Tema 3: El Método Simplex. Algoritmo de las Dos Fases.

3.1 Motivación Gráfica del método Simplex.

3.2 El método Simplex.

3.3 El método Simplex en Formato Tabla.

3.4 Casos especiales en la aplicación del algoritmo.

- **3.4.1** Degeneración.
- **3.4.2** Óptimos alternativos.
- **3.4.3** Problema no acotado.
- **3.4.4** Problema Imposible.

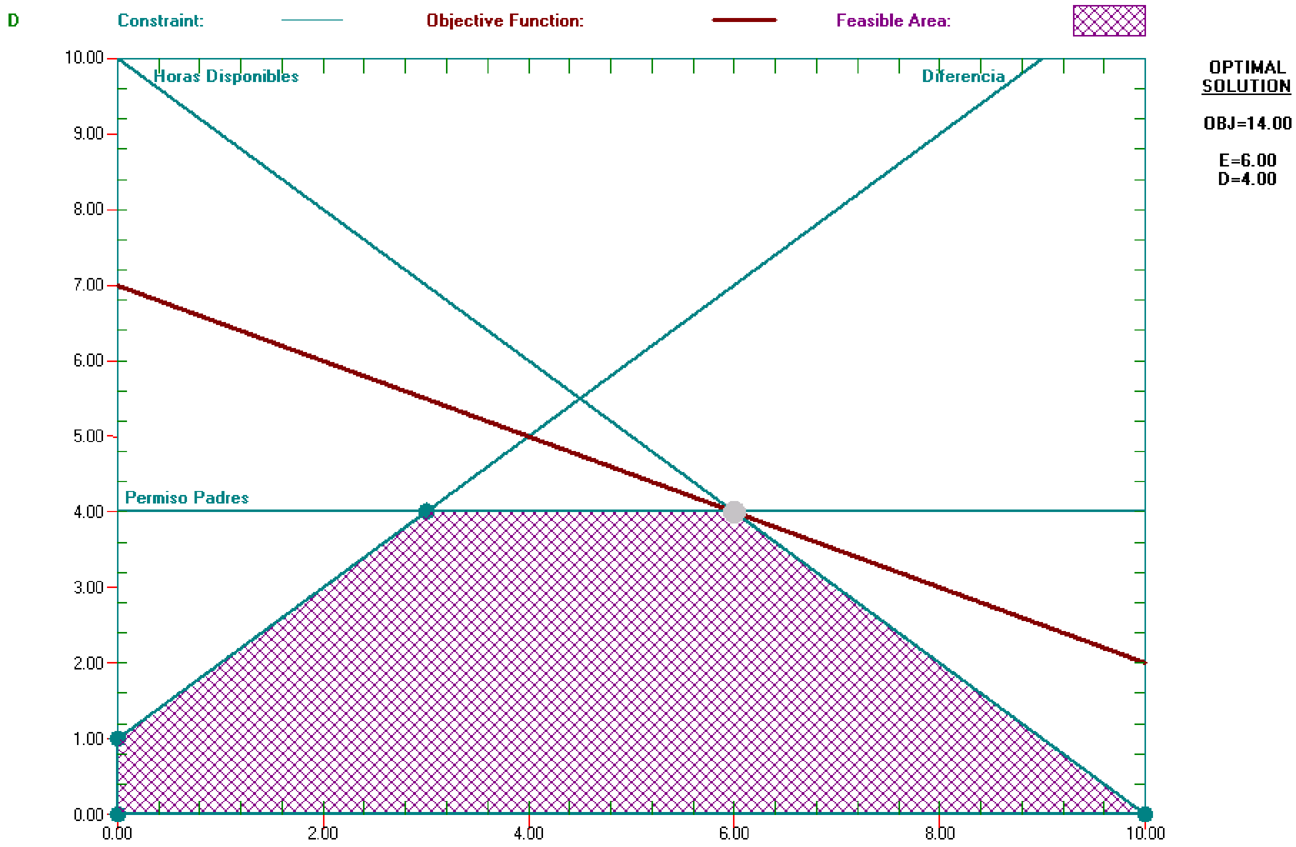
3.5 El Algoritmo de las dos Fases.

- **3.5.1** Problema imposible.
- **3.5.2** Problema posible.

3.1 Motivación Gráfica del Método Simplex

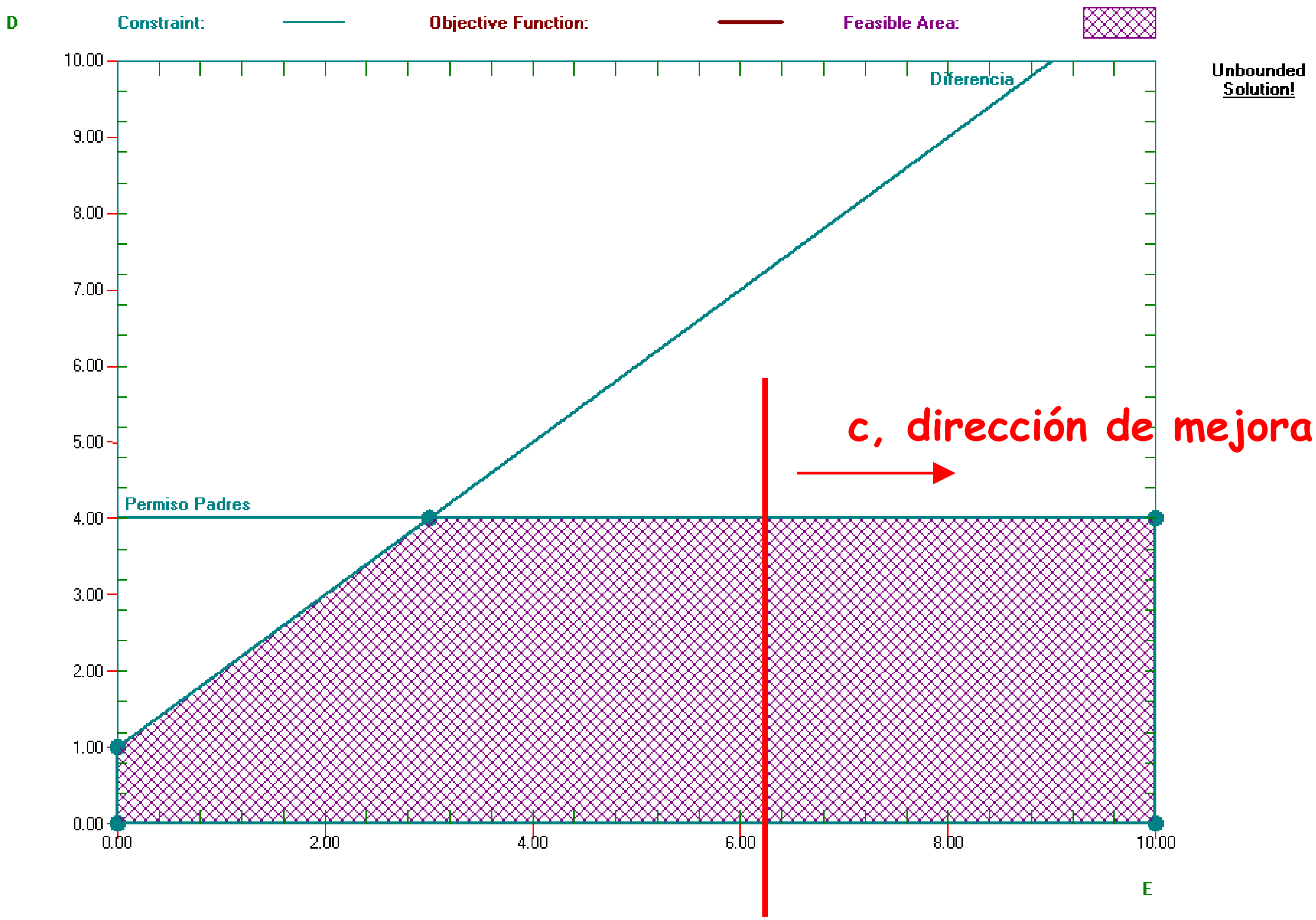
Región de soluciones posibles acotada

Existe al menos una solución óptima, que es un vértice



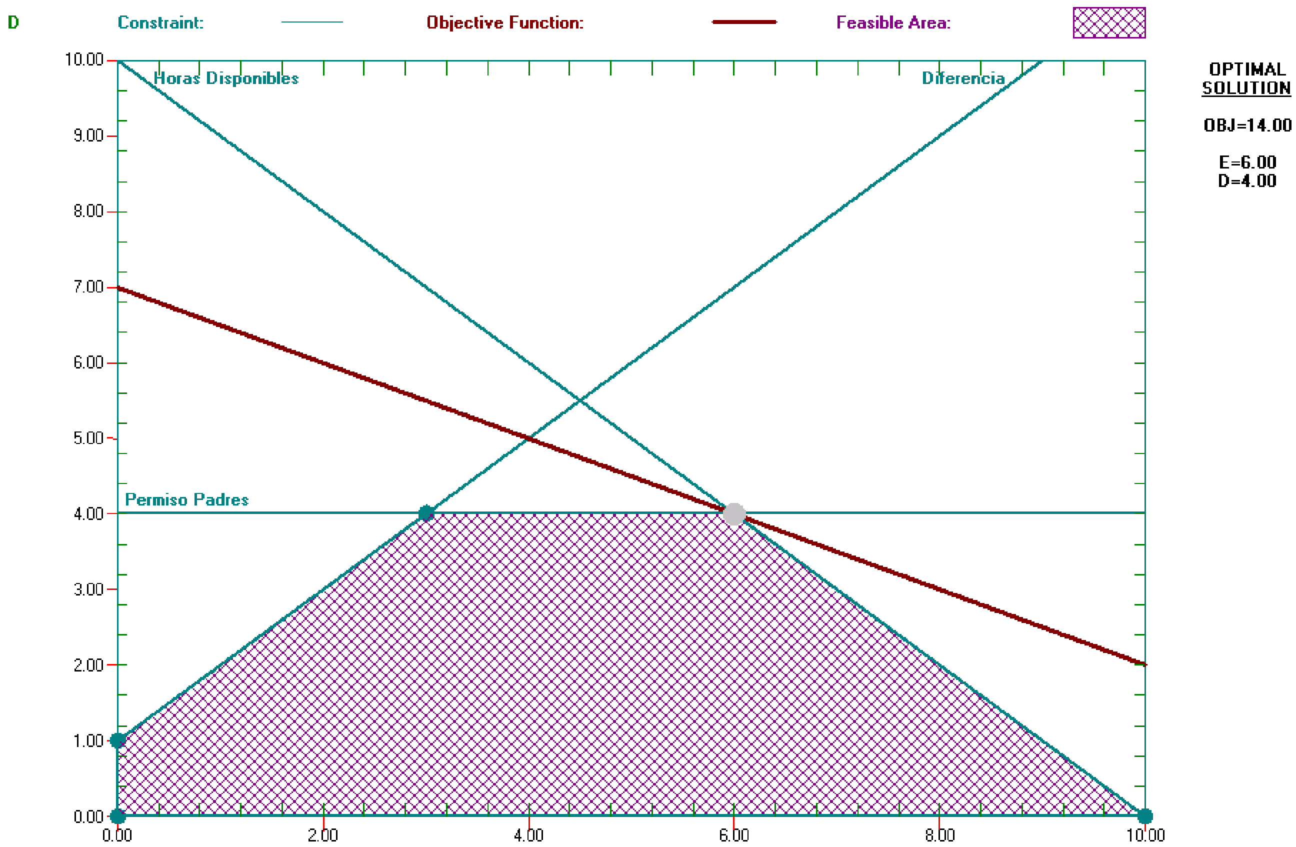
Región de soluciones posibles no acotada

Problema no acotado $z = +\infty$



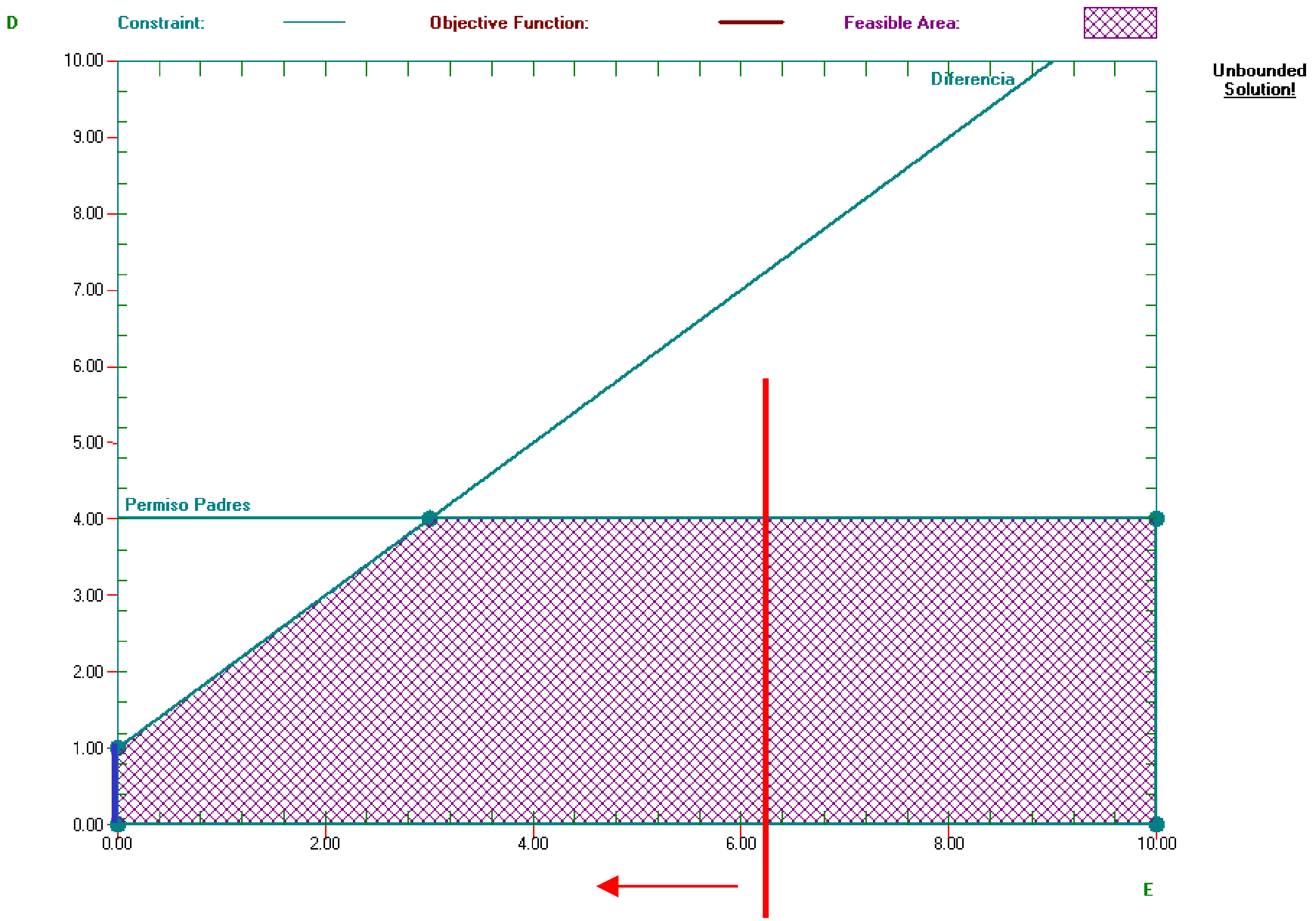
Problema Acotado

Existe una solución óptima única



Problema acotado

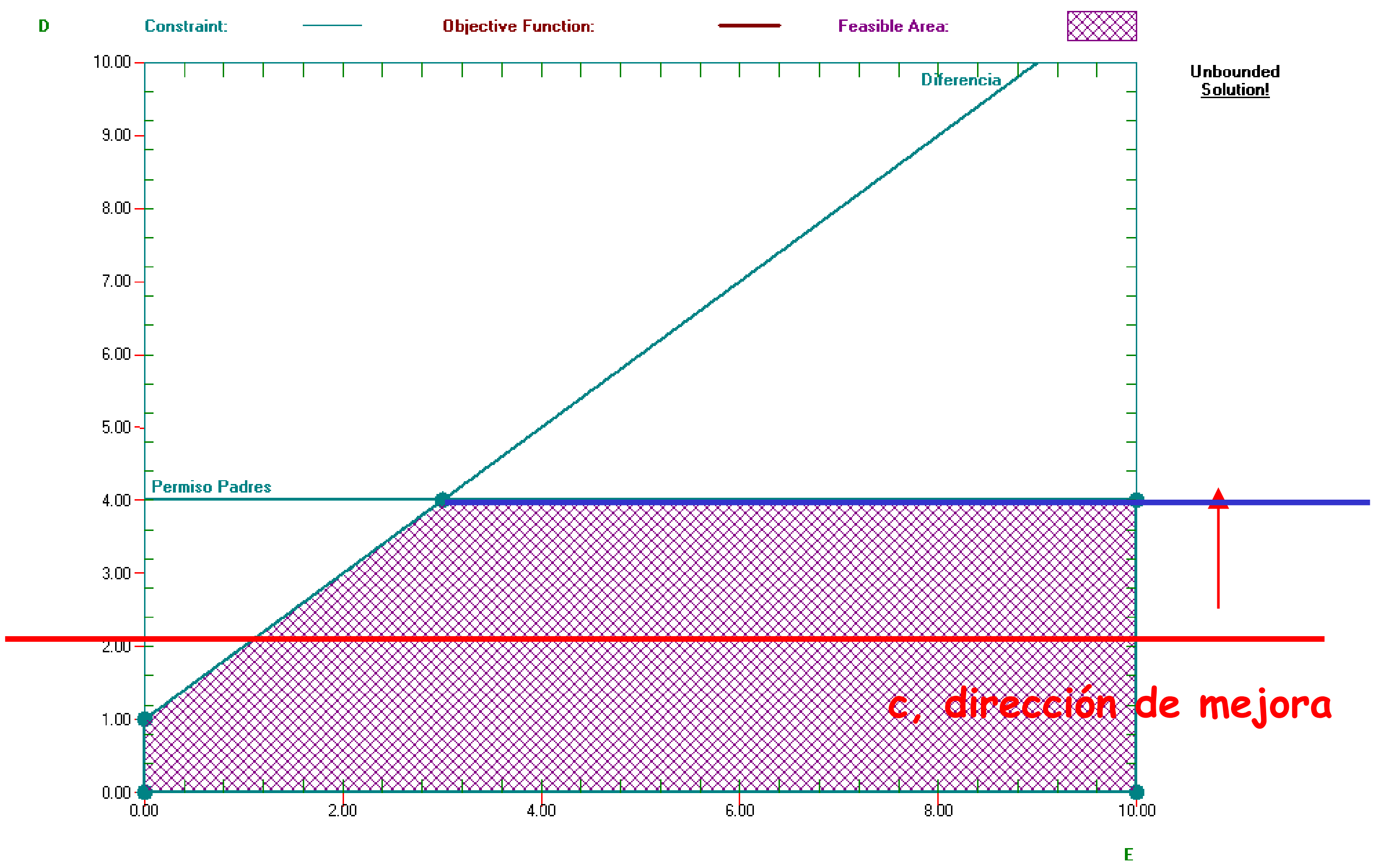
Infinitas soluciones óptimas (Segmento)



c, dirección de mejora

Problema acotado

Infinitas soluciones óptimas (Semirrecta)



3.1 Motivación Gráfica del Método Simplex

1. Si el PPL tiene una única solución óptima, será necesariamente un vértice de S.

2. Si el PPL tiene más de una solución óptima y S es acotado, al menos dos de ellas son vértices adyacentes de S. Si S es no acotada, solo podemos garantizar que al menos una de las soluciones óptimas es un vértice.

3. Existe un número finito de vértices en S.

4. Si un vértice proporciona un valor objetivo mejor o igual que el resto de vértices adyacentes entonces proporciona un valor objetivo mejor o igual que cualquier otra solución posible del problema, luego es una solución óptima para el problema.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
E & + & D & + & H_1 & = & 10 \\
-E & + & D & + & H_2 & = & 1 \\
 & & D & + & H_3 & = & 4
\end{array}
$$

Si hacemos $H_1 = H_2 = 0$, nos queda:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
E & + & D & & & = & 10 \\
-E & + & D & & & = & 1 \\
 & & D & + & H_3 & = & 4
\end{array}
$$

cuya solución es:

$$E = 9/2, \;\; D = 11/2, \;\; H_3 = -3/2$$

No puede ser solución del PPL incumple la restricción de no negatividad.

(E,	D,	H_1,	H_2,	H_3)	
0	0	10	1	4	(0,0) Solución posible
0	10	0	-9	-6	(0,10) no es solución posible
0	1	9	0	3	(0,1) Solución posible
0	4	6	-3	0	(0,4) no es solución posible
10	0	0	11	4	(10,0) Solución posible
?	0	?	?	0	Sistema Incompatible
-1	0	11	0	4	(-1,0) no es solución posible
9/2	11/2	0	0	-3/2	(9/2,11/2) no es solución posible
6	4	0	3	0	(6,4) Solución posible
3	4	3	0	0	(3,4) Solución posible

Cómo obtener los vértices del conjunto de soluciones de un PPL

Para un problema cuya forma estándar incluya un sistema de m ecuaciones linealmente independientes y n incógnitas, los vértices del poliedro se obtienen resolviendo los sistemas de m ecuaciones con m incógnitas que resultan al igualar a cero subconjuntos de $n-m$ variables.

Solo serán soluciones posibles (**vértices**) aquéllos puntos cuyas variables, tanto de holgura como originales sean no negativas.

3.2 El Método Simplex

Desarrollado por George Dantzig en 1947.

Primera aplicación importante: J. Laderman resolvió un problema de elaboración de una dieta en la que había 9 restricciones de igualdad y 27 variables. Necesitó él trabajo de 120 días-hombre.

Dado un PPL expresado en forma estándar con m *ecuaciones* y n *incógnitas*, $m \leq n$, podemos dividir las variables en dos grupos:

1. $n - m$ variables a las cuáles les damos el valor 0, y que denominaremos variables no básicas.
2. m variables cuyo valor se determinará resolviendo el sistema de m *ecuaciones* y m *incógnitas* resultante de igualar a cero el resto de variables. Si dicho sistema tiene una única solución, diremos que las m variables son variables básicas.

Solución del sistema $\longrightarrow$ solución básica

Si además las variables ≥ 0 $\longrightarrow$ solución posible básica

Formalización algebráica

$$\begin{array}{lll} \text{PPL} & \text{Min} & z = c^t x \\ & \text{s.a.:} & Ax = b \\ & & x \geq 0_n \end{array}$$

$B :=$ {columnas de A de coeficientes de las variables básicas}
$N := A \setminus B :=$ { columnas de A coeficientes de las variables no básicas}

$$A = (B, N),\ x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & z & \\ \text{s.a.:} & z- & c_B^t x_B - c_N^t x_N = 0 \\ & & Bx_B + Nx_N = b \\ & & x_B \geq 0,\ x_N \geq 0 \end{array}$$

$$B^{-1}(Bx_B + Nx_N) = B^{-1}b$$

$$\downarrow$$

$$(B^{-1}B)x_B + (B^{-1}N)x_N = B^{-1}b$$

$$\downarrow$$

$$x_B + (B^{-1}N)x_N = B^{-1}b$$

$$\bar{b} := B^{-1}b = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_i \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{pmatrix}, \; y_j := B^{-1}a_j$$

$\bar{b}_i :=$ valor de la variable básica asociada a la ecuación i-ésima

$y_{ij} :=$ coeficiente de la variable no básica j-ésima en la ecuación i-ésima

$$z = c_B^t x_B + c_N^t x_N$$

$$\downarrow$$

$$x_B = B^{-1}b - (B^{-1}N)x_N$$

$$\downarrow$$

$$z = c_B^t(B^{-1}b - (B^{-1}N)x_N) + c_N^t x_N$$

$$\downarrow$$

$$z = \underbrace{c_B^t(B^{-1}b)}_{\text{valor objetivo}} - \underbrace{(c_B^t B^{-1}N - c_N)}_{\text{costes reducidos}} x_N$$

En cualquier iteración del Simplex el problema está expresado como:

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & z = c_B^t(B^{-1}b) - (c_B^t B^{-1} N - c_N)x_N \\
& x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\
& x_B \geq 0 \\
& x_N \geq 0
\end{aligned}
$$

Y tiene asociada la siguiente Solución Posible Básica:

$$
x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Cuyo valor objetivo es:

$$
z = c_B^t(B^{-1}b)
$$

COSTES REDUCIDOS: coeficientes de las variables en la expresión de la función objetivo dada en una iteración del Simplex.

- Variable Básica: 0
- Variable No Básica: $z_j - c_j := c_B^t B^{-1} a_j - c_j$

Importancia:

- CRITERIO DE OPTIMALIDAD: una solución es óptima sii $z_j - c_j \leq 0 \ \forall j$.
- CRITERIO PARA ELEGIR LA NUEVA VARIABLE BÁSICA: aquélla que tiene el mayor coste reducido.

$$z_{nuevo} := z_{actual} - (z_j - c_j) x_j$$

$$\text{Si } x_j > 0 \text{ y } z_j - c_j > 0 \rightarrow z_{nuevo} < z_{actual}$$

$$\text{Si } x_j > 0 \text{ y } z_j - c_j < 0 \rightarrow z_{nuevo} > z_{actual}$$

Algoritmo del Simplex

Consideremos el Problema de Programación Lineal:

$$\begin{array}{lll} \text{PL} & \text{Min} & z = c^t x \\ & \text{s.a.:} & x \in S \end{array}$$

en donde, $S \neq \emptyset$.

Inicialización

Escríbase el Problema de Programación Lineal en forma estándar. Sea

$$\begin{array}{lll} \text{PL} & \text{Min} & z = c^t x \\ & \text{s.a.:} & Ax = b \\ & & x \geq 0_n \end{array}$$

el problema resultante. En donde, A es una matriz $m \times n$, $b \in I\!R^m$, $c \in I\!R^n$, $rango(A, b) = rango(A) = m$ (es decir, sistema compatible, tiene solución).

Obtener una Solución Posible Básica Inicial (SPB)

- Si en S todas las restricciones eran del tipo "$\leq$" y el "RHS ≥ 0", al añadir las variables de holgura se obtiene automáticamente una SPB tomando las variables originales como no básicas y las variables de holgura como básicas.
- en otro caso aplicaremos el algoritmo de las dos fases.

Sea B la submatriz de A formada por las columnas asociadas a las variables básicas y N el conjunto de índices de las variables no básicas.

$$x_B := B^{-1}b \geq 0_m$$

$$x_N := 0_{n-m}$$

Iteración

Paso 1: Sea, $x_B = B^{-1}b$, y $x_N = 0_{n-m}$, la SPB actual. Hacer, $\bar{b} = B^{-1}b$, y $z = c_B^t x_B$. Ir al Paso 2.

Paso 2: Calcular los costes reducidos de las variables no básicas.

$$z_j - c_j = c_B^t B^{-1} a_j - c_j, \ \forall j \in N$$

siendo a_j la columna asociada a la variable x_j en A.

a) Si $z_j - c_j \leq 0, \forall j \in N$, STOP.
$x_B^* := B^{-1}b$ Y $x_N^* := 0_{n-m}$ $z^* = c_B^t B^{-1} b$.

b) En otro caso, elegir x_k como nueva variable básica entrante, siendo k el índice para el que se alcanza el máximo de los costes reducidos,

$$z_k - c_k = \max_{j \in N} \{z_j - c_j\}.$$

Ir al Paso 3.

Paso 3: Obtener la columna asociada a la variable que se hace básica en el sistema actual. Sea $y_k := B^{-1}a_k$

a) Si $y_k \leq 0_m$, STOP.

Podemos incrementar el valor de x_k tanto como queramos sin que se haga cero ninguna variable básica i.e., sin alcanzar ningún otro vértice del poliedro adyacente al actual. El problema es NO ACOTADO y el valor óptimo es $z^* = -\infty$.

b) En otro caso. Ir al Paso 4.

Paso 4: Elegir la variable que deja de ser básica (Criterio de la razón mínima).

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\}$$

$B := B \setminus \{a_r\} \bigcup \{a_k\}$, $N := N \setminus \{k\} \bigcup \{r\}$. Ir al Paso 1.

3.3 El Método Simplex en Formato Tabla

Dado el PPL,

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & z = c^t x \\ \text{s.a.:} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0_n \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & z \\ \text{s.a.:} & z - c^t x = 0 \\ & Ax = b \\ & x \geq 0_n \end{array}$$

Si lo escribimos en términos de una SPB asociada a una base B:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & z \\ \text{s.a.:} & z - c_B^t x_B - c_N^t x_N = 0 \\ & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B \geq 0_m, \ x_N \geq 0_{n-m} \end{array}$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N,$$

$$\begin{array}{rcccl} z+ & 0x_B & + & (c_B^t B^{-1}N - c_N^t)x_N & = c_B^t B^{-1}b \\ & x_B & + & B^{-1}Nx_N & = B^{-1}b \end{array}$$

		x_B	x_N	RHS	
z	1	0	$c_B^t B^{-1}N - c_N^t$ $(z_j - c_j = c_B^t B^{-1} a_j - c_j)$	$c_B^t B^{-1}b$	FILA 0 $z = c_B^t B^{-1}b$
x_B	0	I_m	$B^{-1}N,\ (y_k = B^{-1}a_k)$	$B^{-1}b,\ (\bar{b}_i)$	FILA 1-m $x_B = B^{-1}b$

Tabla antes de pivotar

$$
\begin{array}{c|ccccc|ccccccc|c|}
 & x_{B_1} & \ldots & x_{B_r} & \ldots & x_{B_m} & \ldots & x_j & \ldots & x_k & \ldots & RHS \\
\hline
z & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & z_j - c_j & \ldots & z_k - c_k & \ldots & c_B\bar{b} \\
\hline
x_{B_1} & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & y_{1j} & \ldots & y_{1k} & \ldots & \bar{b}_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_{B_r} & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots & y_{rj} & \ldots & \boxed{y_{rk}} & \ldots & \bar{b}_r \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_{B_m} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & y_{mj} & \ldots & y_{mk} & \ldots & \bar{b}_m \\
\hline
\end{array}
$$

Variable de entrada, $z_k - c_k = \max_{j \in N}\{z_j - c_j\} \longrightarrow x_k$

Variable de salida, $\dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m}\{\dfrac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\} \longrightarrow x_{B_r}$

Tabla después de pivotar

	x_{B_1}	$\ldots x_{B_r} \ldots$	x_{B_m}	$\ldots x_j \ldots$	$x_k \ldots$	RHS
z	0	$\ldots \frac{c_k - z_k}{y_{rk}} \ldots$	0	$\ldots (z_j - c_j)$ - $\frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k) \ldots$	$0 \ldots$	$c_B\bar{b} - (z_k - c_k)\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
x_{B_1}	1	$\ldots -\frac{y_{1k}}{y_{rk}} \ldots$	0	$\ldots y_{1j} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} y_{1k} \ldots$	$0 \ldots$	$\bar{b}_1 - \frac{y_{1k}}{y_{rk}}\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	0	$\ldots \frac{1}{y_{rk}} \ldots$	0	$\ldots \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \ldots$	$1 \ldots$	$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{B_m}	0	$\ldots -\frac{y_{mk}}{y_{rk}} \ldots$	1	$\ldots y_{mj} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} y_{mk} \ldots$	$0 \ldots$	$\bar{b}_m - \frac{y_{mk}}{y_{rk}}\bar{b}_r$

Nueva Base $B = B \setminus \{a_r\} \bigcup \{a_k\}$

3.4 Casos especiales en la aplicación del algoritmo.

EJEMPLO: ÓPTIMO ÚNICO

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & -3x_1 + x_2 \\ \text{sa:} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ & x_i \geq 0, \forall i = 1,2,3,4 \end{aligned}$$

Dada,

$$B = \{a_1, a_4\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \longrightarrow x^t = (4,0,0,5)$$

$$c_B^t = (-3,0) \quad z_j - c_j = c_B^t B^{-1} a_j - c_j = \begin{cases} z_2 - c_2 = (-3,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = -7 \\ \\ z_3 - c_3 = (-3,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -3 \end{cases}$$

Ejemplo: Óptimos Alternativos

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & -2x_1 - 4x_2 \\ \text{sa:} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ & x_i \geq 0, \forall i = 1,2,3,4 \end{aligned}$$

Dada,

$$B = \{a_1, a_4\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \longrightarrow x^t = (4,0,0,5)$$

$$c_B^t = (-2,0) \quad z_j - c_j = c_B^t B^{-1} a_j - c_j = \begin{cases} z_2 - c_2 = (-2,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - (-4) = 0 \\ \\ z_3 - c_3 = (-2,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -2 \end{cases}$$

Óptimos: $\left[(4,0,0,5), \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0, 0\right)\right], \quad z^* = -8$

Ejemplo: No Acotación

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{sa:} \quad & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dada,

$$B = (a_2, a_3),\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix} \longrightarrow x^t = (0, 3, 10, 0)$$

$$z_j - c_j == \begin{cases} z_1 - c_1 = (-3, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - (-1) = 4 > 0 \\ \\ z_4 - c_4 = (-3, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = -3 \end{cases}$$

"x_1 podría entrar en la base"

Sin embargo, como

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \leq 0_2$$

"Ninguna variable cumple el criterio de salida"

$$c^t \begin{pmatrix} -y_1 \\ e_1 \end{pmatrix} = (-1, -3, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} < 0 \longrightarrow \text{Criterio de No Acotación}$$

El problema es No acotado a lo largo de la semirrecta:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1,\ x_1 \geq 0 \right\}, \quad \lim_{x_1 \longrightarrow -\infty} z = 9 - 4x_1 = -\infty$$

3.5 El Algoritmo de las Dos Fases

Escríbase el PPL en forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & z = c^t x \\ \text{s.a.:} & x \in S \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & z = c^t x \\ \text{s.a.:} & Ax = b \\ & x \geq 0_n \end{array}$$

En donde A es una matriz $m \times n$ de rango completo por filas.

Si A contiene una submatriz identidad $m \times m$ y $b \geq 0_m$

$$B = I_m \ \text{ y } \ N = A \setminus B$$

permiten definir una SPB inicial para aplicar el algoritmo del Simplex:

$$x_B = B^{-1}b \ \text{ y } \ x_N = 0_{n-m}$$

En otro caso, A se completa con tantas columnas (*variables artificiales*) como sea necesario para conseguir dicha situación, y se aplica el algoritmo de las 2 fases.

Fase 1: Construir el problema auxiliar resultante de añadir las variables artificiales:

$$\begin{array}{lllll} \text{Min} & z = c^t x & \rightarrow & \text{Min} & z = 1^t x_a \\ \text{s.a.:} & Ax = b & & \text{s.a.:} & Ax + x_a = b \\ & x \geq 0 & & & x, x_a \geq 0 \end{array}$$

Resolver el problema auxiliar con el algoritmo del Simplex. Sea (x^*, x_a^*) la solución óptima.

Si $x_a^* = 0 \quad \longrightarrow \quad$ Ir a la Fase 2.

Si $x_a^* \neq 0 \quad \longrightarrow \quad$ Problema original Imposible

Fase 2: Utilizar la SPB obtenida al final de la Fase 1 para resolver el problema inicial. Sean x_B las variables básicas en dicha solución.

Consideremos la tabla óptima al final de la Fase 1.

- Si en x_B NO HAY variables artificiales: eliminando las columnas asociadas a las variables artificiales y actualizando convenientemente la fila asociada a la función objetivo obtenemos la tabla inicial para resolver el problema original con el algoritmo Simplex.
- Si en x_B HAY variables artificiales: tratamos de obtener una SPB sin variables artificiales.

¿Cómo?

1. Eliminar de la tabla las columnas asociadas a las variables artificiales no básicas.

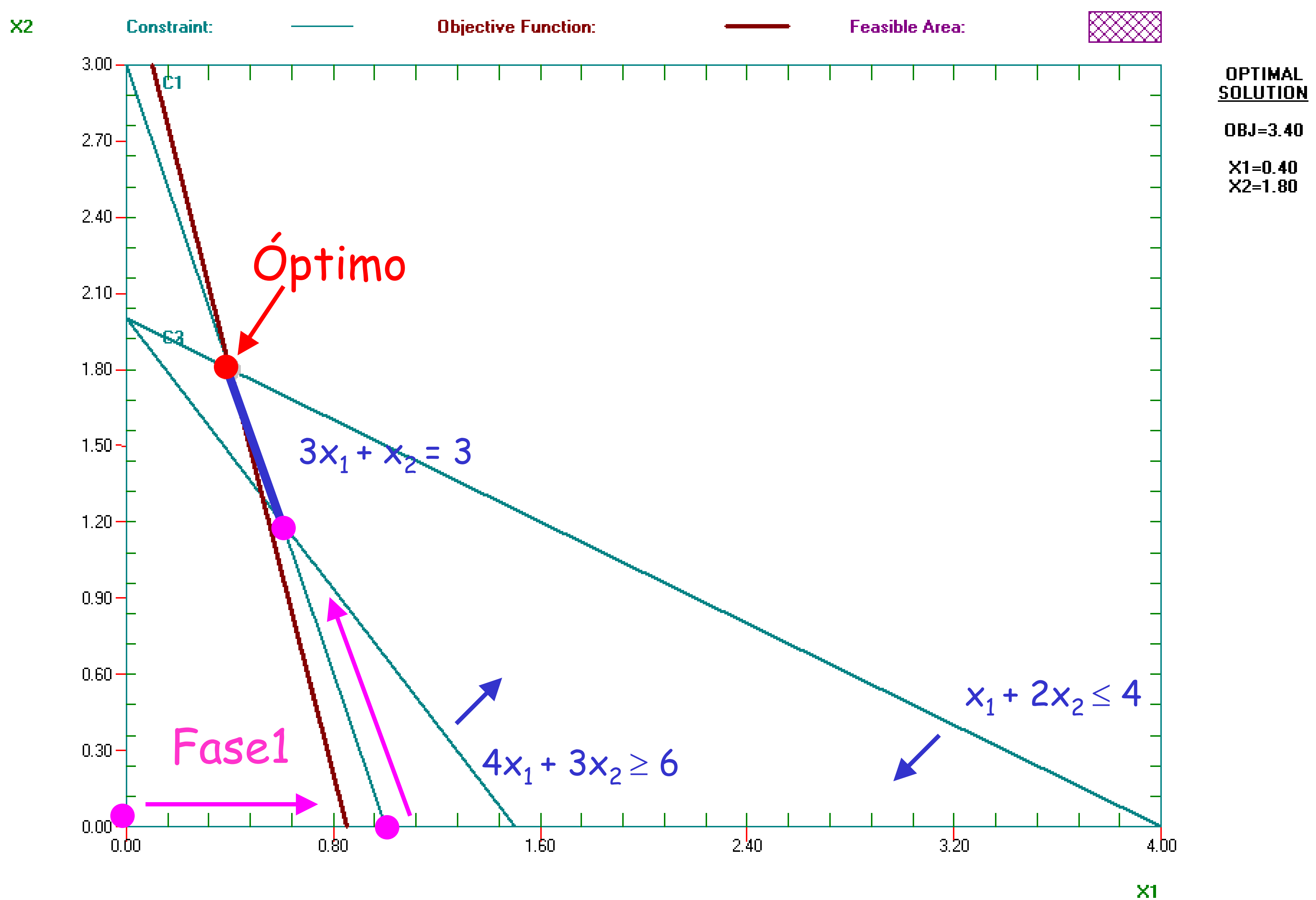
2. Actualizar la fila asociada a la función objetivo considerando que los coeficientes en la función objetivo de las variables artificiales en el problema original son 0.

3. Eliminar secuencialmente variables artificiales básicas pivotando sobre elementos de la tabla $y_{ij} \neq 0$, en donde:

   $i :=$ fila asociada a la variable básica artificial

   $j :=$ columna asociada a la variable no artificial

   Si $y_{ij} = 0, \ \forall j \neq i$ la ecuación i-ésima es redundante. Eliminar la ecuación y la variable artificial.


X2
Constraint:
Objective Function:
Feasible Area:
OPTIMAL SOLUTION
OBJ=3.40
X1=0.40
X2=1.80
C1
C3
Óptimo
3x1 + x2 = 3
x1 + 2x2 ≤ 4
4x1 + 3x2 ≥ 6
Fase1
3.00
2.70
2.40
2.10
1.80
1.50
1.20
0.90
0.60
0.30
0.00
0.00
0.80
1.60
2.40
3.20
4.00
X1