definida.* A esta propiedad de ciertas clases de homeomorfismos se la conoce como **propiedad de pseudogrupo**.

Cualquier clase de homeomorfismos que satisfaga la propiedad de pseudogrupo podria haberse impuesto a las funciones de transicion, lo que daria

[1] Vease **Apendice A - Funciones holomorfas en** $\mathbb{C}$.

lugar a una nueva estructura, diferente, en la variedad M : asi, por ejemplo, el conjunto de homeomorfismos $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con derivadas parciales continuas de todo orden tiene la propiedad de pseudogrupo, por tanto imponer que las funciones de transición de una variedad topologica n-dimensional sean de este tipo particular permite introducir el concepto de **estructura diferenciable** y por tanto de *variedad diferenciable n-dimensional de clase* C^∞).

Definicion

Una **variedad diferenciable de clase** C^∞ es una variedad topologica n-dimensional Hausdorff dotada de una familia de cartas $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ para un cierto conjunto de indices A, donde $\mathcal{U}_\alpha \subset M$ son abiertos de M, y $\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{V}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ son homeomorfismos, tales que:

1. Los entornos coordenados $\mathcal{U}_\alpha \subset M$ recubren M, es decir,

$$\bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha = M.$$

2. En cada interseccion $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \varnothing$ las funciones de transicion

$$f_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \to \varphi_\beta(\mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\alpha)$$

   son funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, diferenciables de clase C^∞.

* Funciones holomorfas en $\mathbb{C}$

Funciones holomorfas.

Definición. *Una funcion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es* **holomorfa** *si es derivable en su dominio de definicion.*

Esta definicion aparentemente inocente oculta propiedades del comportamiento de estas funciones que no son compartidas por las funciones diferenciables reales. Las funciones holomorfas tambien reciben el nombre de funciones analiticas (complejas).

Ecuaciones de Cauchy–Riemann.

Supongase que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa. Su derivada en $z \in \mathbb{C}$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe por definicion, y debe ser independiente del modo en que $z + h$ se aproxime a z : en $\mathbb{R}$ el limite se puede tomar por la izquierda o por la derecha, pero en $\mathbb{C}$ existen infinitas posibilidades. En particular (1) h podria ser real $h \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, o (2) h podria ser imaginario puro $h \in i\,\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. En el primer caso

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y) + iv(x+h,y) - u(x,y) - iv(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} \\
&= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}
\end{aligned}$$

En el segundo caso, escribimos $h = ik$ con $k \in \mathbb{R}$ y se obtiene

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(z+ik) - f(z)}{ik} \\
&= \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{ik} \\
&= \lim_{k\to 0} \frac{u(x,y+k) + iv(x,y+k) - u(x,y) - iv(x,y)}{ik} \\
&= \lim_{k\to 0} \frac{1}{i}\frac{u(x,y+k) - u(x,y)}{k} + \lim_{k\to 0} \frac{v(x,y+k) - v(x,y)}{k} \\
&= -i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}.
\end{aligned}$$

La igualdad de estas expresiones implica las **ecuaciones de Cauchy–Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Una funcion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa, vista como aplicacion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ satisface las ecuaciones de Cauchy–Riemann.

Derivada parcial holomorfa y antiholomorfa

Escribiendo $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$ e interpretando z como una variable intermedia escrita en terminos de x, y ie $z(x, y)$ podemos escribir la funcion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como una funcion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $f(z) = f(z(x, y))$, o tambien como $f(\bar{z}) = f(\bar{z}(x, y))$. Derivando usando la regla de la cadena se tiene que formalmente

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial z}$$

de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Analogamente, escribiendo $f(\bar{z}(x, y))$ se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = -i\frac{\partial f}{\partial z}$$

con lo que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Estas expresiones son *formales* en el sentido de que no se basan en la definicion de derivada como limite.

Supongamos que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es, ademas, holomorfa. Si expresamos $f = u + iv$, y aplicamos Cauchy–Rieman se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \overset{\text{CR}}{=} \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$i\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \overset{\text{CR}}{=} i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}$$

y por tanto

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

Esto sugiere que una funcion holomorfa es una *verdadera* funcion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en lugar de simplemente una funcion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ en la que hemos decidido identificar $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

1.3 Ejemplos de Superficies de Riemann

De acuerdo con la descripcion dada anteriormente se seguiran los siguientes pasos para definir una superficie de Riemann:

1. Comenzaremos con un cierto conjunto M.
2. Encontraremos una coleccion numerable de subconjuntos $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ que recubran M.
3. Para cada α hallaremos una biyeccion z_α de $\mathcal{U}_\alpha$ en un subconjunto abierto $\mathcal{V}_\alpha \subset \mathbb{C}$.
4. En este punto, se debe comprobar que para todo α, β los subconjuntos $z_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) = \mathcal{V}_{\alpha\beta}$ es abierto en $\mathcal{V}_\alpha \subset \mathbb{C}$. Con esto, una topologia queda definida en M para la cual $\mathcal{U}_\alpha$ son abiertos.
5. Se comprueba que las cartas son compatibles (ie, funciones de transicion holomorfas).
6. Se comprueba que M es conexa y Hausdorff.

La esfera de Riemann.

Considerese la esfera $S^2 = \{\mathbf{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Denotamos a los polos norte y sur por $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, y $\mathbf{s} = (0, 0, -1)$, y definimos abiertos coordenados

$$\mathcal{U}_0 = S^2 - \mathbf{n} = \{\mathbf{p} \in S^2 \;:\; 1 > z\}$$

y

$$\mathcal{U}_1 = S^2 - \mathbf{s} = \{\mathbf{p} \in S^2 \;:\; z > -1\}.$$

Fijemos un punto $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S^2$. La recta afin que pasa por los puntos $\mathbf{n}$ y $\mathbf{p}_0$ es

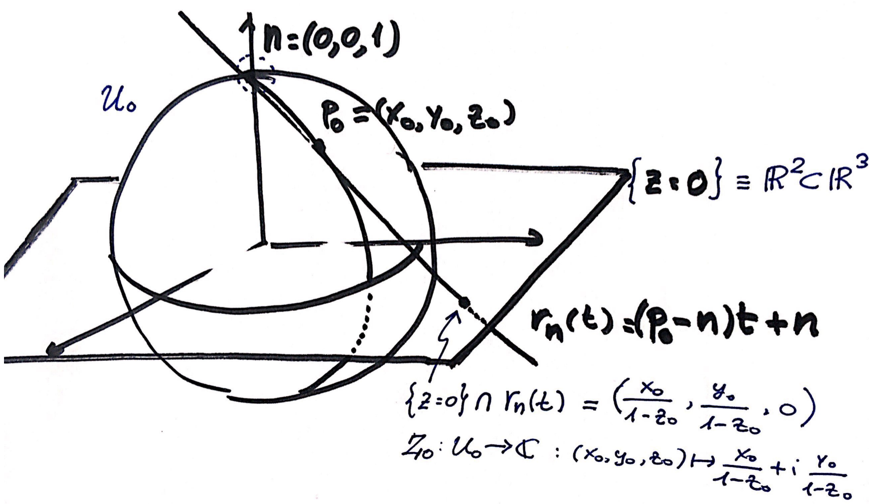
$$r_{\mathbf{n}}(t) = (\mathbf{p}_0 - \mathbf{n})t + \mathbf{n} = (x_0 t, y_0 t, (-1 + z_0)t + 1)$$

El punto de corte con el plano $z = 0$ ocurre para $t = \frac{1}{1-z_0}$ de modo que esta punto de interseccion $r_{\mathbf{n}}(t) \cap \{z = 0\} = r_{\mathbf{n}}\left(\frac{1}{1-z_0}\right)$ tiene coordenadas

$$\left(\frac{x_0}{1 - z_0}, \frac{y_0}{1 - z_0}, 0\right)$$

de modo que definimos la aplicacion de coordenadas $Z_0 : \mathcal{U}_0 \to \mathbb{C}$ como

$$Z_0(\mathbf{p}_0) = \frac{x_0}{1 - z_0} + i\frac{y_0}{1 - z_0}$$



Analogamente, la recta afin que pasa por los puntos $\mathbf{s}$ y $\mathbf{p}_0$ es

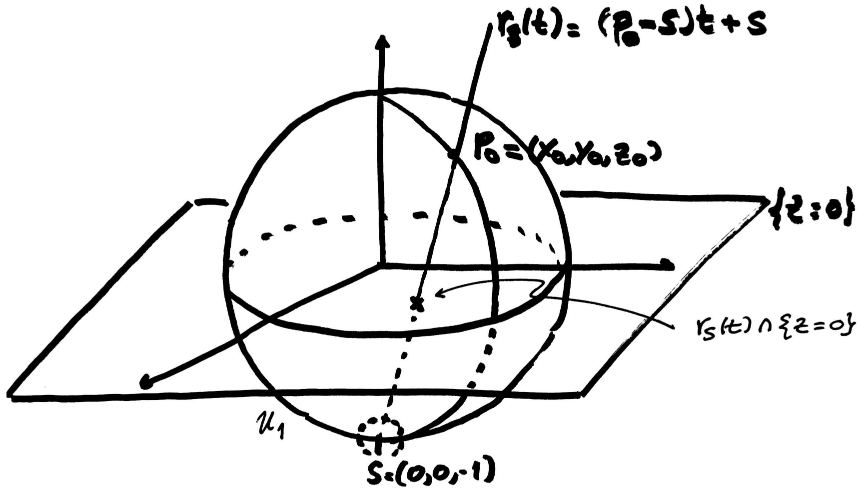
$$r_{\mathbf{s}}(t) = (\mathbf{p}_0 - \mathbf{s})t + \mathbf{s} = (x_0 t, y_0 t, (1 + z_0)t - 1)$$

El punto de corte con el plano $z = 0$ viene dado por $r_{\mathbf{s}}\left(\frac{1}{1+z_0}\right)$ con coordenadas

$$\left(\frac{x_0}{1 + z_0}, \frac{y_0}{1 + z_0}, 0\right)$$

y definimos la aplicacion de coordenadas $Z_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathbb{C}$ como

$$Z_1(\mathbf{p}_0) = \frac{x_0}{1 + z_0} - i\frac{y_0}{1 + z_0}$$



Hemos obtenido un recubrimiento abierto de S^2 por medio de $(\mathcal{U}_0, Z_0)$, $(\mathcal{U}_1, Z_1)$. Notese que $Z_0(\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1) = Z_1(\mathcal{U}_1 \cap U_0) = \mathbb{C} - \{0\}$ que es abierto en $\mathbb{C}$. A continuacion comprobamos que se trata de un recubrimiento holomorfo comprobando las funciones de transicion. Para ello necesitamos encontrar la inversa de, por ejemplo, Z_1.

Comenzamos con un numero complejo que, en forma cartesiana escribire como $\mathbf{w} = a + ib$. Identificando $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ con el plano $z = 0$, se obtiene el punto con coordenadas $\mathbf{q} = (a, -b, 0) \in \mathbb{R}^3$. La recta que pasa por $\mathbf{q}$ y $\mathbf{s}$ es

$$(\mathbf{q} - \mathbf{s})t + \mathbf{s} = (at, -bt, t - 1)$$

Esta recta corta a la esfera S^2 para aquellos valores de t tales que

$$(at)^2 + (-bt)^2 + (t-1)^2 = 1$$

esto es en $t = 0$ (el punto $\mathbf{s}$) y en $t = \frac{2}{1+a^2+b^2}$ que correspondera al punto $\mathbf{p}$ de coordenadas

$$\left(\frac{2a}{1 + a^2 + b^2}, \frac{-2b}{1 + a^2 + b^2}, \frac{1 - a^2 - b^2}{1 + a^2 + b^2} \right)$$

y asi obtenemos una aplicacion $Z_1^{-1} : \mathbb{C} \to \mathcal{U}_1$ tal que

$$Z_1^{-1}(\mathbf{w}) = \left(\frac{2\mathrm{Re}(\mathbf{w})}{1 + |\mathbf{w}|^2}, -\frac{2\mathrm{Im}(\mathbf{w})}{1 + |\mathbf{w}|^2}, \frac{1 - |\mathbf{w}|^2}{1 + |\mathbf{w}|^2} \right)$$

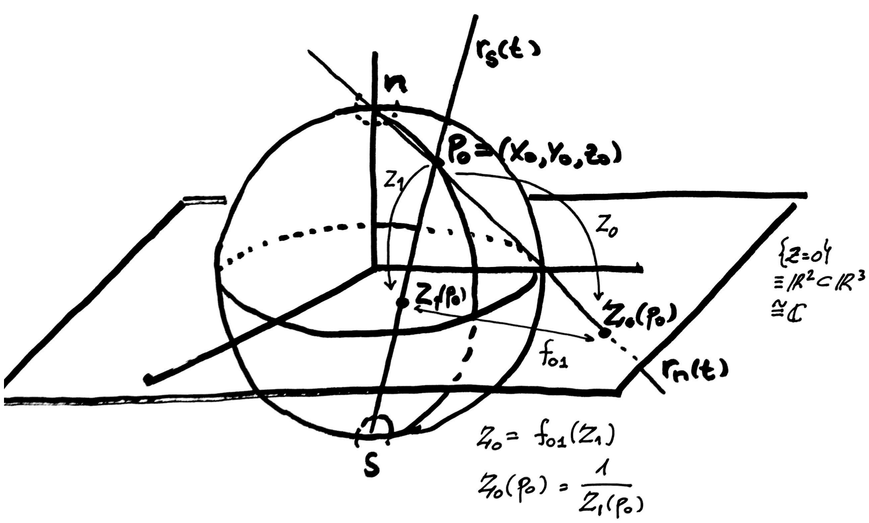
La composicion

$$f_{01} = Z_0 \circ Z_1^{-1} : Z_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_0) \to Z_0(\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1)$$

$$\begin{aligned}
Z_0 \circ Z_1^{-1}(\mathbf{w}) &= Z_0\left(\frac{2\mathrm{Re}(\mathbf{w})}{1+|\mathbf{w}|^2}, -\frac{2\mathrm{Im}(\mathbf{w})}{1+|\mathbf{w}|^2}, \frac{1-|\mathbf{w}|^2}{1+|\mathbf{w}|^2}\right) \\
&= Z_0\left(\frac{2a}{1+a^2+b^2}, \frac{-2b}{1+a^2+b^2}, \frac{1-a^2-b^2}{1+a^2+b^2}\right) \\
&= \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{Z_1(\mathbf{w})}
\end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$Z_0 = f_{01}(Z_1) = \frac{1}{Z_1}$$



y las funciones de transicion f_{01} son holomorfas. Por tanto, la esfera S^2 con el recubrimiento coordenado dado tiene una estructura compleja.

La esfera S^2 es evidentemente conexa y Hausdorff.

La linea proyectiva compleja

La esfera de Riemann (esto es la 2-esfera usual dotada de la estructura compleja vista arriba) coincide con la descripcion usual de la linea proyectiva compleja $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$, tambien denotado $\mathbf{P}^1\mathbb{C}$ o simplemente $\mathbb{P}^1$.

Considerese el espacio $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ y la accion del grupo $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ dada por

$$(\mathbb{C}^2 - \{0\}) \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^2 - \{0\} \ : \ ((\zeta_0, \zeta_1), t) \mapsto (t\zeta_0, t\zeta_1)$$

La linea proyectiva compleja se define como el espacio cociente

$$\mathbb{P}^1 = \frac{\mathbb{C}^2 - \{0\}}{\mathbb{C}^*}$$

y sus puntos parametrizan las rectas vectoriales complejas en $\mathbb{C}^2$, de modo que la clase de equivalencia $[\mathbf{v}] = [\zeta_0 : \zeta_1] \in \mathbb{P}^1$ representa la recta compleja $\langle \mathbf{v} \rangle = \{\mathbf{w} \in \mathbb{C}^2 \ : \ \mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}, \ \lambda \in \mathbb{C}\}$ generada por el vector $\mathbf{v} = (\zeta_0, \ \zeta_1) \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$. Muchas veces hablaremos simplemente de la recta l independientemente de que estemos hablando del punto en $\mathbb{P}^1$ o del subespacio en $\mathbb{C}^2$, entendiendose por contexto.

Definimos el recubrimiento abierto en $\mathbb{P}^1$ como sigue,

$$\mathcal{U}_0 = \{[\mathbf{v}] \in \mathbb{P}^1 \ : \ \zeta_0 \neq 0\}, \qquad \mathcal{U}_1 = \{[\mathbf{v}] \in \mathbb{P}^1 \ : \ \zeta_1 \neq 0\}$$

y las siguientes aplicaciones de coordenadas:

$$z_0 : \mathcal{U}_0 \to \mathbb{C} : [\mathbf{v}] \mapsto z_0([\mathbf{v}]) = \frac{\zeta_1}{\zeta_0}$$

$$z_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathbb{C} : [\mathbf{v}] \mapsto z_1([\mathbf{v}]) = \frac{\zeta_0}{\zeta_1}$$

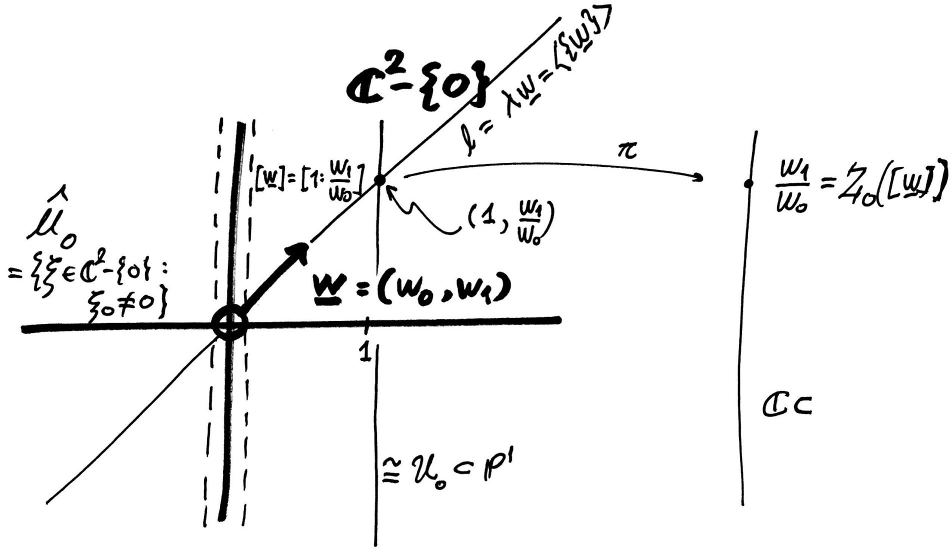
Notese que las inversas son faciles de calcular pues si $\mathbf{w} \in \mathbb{C}$ entonces

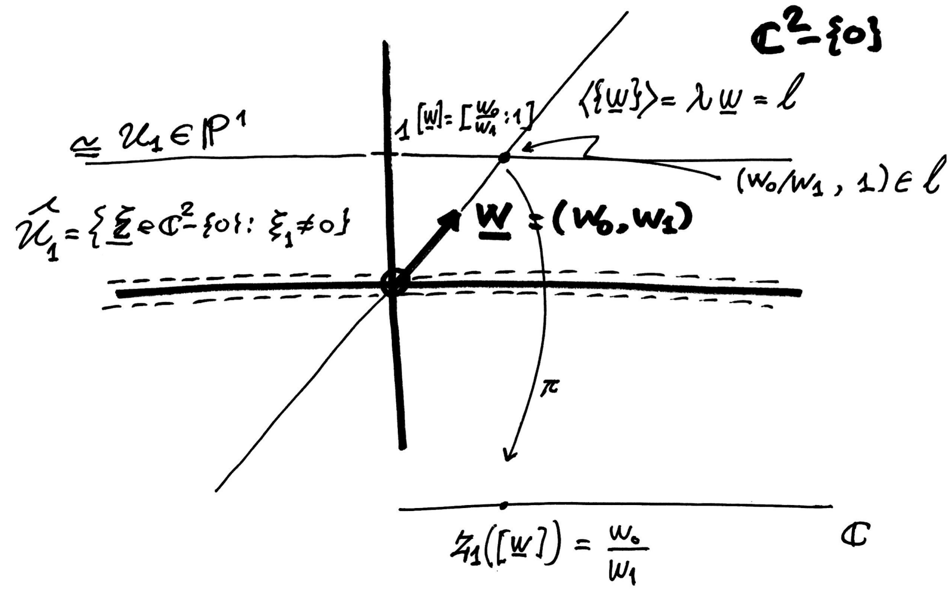
$$z_1^{-1}(\mathbf{w}) = z_1^{-1}\left(\frac{\mathbf{w}}{1}\right) = [\mathbf{w} : 1]$$

y ademas

$$[\mathbf{w} : 1] = [\lambda \mathbf{w} : \lambda]$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$.





El recubrimiento $\{(\mathcal{U}_i,\ z_i)\}$ es, ademas, un atlas complejo, pues las funciones de transicion $f_{01} = z_0 \circ z_1^{-1} \ : \ z_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_0) \to z_0(\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1)$ seran holomorfas: En primer lugar

$$z_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_0) = z_0(\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1) = \mathbb{C} - \{0\}$$

es abierto en $\mathbb{C}$ y para cualquier $[\mathbf{w}] = [w_0 : w_1] \in \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1$, se tiene que

$$\begin{aligned} z_0([\mathbf{w}]) &= f_{01}(z_1([\mathbf{w}])) = z_0 \circ z_1^{-1}(z_1([\mathbf{w}])) = z_0 \circ z_1^{-1}\left(\frac{w_0}{w_1}\right) \\ &= z_0\left([\frac{w_0}{w_1} : 1]\right) = \frac{1}{\frac{w_0}{w_1}} = \frac{w_1}{w_0} = \frac{1}{z_1([\mathbf{w}])} \end{aligned}$$

es decir, de nuevo $z_0 = f_{01}(z_1) = \frac{1}{z_1}$, como en la esfera de Riemann.

Finalmente vamos a comprobar sus propiedades topologicas basicas (conexion, propiedad de Hausdorff y compacidad).

Como las imagenes de las cartas son $\mathbb{C}$, que es conexo, los abiertos $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1$ que son preimagenes por homeomorfismos son tambien conexos. Y puesto que la interseccion $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1$ es no nula, su union $\mathbb{P}^1$ es conexa.

Analogamente, $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ son Hausdorff. Tomando dos puntos $[\mathbf{p}]$, $[\mathbf{q}]$ tales que $[\mathbf{p}] \in \mathcal{U}_0 - \mathcal{U}_1$ y $[\mathbf{q}] \in \mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_0$ fuerza a que $[\mathbf{p}] = [1 : 0]$ y $[\mathbf{q}] = [0 : 1]$, que pueden separarse por los abiertos $z_0^{-1}(B(0,1))$ y $z_1^{-1}(B(0,1))$. Por tanto, $\mathbb{P}^1$ es Hausdorff.

Por ultimo, $\mathbb{P}^1$ es la union de $z_0^{-1}(\overline{B(0,1)})$ con $z_1^{-1}(\overline{B(0,1)})$ que son compactos. Luego $\mathbb{P}^1$ es compacto.

Comentarios.

1. En los ejemplos anteriores (de hecho, son el mismo) se ha descrito una unica estructura compleja en $S^2 \cong \mathbb{P}^1$. Mas adelante se demostrara que la 2-esfera admite una unica estructura compleja.

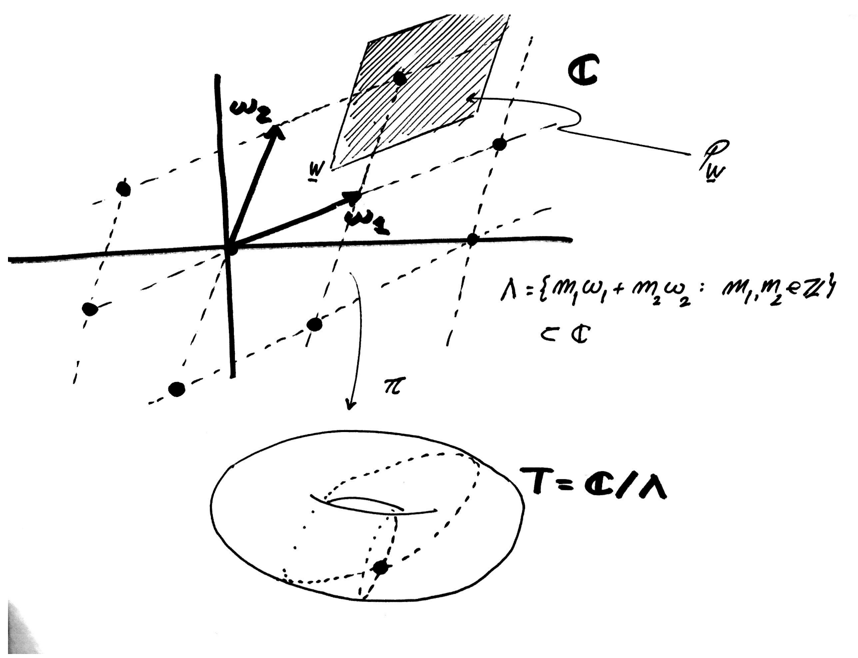
2. Como nota adicional, mencionaremos que es sabido que existen obstrucciones a la existencia de estructura compleja en todas las esferas excepto para $S^2 \cong \mathbb{P}^1$, y para S^6. Actualmente, se desconoce si S^6 admite una estructura compleja.

Toros complejos

Este es el ejemplo mas complicado que vamos a ver, asi que iremos despacio: En primer lugar,**vamos a construir el conjunto sobre el que vamos a trabajar**: Consideramos fijos dos numeros complejos $\omega_1,\ \omega_2 \in \mathbb{C}$ independientes sobre $\mathbb{R}$ (ie, con diferente argumento), y definimos el entramado (*lattice*)

$$\Lambda = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \ : \ m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$$

que es un subgrupo abeliano de la estructura de grupo aditivo de $\mathbb{C}$. Definimos el toro complejo T como el cociente $\mathbb{C}/\Lambda$ y denotamos $\pi : \mathbb{C} \to T$ a la proyeccion canonica de este cociente, que es continua al establecer en T la topologia cociente: un conjunto $\mathcal{U} \subset T$ es abierto, si $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en $\mathbb{C}$. Se obtiene directamente por la continuidad de π que T es conexo (ya que $\mathbb{C}$ es conexo).



Antes de construir un recubrimiento apropiado para T merece la pena detenerse para analizar detalladamente alguas propiedades de la proyeccion $\pi : \mathbb{C} \to T = \mathbb{C}/\Lambda$. Por la topologia cociente, todo abierto de T es la imagen de algun abierto de $\mathbb{C}$ pues: si $\mathcal{U}$ es abierto en T, por definicion $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en $\mathbb{C}$ y se sigue que $\mathcal{U} = \pi\left(\pi^{-1}(\mathcal{U})\right)$. Se puede demostrar mas: que *la proyeccion π es aplicacion abierta, i.e., envia cualquier abierto de $\mathbb{C}$ en un abierto de T* : Supongase que $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}$ es abierto. $\pi(\mathcal{V}) \subset T$ sera abierto si $\pi^{-1}(\pi(\mathcal{V})) \subset \mathbb{C}$ es abierto. En general

$$\pi^{-1}(\pi(\mathcal{V})) = \bigcup_{\omega \in \Lambda} (\omega + \mathcal{V})$$

que es la union de conjuntos $\omega + \mathcal{V}$, cada uno de ellos una version trasladada de $\mathcal{V}$ y por tanto, union de abiertos, de donde se sigue que π es aplicacion abierta.

En un segundo paso, **vamos a construir un recubrimiento abierto** de T. Para cada $\mathbf{w} \in \mathbb{C}$ definimos

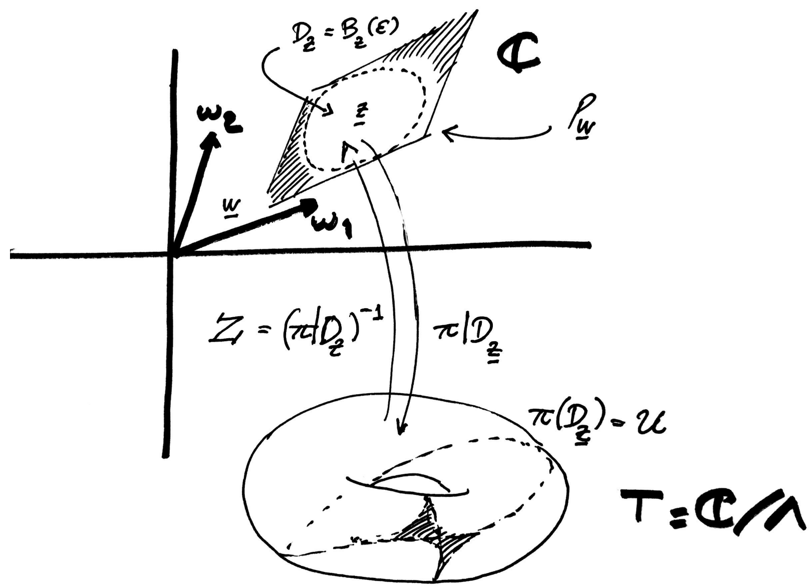
$$\mathcal{P}_{\mathbf{w}} = \{\mathbf{w} + \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \ : \ \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]\} \subset \mathbb{C}$$

Notese que todo punto en $\mathbb{C}$ es congruente modulo Λ a un punto en $\mathcal{P}_{\mathbf{w}}$ por lo tanto, π es una aplicacion suprayectiva de $\mathcal{P}_{\mathbf{w}}$ en T. Notese que esto implica que T es compacto.

El reticulo Λ es un subgrupo discreto de $\mathbb{C}$ por tanto existe un $\varepsilon > 0$ tal que $|\omega| > 2\varepsilon$ para todo $\omega \in \Lambda$. Fijamos dicho ε y un $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$. Entonces, dos puntos cualesquiera del disco abierto $D_{\mathbf{z}} = B_{\mathbf{z}}(\varepsilon)$ no pueden estar relacionados por un movimiento en Λ. Por ejemplo, imaginese que $\mathbf{z}$ es el punto central de $\mathcal{P}_{\mathbf{w}}$.

Veremos que, para todo $\mathbf{z}$, la restriccion de π a $D_{\mathbf{z}}$ es un homeomorfismo en $\pi(D_{\mathbf{z}})$: Sabemos que $\pi|_D : D \to \pi(D)$ es suprayectiva, continua y abierta (porque π tambien lo es). Faltaria asegurarse que tambien es inyectiva, pero esto se sigue de la eleccion de ε. En consecuencia los conjuntos $\pi(D_{\mathbf{z}})$ forman un recubrimiento abierto de T.

En el tercer paso, vamos a **definir las aplicaciones de coordenadas**: Consideramos los discos de radio ε para todo punto de $\mathbb{C}$: Para todo $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ escribimos $D_{\mathbf{z}} = B_{\mathbf{w}}(\varepsilon)$, y definimos la aplicacion asociada $Z_{\mathbf{z}} : \pi(D_{\mathbf{z}}) \to D_{\mathbf{z}}$ como $Z_{\mathbf{z}} = (\pi|_{D_{\mathbf{z}}})^{-1}$. Automaticamente, se tiene como consecuencia que la familia $\{(\pi(D_{\mathbf{z}}), Z_{\mathbf{z}})\}$ es un atlas complejo de T.



Notese que, ademas, las imagenes de las cartas son abiertos de $\mathbb{C}$.

En el siguientes paso, **veamos que las funciones de transicion son holomorfas**. Antes de continuar vamos a uniformizar la notacion con la de las definiciones. Sean $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{C}$ y denotemos $Z_1 = Z_{\mathbf{z_1}}$, $\mathcal{U}_1 = \pi(D_{\mathbf{z_1}}) \subset T$, $\mathcal{V}_1 = D_{\mathbf{z_1}} \subset \mathbb{C}$ etc, de modo que

$$Z_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{V}_1, \qquad \text{representa} \qquad Z_{\mathbf{z_1}} : \pi(D_{\mathbf{z_1}}) \to D_{\mathbf{z_1}}, \qquad \text{etc.}$$

Supongase que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \pi(D_{\mathbf{z_1}}) \cap \pi(D_{\mathbf{z_2}})$ es no vacio, y sea $\mathbf{w} \in Z_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$. Para mostrar que la funcion de transicion, $f_{21}(\mathbf{w}) = Z_2 \circ Z_1^{-1}(\mathbf{w})$ es holomorfa recurrimos al siguiente detalle: como $\pi(f_{21}(\mathbf{w})) = \pi(\mathbf{w})$ se tiene que, para todo $\mathbf{w}$ en $Z_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$, el numero complejo

$$\omega(\mathbf{w}) := f_{21}(\mathbf{w}) - \mathbf{w}$$

pertenece a Λ. La funcion asi definida $\omega : Z_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \to \Lambda$ es continua, pero Λ es discreto, por lo que ω es localmente constante en $Z_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$, es decir, toma un valor constante en cada componente conexa de $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, i.e., $\omega(\mathbf{w}) = \omega$ de donde se sigue que localmente $f_{21}(Z_1) = Z_1 + \omega$ para algun $\omega \in \Lambda$ fijo, y en consecuencia f_{21} es holomorfa.

Por tanto, T es una superficie de Riemann compacta.

Comentarios.

A diferencia de lo que ocurre con la esfera de Riemann, los toros (topologicos) admiten diferentes estructuras complejas inequivalentes que dependen de los valores de los vectores utilizados $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ para definir el reticulo Λ. Volveremos a esto cuando veamos las aplicaciones holomorfas y los biholomorfismos.