Tema 6: Problemas Especiales de Programación Lineal

Transporte Asignación Transbordo

Tienen una estructura especial que permite modelizar situaciones en las que es necesario:

- Determinar la manera óptima de transportar mercancías o bienes
- Programar y Secuenciar la Producción
- Asignar personas a tareas

La mayor parte de los coeficientes de la matriz de restricciones son iguales a cero y el resto, son 1 o -1

Su estructura ha permitido desarrollar algoritmos específicos más eficientes que el algoritmo del Simplex. Se resuelven problemas de hasta 63 millones de variables.

6.1 El Problema del Transporte

Situaciones: Enviar un bien desde unos puntos de origen a unos puntos de destino.

Objetivo: Determinar las cantidades que hay que enviar desde cada origen a cada destino para satisfacer todas las demandas sin superar los límites que establece la oferta y de forma que se minimice el coste total de distribución.

Hipótesis: El coste del envío por una determinada ruta es proporcional al número de unidades enviadas por esa ruta.

Ejemplo 6.1: Un Problema de Transporte *(Taha, pág.- 180)*

La compañía *Sunray Transport Company* envía camiones cargados de grano desde tres silos a cuatro molinos. La oferta y la demanda, junto con los costes del transporte por carga de camión en las diferentes rutas, se resumen en la siguiente tabla, en donde la oferta y la demanda vienen dadas en términos de camiones cargados y los costes en cientos de euros.

	Molino 1	Molino 2	Molino 3	Molino 4	Oferta
Silo 1	10	2	20	11	**15**
Silo 2	12	7	9	20	**25**
Silo 3	4	14	16	18	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

Determina qué cantidad de camiones, x_{ij}, hay que enviar desde cada silo i a cada molino j para conseguir que el coste total del transporte sea lo menor posible.

Modelización

Red o Grafo Bipartido en el que:

- Los $m+n$ vértices representan los m puntos de origen y los n puntos de destino
- Las aristas (i, j), los caminos entre cada origen i y cada destino j
- Cada vértice origen tiene asociada una oferta a_i, $i = 1, \ldots, m$
- Cada vértice destino tiene asociada una demanda b_j, $j = 1, \ldots, n$
- Cada arista, un coste c_{ij} que representa el coste de enviar una unidad de demanda de i a j
- *Oferta total* $\geq$ *Demanda total* $(\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j)$

Si *Oferta total* $<$ *Demanda total* es posible modelizar el problema para determinar las demandas que quedarían por servir.

Si x_{ij}= n$^{\text{o}}$ de unidades que se envían desde el origen i al destino j

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{sa:} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\
 & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\
 & x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j)
\end{array}
$$

Si x_{ij}= n° de camiones de grano que se envían desde el silo i al molino j

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & 10x_{11} + 2x_{12} + 20x_{13} + 11x_{14} + \\
& 12x_{21} + 7x_{22} + 9x_{23} + 20x_{24} + \\
& 4x_{31} + 14x_{32} + 16x_{33} + 18x_{34} \\
\text{sa:} & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 15 \quad Silo \quad 1 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 25 \quad Silo \quad 2 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 10 \quad Silo \quad 3 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} = 5 \quad Molino \quad 1 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} = 15 \quad Molino \quad 2 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} = 15 \quad Molino \quad 3 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} = 15 \quad Molino \quad 4 \\
& x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j)
\end{array}
$$

Propiedades

- *Propiedad de las Soluciones Posibles:* un problema de transporte tiene solución sii *Oferta total* $\geq$ *Demanda total*, es decir:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- *Propiedad de las Soluciones Enteras:* si todas las ofertas a_i y todas las demandas b_j son enteras, todas las soluciones posibles básicas toman valores enteros.

El modelo se dice que *está desequilibrado* cuando:

$$\textit{Oferta total} \neq \textit{Demanda total}$$

Solución: Añadir vértices y aristas ficticias a la red.

- *Si Oferta total < Demanda total:* el problema es imposible
- *Si Oferta total > Demanda total:* añadir un destino ficticio $n+1$ cuya demanda sea

  $$b_{n+1} = \textit{Oferta total} - \textit{Demanda total}$$

  Unir el destino ficticio con todos los orígenes mediante aristas de coste cero. Si se desea que se agote la oferta de un determinado origen se puede asignar un coste positivo suficientemente grande a la arista que conecta el destino ficticio con dicho origen.

El equilibrado es necesario para poder aplicar el *Algoritmo del Transporte*: adaptación especial del Símplex al problema del transporte.

6.2 El Problema de Asignación

Situaciones: Asignar recursos a tareas cuando:

- Número de recursos = Número de Tareas = n
- Cada recurso se debe asignar a una única tarea exactamente
- Cada tarea debe tener asignado exactamente un único recurso
- Para cada pareja $(recurso, tarea)$ se conoce el coste que supone realizar la tarea utilizando dicho recurso.

Objetivo: Determinar cómo deben hacerse las n asignaciones para que el coste total de la asignación sea mínima.

El Problema de Asignación es un caso particular del Modelo del Transporte.

Ejemplo 6.2: Un Problema de Asignación

Los tres hijos de Jacinto García, Juan, Pepe y Lucía, quieren ganar algún dinero para cubrir sus gastos de telefonía móvil del mes actual. El Sr. García ha elegido tres tareas para sus hijos: podar el césped, pintar el garage y lavar los tres coches de la familia. Para evitar las peleas entre hermanos les pidió que entregaran una nota secreta indicando el pago (en euros) que ellos considerarían justo por cada una de las tareas. Los hijos se pusieron de acuerdo en aceptar la asignación de tareas que finalmente hiciese su padre. A la vista de las notas entregadas (tabla siguiente) ¿qué asignación debería hacer el Sr. García para tener que pagar lo mínimo posible?

	Podar	Pintar	Lavar
Juan	15	10	9
Pepe	9	15	10
Lucía	10	12	8

Definiendo:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i\ se\ asigna\ a\ j \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Min $\quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

sa: $\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j)$$

Si $x_{ij} = 1$ si el hijo i realiza la tarea j

$$\begin{array}{llllll} i=1 & (Juan) & i=2 & (Pepe) & i=3 & (Lucía) \\ j=1 & (Podar) & j=2 & (Pintar) & j=3 & (Lavar) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 15x_{11} + 10x_{12} + 9x_{13} + 9x_{21} + 15x_{22} + 10x_{23} + 10x_{31} + 12x_{32} + 8x_{33} \\ \text{sa:} & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\ & x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ & x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \\ & x_{ij} \geq 0, \ \forall (i,j) \end{array}$$

Propiedades

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} x_{ij} \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \end{array}\right\} \longrightarrow x_{ij} \leq 1 \\ Transporte \longrightarrow x_{ij}\ entera \end{array}\right\} \rightarrow x_{ij} \in \{0, 1\}$$

Todas las SPB son degeneradas. Solamente n de las $2n - 1$ variables básicas pueden ser distintas de cero.

El Algoritmo del Transporte no explota estas propiedades. El *Método Húngaro* está diseñado para tener en cuenta el alto grado de degeneración, se trata de un algoritmo específico para el problema de asignación.

6.3 El Problema del Transbordo

Situaciones: Enviar un bien desde unos puntos de origen a unos puntos de destino pero pudiendo pasar por puntos intermedios.

Reconoce que a veces en la vida real resulta más económico enviar mercancías a través de puntos intermedios en lugar de hacerlo directamente desde el origen hasta el destino.

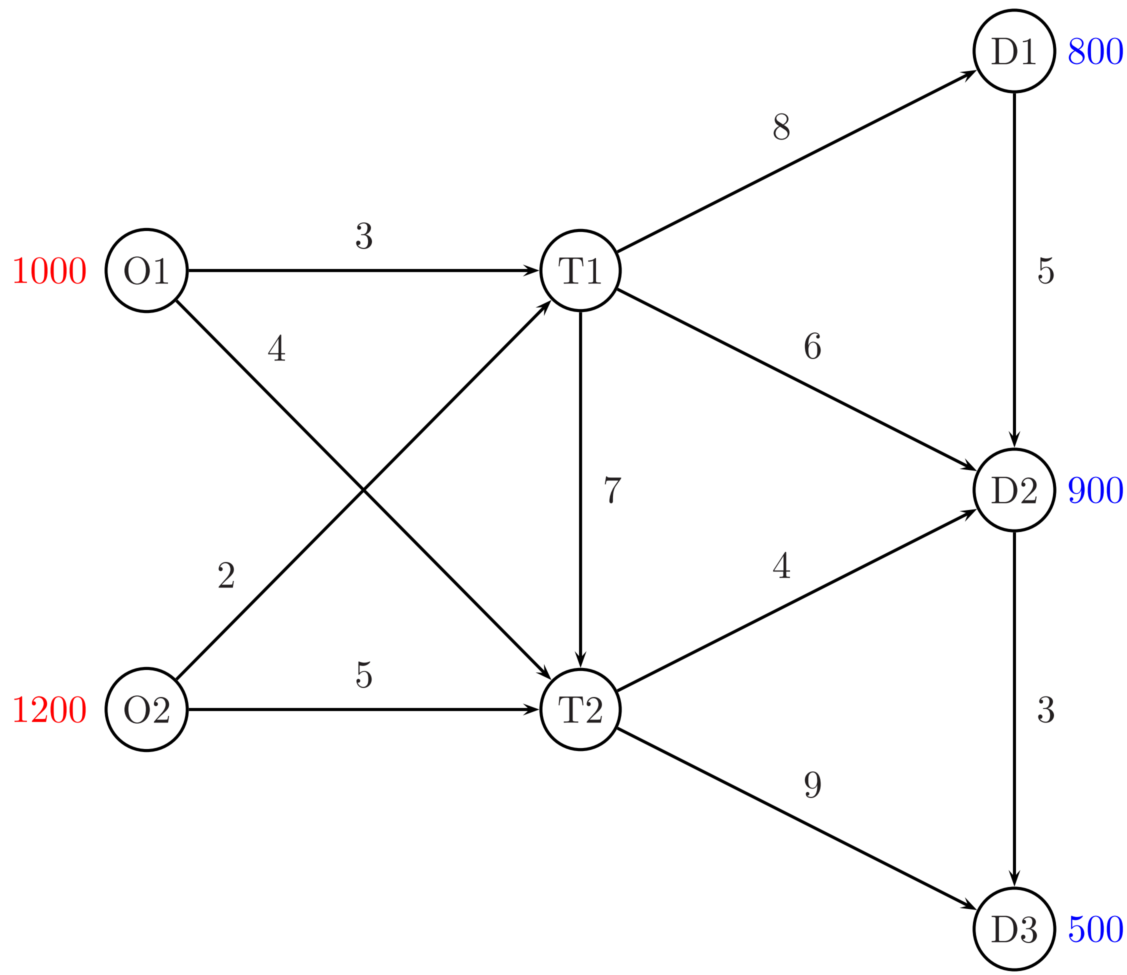
Los vértices del grafo pueden ser de varios tipos:

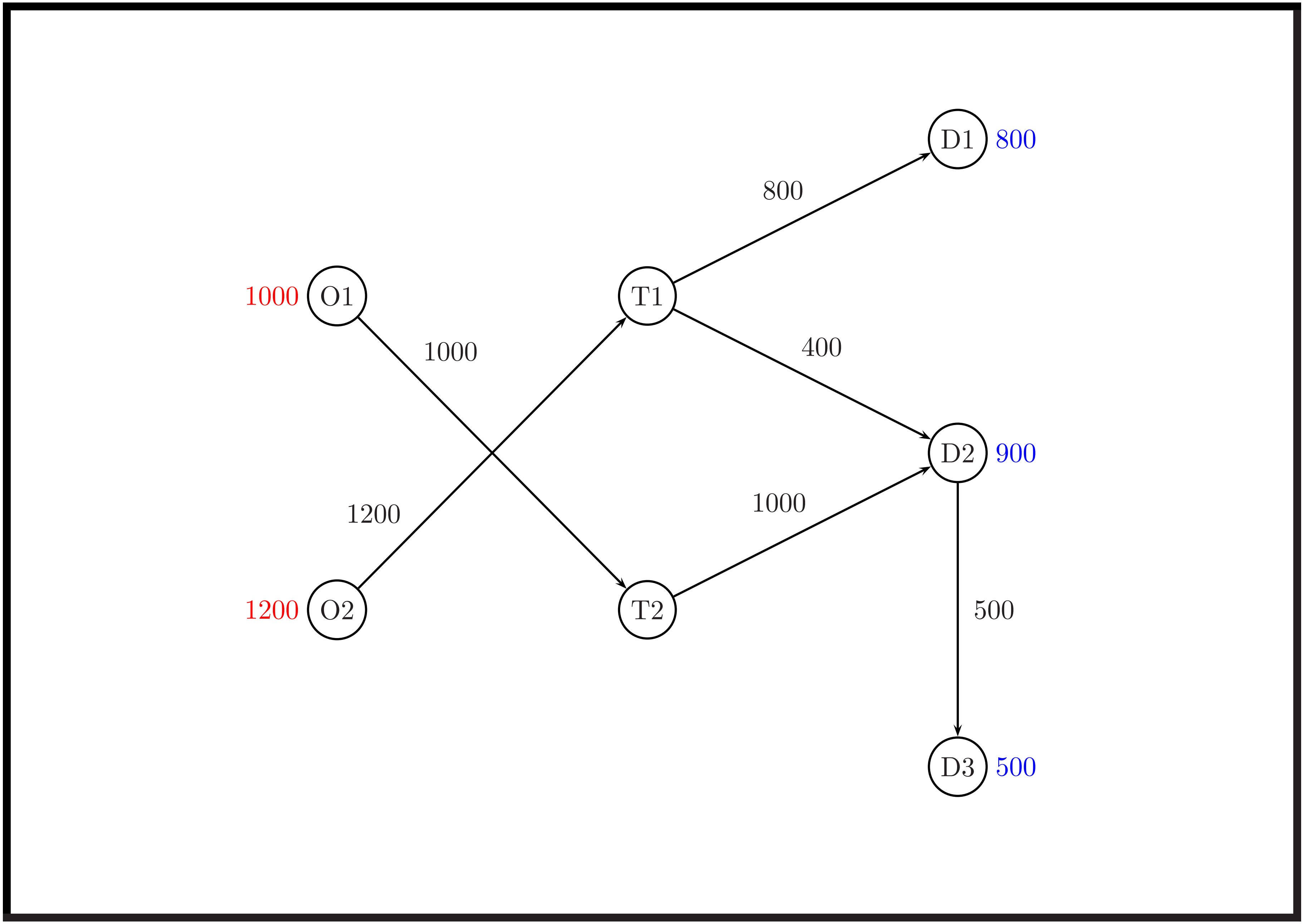
- *Orígenes puros:* Solo pueden enviar bienes. De ellos solamente pueden salir arcos.
- *Destinos puros:* Solo pueden recibir bienes. A ellos solamente pueden llegar arcos.
- *Transbordos:* Pueden enviar y/o recibir mercancías. A ellos pueden llegar arcos y/o de ellos pueden salir arcos.

Puede transformarse en un problema de transporte. Pero es un caso particular de Problemas de Flujos (siguiente tema ...)

Ejemplo 6.3: Un Problema de Transbordo

El siguiente grafo corresponde a una red de ordenadores en la que los nodos O1 y O2 representan los servidores de correo electrónico de los ordenadores de varias ciudades europeas, T1 y T2 son nodos de distribución intermedios y D1, D2 y D3 representan los servidores de correo que dan servicio a los ordenadores de varias ciudades americanas. Se estima que a O1 llegan 1000 mensajes al día, y 1200 a O2. Sin embargo, D1 solamente puede dar salida a 800 mensajes diarios, D2 a 900, y D3 a 500. Se supone que no hay problemas de capacidad en las líneas que conectan estos nodos, por lo que por cada tramo se pueden transmitir tantos mensajes como sean necesarios. Los números indicados en la red representan el tiempo que tarda en milésimas de segundo la transmisión del mensaje por ese tramo de la red. Modelizar y resolver el problema de programación lineal que permite transmitir los mensajes en el menor tiempo posible.


1000
O1
1200
O2
T1
T2
D1
800
D2
900
D3
500
3
4
2
5
8
6
7
4
9
5
3



D1
800
800
1000
O1
T1
1000
400
D2
900
1000
1200
1200
O2
T2
500
D3
500