

TEMA 2: EL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL. MODELIZACIÓN. MÉTODO GRÁFICO DE RESOLUCIÓN

MÉTODO GRÁFICO DE RESOLUCIÓN EN PROGRAMACIÓN LINEAL

Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & z = c^t x \\ \text{sa:} & x \in S \end{array}$$

el método de resolución gráfica consiste en:

1. Determinación gráfica del conjunto de soluciones posibles S

Para cada una de las restricciones del modelo:

- (1.2) Dibujad la recta $a_i^t x = b_i$ asociada. Observad que cada recta divide al espacio en dos partes, que denominaremos semiespacios.
- (1.3) Comprobad a qué semiespacio pertenecen las soluciones del problema, es decir, cuál de los dos semiespacios resultantes contiene a S .
 - Si la restricción es de tipo “=” las soluciones de nuestro problema estarán sobre la recta.
 - Si la restricción es de tipo “ \geq ” bastará con elegir un punto de \mathbb{R}^2 x' que no pertenezca a la recta $a_i^t x = b_i$, sustituirlo en $a_i^t x$ y comprobar si el resultado es $> b_i$ ó $< b_i$. Si $a_i^t x' > b_i$, entonces el conjunto de soluciones está contenido en el mismo semiespacio que x' . En otro caso, el conjunto de soluciones estará contenido en el semiespacio que no contiene a x' .
 - Si la restricción es de tipo “ \leq ” procederemos análogamente.

La intersección de todos los semiespacios y/o rectas que contienen a las soluciones del problema define la región de soluciones posibles del problema.

2. Determinación, si la hay, de la solución óptima

- (2.1) Si $S = \emptyset$ el problema es IMPOSIBLE ya que no hay soluciones posibles. Si $S \neq \emptyset$, evaluaremos la función objetivo en un punto x' de S . Sea $z_0 = c^t x'$ el resultado.
- (2.2) Dibujad la recta $c^t x = z_0$. Observad que $S \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid c^t x = z_0\} \neq \emptyset$ Trazad rectas paralelas a la anterior de forma que sigan intersectando a S en al menos un punto a la vez que mejoran el valor de z . Para ello basta con tener en cuenta que:

- Si se está **maximizando** la función objetivo mejora cuando nos desplazamos en la **dirección** indicada por el vector **c**.
- Si estamos **minimizando**, debemos desplazarnos en la **dirección -c**.

(2.3) El proceso se repite hasta que:

(2.3.1) continuar implica perder el contacto con S . En este caso, el problema es **acotado**. Además, si la solución óptima se alcanza:

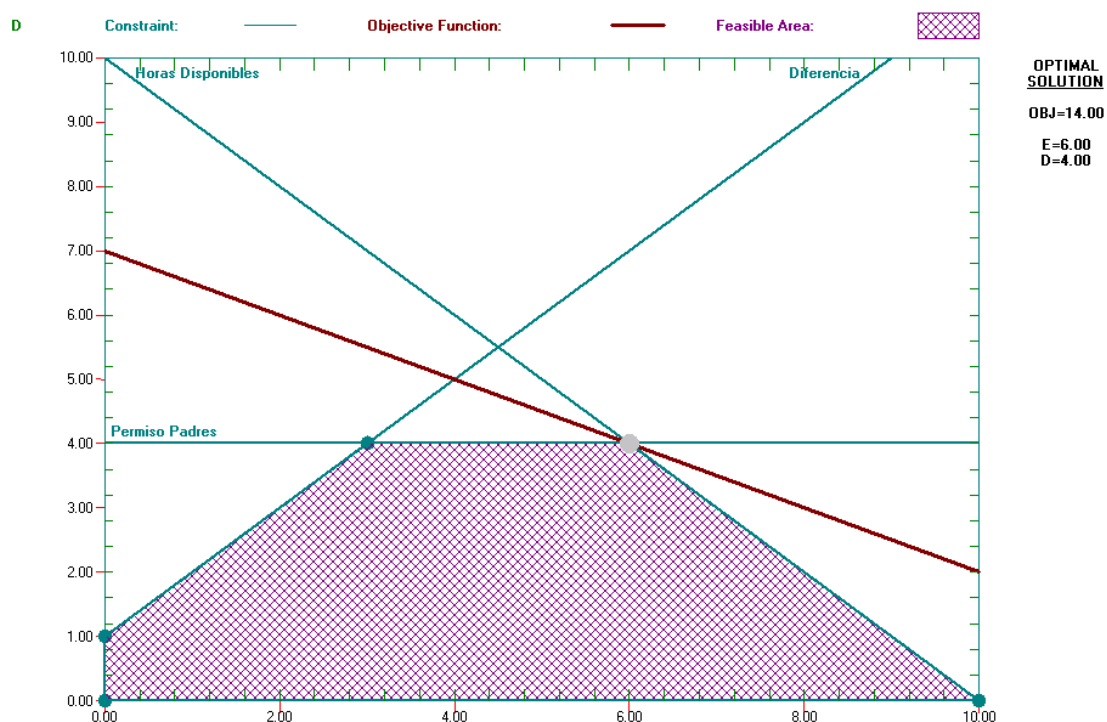
- en un único punto del poliedro de soluciones, entonces dicho punto es un vértice y **la solución óptima es única**;
- en más de un punto, entonces el problema tiene **infinitas soluciones óptimas** que pertenecen a una semirrecta con origen en un vértice, o al segmento que une dos vértices.

(2.3.2) se observa que el contacto nunca se va a perder. En este caso se ha detectado una dirección del conjunto de soluciones posibles en la que la función objetivo mejora continuamente. El problema es **no acotado** y el valor óptimo es $-\infty$. Observad que no hay soluciones óptimas.

Ejemplo 2.1: Carlos es un estudiante emprendedor de primer año en la UVEG. Tiene la teoría de que *solo estudiar y nada de diversión acabarán por convertirlo en un muermazo*. Para evitarlo quiere distribuir su tiempo disponible, a lo sumo 10 horas al día, entre el estudio y la diversión. Calcula que divertirse es dos veces más interesante que estudiar, pero cree que para poder cumplir con las tareas diarias de la universidad la diferencia entre las horas que dedica a divertirse y las que dedica a estudiar debe ser a lo sumo de 1 hora. Además, debe tener en cuenta que sus padres le permiten dedicar como máximo 4 horas a actividades lúdicas. ¿Cómo debe distribuir Carlos su tiempo para conseguir que sea lo más interesante posible?

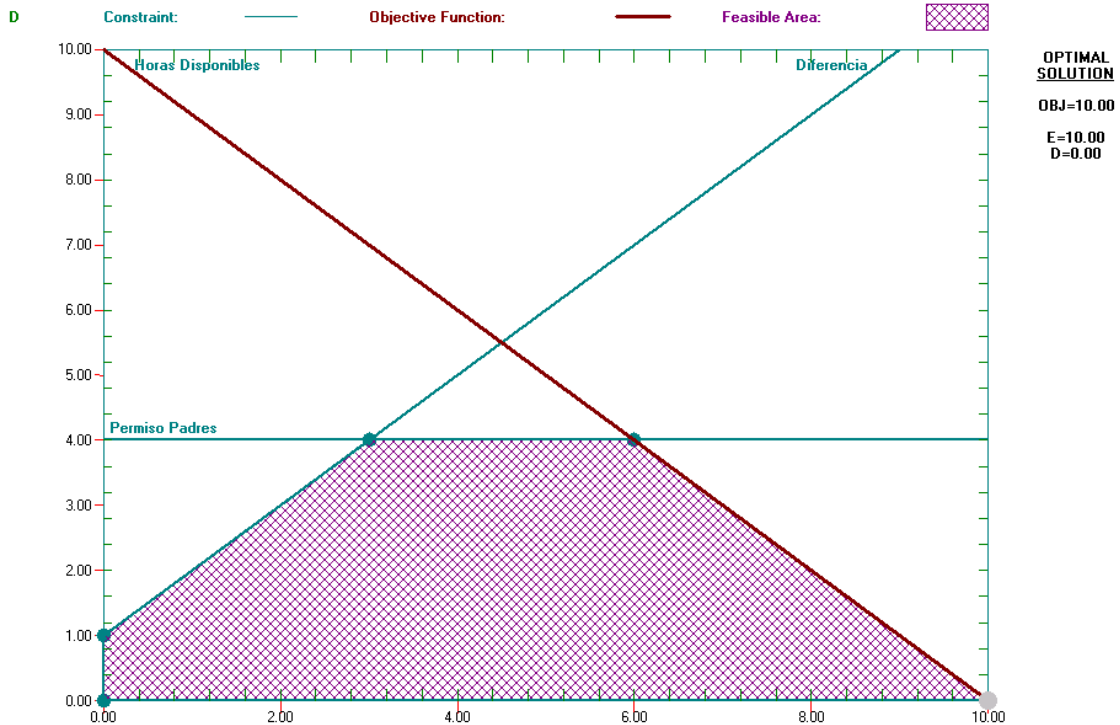
2.4.1 PROBLEMA ACOTADO. SOLUCIÓN ÓPTIMA ÚNICA

Variable -->	E	D	Direction	R. H. S.
Maximize	1	2		
Horas	1	1	<=	10
Diferencia	-1	1	<=	1
Permiso		1	<=	4
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		



2.4.2 PROBLEMA ACOTADO. SOLUCIONES ÓPTIMAS MÚLTIPLES

Supongamos ahora que Carlos valora exactamente igual las horas dedicadas a estudiar que las dedicadas a divertirse. ¿Cuál sería ahora la solución óptima?



2.4.3 PROBLEMA NO ACOTADO

Si eliminamos la restricción de que el número máximo de horas disponibles es de 10 horas ¿cuál sería la solución óptima del problema?

