FRACTALS

Vicent J. Martínez*

FRACTALS (DEVELOPED BY THE POLISH MATHEMATICIAN BENOIT MANDELBROT) ARE BASED ON THE FACT THAT THE DIMENSION OF ANY OBJECT IS NOT NECESSARILY AN INTEGER. THE SHAPE OF A CLOUD OR THE COAST OF AN ISLAND CANNOT BE EXPRESSED BY THE WHOLE NUMBER SYSTEM USED IN ELEMENTARY GEOMETRY. A CHARACTERISTIC OF FRACTALS IS THAT THEIR PORTIONS ARE SIMILAR TO THE WHOLE. FRACTALS ARE APPLIED IN A GREAT VARIETY OF DISCIPLINES; FROM PHYSICS TO CARTOGRAPHY, FROM BIOLOGY TO ASTRONOMY. THIS IS OBVIOUSLY THEIR MOST RELEVANT VALUE.

La geometria dels objectes quotidians es basa, aparentment, en dimensions enteres. Així, per exemple, un sòlid com una bola de billar és de dimensió 3; una superfície com la d'un full de paper és de dimensió 2 (si ignorem que la seua secció és no nul·la); i podem considerar un fil fi com un objecte de dimensió 1. Tot seguint aquesta manera d'argumentar, direm que un punt té dimensió 0.

Hi ha objectes en la natura que no es poden descriure fàcilment amb els conceptes de la geometria elemental. Si pensem en un núvol, una esponja de mar, un arbre i les seues ramificacions, un riu i els seus afluents, la trajectòria d'un raig o la de l'aigua en un torrent, la costa d'una illa, etc., ens trobem davant objectes, que presenten dificultats per a ser descrits per mitjà dels conceptes clàssics de la geometria. Benoît Mandelbrot, el pare de la teoria dels fractals, explica de manera eloqüent els límits de la geometria elemental per a descriure la natura: "els núvols no són esferes, les muntanyes no són cons, les costes no són cercles, l'escorça d'un arbre no és llisa ni la llum d'un raig viatja en línia recta..." Després de la lectura d'aquest article, hauria de ser natural escoltar que un núvol té dimensió 1.3 o que la costa de Noruega és de dimensió 1.52.

Una de les característiques que presenten els objectes fractals és que les parts són similars a tot el conjunt, és a dir, que s'assemblen a si mateixos independentment de l'escala en què s'observen. Per exemple, si agafem una esponja de mar i n'arranquem un petit tros, aquest s'assemblarà en tot a l'esponja inicial menys en el volum. Per tal d'entendre millor aquesta propietat, introduirem algunes construccions matemàtiques que són fractals.

En els fractals, el concepte bàsic és que la dimensió d'un objecte no és necessàriament un nombre enter. La definició de la dimensió utilitzada en aquest camp de les matemàtiques es deu a l'alemany Felix Hausdorff, cosa que escapa de les pretensions d'aquest article. No obstant això, podem donar una idea de dimensió que resultarà útil en l'estudi dels fractals. Considerarem un segment, un quadrat i un cub; si els dividim en formes iguals a la inicial, però amb escala lineal 1/2, obtenim 2,4 i 8 parts respectivament. Si escrivim aquests nombres com a potències

«ELS NÚVOLS TENEN ESTRUCTURA FRACTAL, TAMBÉ LA DISTRIBUCIÓ DELS DIÀMETRES DELS CRÀTERS LUNARS O ELS ANELLS DE SATURN. L'UNIVERS A GRAN ESCALA PRESENTA TAMBÉ ESTRUCTURA FRACTAL»

del divisor emprat queda 2^1, 2^2 i 2^3. Anàlogament, si dividim les figures en formes similars d'escala 1/4 obtenim 4,16 i 64 parts respectivament o, el que és el mateix, 4^1, 4^2 i 4^3. L'exponent és, en cada cas, la dimensió de l'objecte geomètric considerat. En general, podem concloure dient que, en dividir un conjunt en m parts similars al total d'escala $1/n$, es verifica la relació $m=n^D$, on D és la dimensió. Aquesta dimensió (de semblança) té la propietat de poder presentar valors fraccionaris en aplicar-la als objectes fractals. Vegem-ho.

El fundador de la teoria de conjunts, Georg Cantor, proposà de construir el següent conjunt. Si partim del segment de longitud 1, eliminem el terç central;

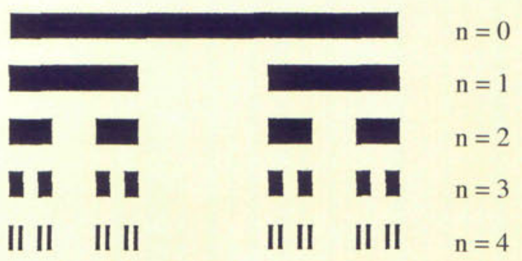


Fig. A.- Construcció del conjunt de Cantor

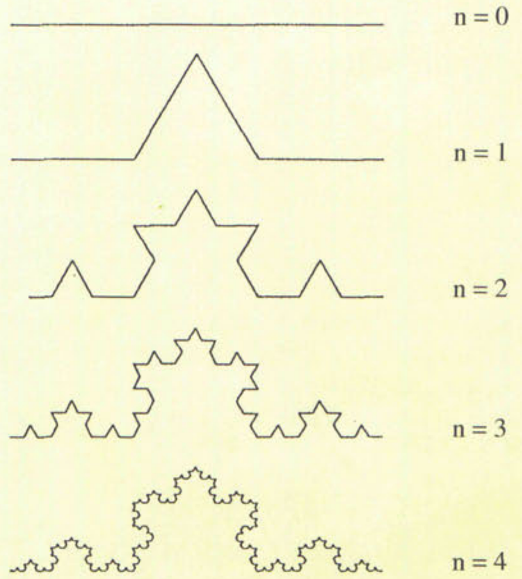


Fig. B.- Construcció de la corba de Koch

amb cadascun dels dos trossos restants, procedim d'igual manera eliminant-ne el terç central, i així successivament. Aquesta construcció recursiva produeix un conjunt que és semblant a si mateix, ja que partint de qualsevol subsegment el devassall de subdivisions que en naix és semblant al total. S'anomena conjunt ternari de Cantor (fig. A) al límit al qual *arribaríem* en realitzar infinits passos com els descrits anteriorment. Quina és la dimensió d'aquest conjunt? El nombre de trossos en què dividim cada segment és dos i la longitud de cadascun és 1/3 de la longitud anterior. Si apliquem la definició de dimensió que hem vist anteriorment, obtenim que *D* ha de verificar, $2=3^D$, és a dir $D=\log2/\log3 \cong 0.6309$. Aquest valor, no enter, és el que coneixem com a dimensió fractal. El seu valor, comprès entre 0 i 1, significa que el conjunt de Cantor és dimensionalment quelcom més que un conjunt discret de punts, però quelcom menys que una línia.

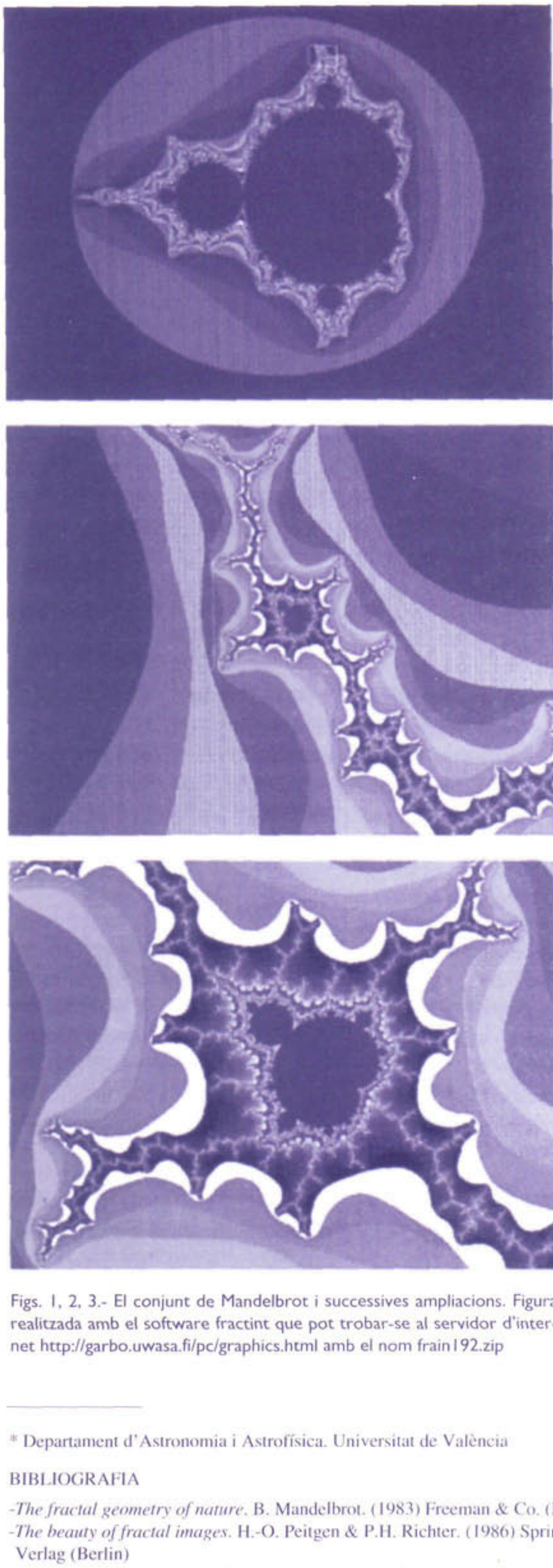
Vegem un altre exemple. Partim una altra volta del segment unitat, i afegim al seu centre un triangle equilàter de longitud 1/3. Ens queda, en la part exterior, una línia formada per 4 segments de longitud 1/3. Procedim ara d'igual manera, tot afegint un triangle equilàter de longitud 1/9 en cadascun dels 4 segments. Fixant-nos només en la part exterior de la corba, tenim ara 16 segments de longitud 1/9. Si procedim d'aquesta manera fins a l'infinit, obtenim una corba contínua, de longitud infinita (la sèrie que resulta de considerar el perímetre divergeix), que no és diferenciable en cap punt i que juntament al segment inicial tanca una superfície evidentment finita. Aquesta aparent paradoxa s'explica en el context de la geometria fractal. Aquesta corba, coneguda com a corba de Koch (fig. B), presenta una estructura similar en un gran rang d'escales. Aquesta característica pròpia dels fractals no la presenten objectes geomètrics més simples, ja que perden l'estructura quan són ampliats. Un tros petit d'una circumferència s'assembla a una línia recta quan l'ampliem suficientment. Encara que la dimensió topològica de la corba de Koch és 1, es tracta d'un conjunt que dimensionalment és quelcom més que una simple línia, però menys que una superfície de dimensió 2. Efectivament, si calculem la dimensió de la corba de Koch, obtenim $\log4/\log3 \cong 1.2619$, és a dir, un nombre comprès entre 1 i 2.

La paraula "fractal", com el seu estudi i la seua divulgació, es deuen fonamentalment al matemàtic d'origen polonès Benoît Mandelbrot. El seu nom acompanya també un dels conjunts fractals més sorprenents i que, amb freqüència, apareix en exposicions, portades i cartells: el conjunt de Mandelbrot. Per a construir aquest conjunt, considerem la seqüència de nombres complexos $z_{n+1} = z_n^2 + c$. Una iteració d'aquest estil significa que donat un nombre complex inicial z_0, sabem com obtenir el següent d'una successió, $z_0 \to z_1 \to z_2$,... N'hi ha prou de multiplicar cada nombre de la successió per si mateix i sumar-li *c* per a obtenir el següent. El fet que es tracte de nombres complexos pot interpretar-se (per qui no estiga acostumat al seu ús) com una iteració que porta un punt del pla a un altre punt del pla. El conjunt de Mandelbrot és format pels valors complexos *c* per als quals la seqüència $z_{n+1} = z_n^2 + c$, iniciada en $z_0 = 0$, roman acotada. El veiem representat en la figura que acompanya aquest article (fig. 1, 2 i 3), com un cor al qual tangencialment s'uneixen discos de diferents volums. Les zones acolorides que envolten el conjunt de Mandelbrot representen valors de *c*, per als quals la successió (z_n) tendeix a infinit. Els diferents tons representen el nombre d'iteracions que han estat necessàries per a detectar numèricament l'esmentada divergència. Encara que aquest conjunt no és estrictament autosimilar, podem observar com en "mirar amb microscopi" una petita zona, novament apareixen rèpliques de conjunt de Mandelbrot.

Els fractals apareixen en innombrables camps de la ciència, però, sens dubte, és en el que hom ha anomenat la "ciència del caos" on apareixen de manera més natural. Els *atractors estranys*, en què convergeixen les trajectòries de sistemes dinàmics amb comportament caòtics són fractals. El valor concret de la dimensió fractal d'aquests atractors és una peça fonamental per a entendre quantitativament la seua dinàmica caòtica. A més dels processos no lineals, els fractals descriuen molts fenòmens en altres camps de la física, de la química i de la biologia. En física de l'estat sòlid se simulen les deposicions electrolítiques, la corrosió o els núvols de col·loides per un procés conegut com agregació per difusió limitada. La modelització per ordinador es basa en partícules que recorren un camí aleatori fins que *ensopeguen* amb l'agregat que està creixent, a partir d'aquest moment són fixades a l'agregat i esperen que noves partícules s'apropen. La massa d'aquests agregats creix amb el radi R proporcionalment a R^D, on D és la dimensió fractal. Generats sobre superfícies planes, el valor experimental que s'obté per a D és 1.7.

En Biologia s'ha demostrat que les superfícies rugoses de les proteïnes tenen estructura fractal amb dimensió 2.4. Els fractals apareixen també en escales molt més grans. Per exemple, els núvols tenen estructura fractal, també la distribució dels diàmetres dels cràters lunars, els anells de Saturn o les estructures que formen els romanents de les explosions de les supernoves. Finalment, l'univers a gran escala presenta també estructura fractal. La distribució de les galàxies no és aleatòria. La textura de l'univers s'assembla a l'escuma que fa el sabó en el bany. Grans bombolles buides on se situen les galàxies formant parets, grumolls i filaments. En les escales on es dóna aqueixa distribució tan poc uniforme, l'estructura còsmica és fractal amb dimensió 1.3.

Cal fer notar que, en la natura, el rang d'autosemblança es verifica només en unes escales determinades, mentre que en les construccions matemàtiques que hem descrit anteriorment es verificava en escales arbitràriament petites. Això és una diferència important entre els fractals *matemàtics* i els fractals *naturals*, però, en qualsevol cas, podem concloure que el llenguatge que s'associa a la geometria fractal i en particular el seu concepte bàsic, la dimensió fractal, s'han convertit en eines d'una gran utilitat en moltes i variades disciplines científiques.



1

2

3

Figs. 1, 2, 3.- El conjunt de Mandelbrot i successives ampliacions. Figura realitzada amb el software fractint que pot trobar-se al servidor d'internet http://garbo.uwasa.fi/pc/graphics.html amb el nom frain192.zip

* Departament d'Astronomia i Astrofísica. Universitat de València

BIBLIOGRAFIA

-*The fractal geometry of nature*. B. Mandelbrot. (1983) Freeman & Co. (NY)
-*The beauty of fractal images*. H.-O. Peitgen & P.H. Richter. (1986) Springer-Verlag (Berlin)
-*Fractals*. J. Feder. (1988). Plenum Press. (New York)
-*Fractals for the classroom*. H.-O. Peitgen, H. Jürgens & D. Saupe (1992) Springer-Verlag (New York)
-*Fractals in Science*. Eds. A. Bunde & S. Havlin. (1994) Springer-Verlag (Berlin)