PROPIEDADES LOCALES DE GRUPOS FINITOS Y ESPACIOS CLASIFICADORES

CARLES BROTO

La teoría de grupos ha estado íntimamente relacionada con la geometría y la topología desde sus inicios. Los grupos de isometrías o de autoequivalencias se utilizan para estudiar propiedades geométricas o topológicas de espacios y también, recíprocamente, se estudian propiedades de grupos G a través de los espacios que admiten una acción de G. En este contexto aparece de manera natural el caso de espacios contráctiles con una acción libre de un grupo G. Su espacio de órbitas es BG, el espacio clasificador de G.

No obstante el estudio de las propiedades locales de grupos y espacios ha transcurrido en muchas ocasiones de manera independiente. El estudio de las propiedades locales de los grupos finitos, como describe por ejemplo Glauberman [Global and local properties of finite groups. Finite simple groups (Proc. Instructional Conf., Oxford, 1969), pp. 1–64. Academic Press, London, 1971] forma parte, por ejemplo, de la clasificación de los grupos finitos simples. El estudio de los espacios topológicos desde el punto de vista local tiene su origen en la solución de Sullivan a la conjetura de Adams [Genetics of homotopy theory and the Adams conjecture. Ann. of Math. 100 (1974), 1–79.], mientras que la aplicación de esta técnica al caso de espacios clasificadores encuentra su impulso definitivo en la solución de Miller de la conjetura de Sullivan [The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces. Ann. of Math. 120 (1984), 39–87].

Trabajos de Dwyer-Wilkerson, Puig y Benson en la década de los 90 sugieren la existencia de una teoría cuyos objetos deben recoger y aislar las propiedades locales de grupos finitos para un solo primo p y admitir un espacio clasificador, también local. Un tal objeto podría estar asociado o no a un grupo genuino. Esta teoría se concreta en nuestro trabajo conjunto con R. Levi y B. Oliver, donde tales objetos reciben el nombre de *grupos p-locales finitos* [The homotopy theory of fusion systems, J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), 779–856].

Un grupo p-local finito consiste en un p-grupo finito S junto a dos categorías $\mathcal{F}$ y $\mathcal{L}$, la primera de las cuales se modela sobre las propiedades de conjugación, también llamadas de fusión, en un p-subgrupo de Sylow de un grupo finito y la segunda es una extensión que contiene la suficiente información extra de manera que la p-compleción de su nervio, en el sentido topológico, presenta las mismas propiedades homotópicas que las p-compleciones de los espacios clasificadores de grupos finitos. Esta teoría unifica, en primer lugar, los puntos de vista algebraico y topológico de las propiedades locales de grupos finitos.

Esta exposición se centrará en las motivaciones y desarrollo reciente de la teoría de grupos p-locales finitos.

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, E-08193 Bellaterra, Spain

E-mail address: broto@mat.uab.es

Date: Valencia, febrero de 2005.