

# En busca de singularidades en fluidos incompresibles

Diego Córdoba Gazolaz

El problema de la formación de singularidades en Mecánica de Fluidos está en la frontera entre el análisis matemático, el análisis numérico y la física de los medios continuos, por lo que siempre hay que estar atento al desarrollo de las simulaciones numéricas y, por supuesto, a los logros experimentales. Fue Leonard Euler quien, en 1755, escribió por primera vez las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de un fluido no viscoso. Setenta años después C. Navier e, independientemente, G. Stokes introdujeron el término de viscosidad en las ecuaciones que hoy denominamos de Navier-Stokes. A fecha de hoy, casi doscientos años después, la mera existencia de soluciones únicas no está garantizada, por lo que, en principio, las soluciones de dichas ecuaciones podrían desarrollar singularidades o estructuras casi singulares en tiempo finito. En esta charla describimos algunos resultados analíticos basados en simulaciones y experimentos.

## Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles son un sistema que procede del balance entre las fuerzas de inercia (segunda ley de Newton), rozamiento (viscosidad) y en campos externos al que se añade la ley de conservación de la masa. El balance de fuerzas esta representado por el vector velocidad  $u(x, t) = (u_i(x, t))_{1 \leq i \leq n}$  ( $n = 2$  ó  $3$ ) y la presión  $p = p(x, t)$  que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{1 \leq j \leq n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \\ \operatorname{div} u &:= \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\nu$  es el coeficiente de viscosidad cinemática y  $f = f_i(x, t)$  representa un campo de fuerzas externo. En el sistema de ecuaciones,  $\nu = 0$  corresponde a la ecuación de Euler, mientras que  $\nu \neq 0$  corresponde a Navier-Stokes. La diferencia más importante entre las dos ecuaciones radica en que para Euler la energía se conserva y para Navier-Stokes decrece, lo que se obtiene fácilmente al multiplicar las ecuaciones por el vector velocidad e integrar en el dominio  $\Omega$  (para simplificar tomamos  $\Omega = R^n, Z^n$ ). El término no-lineal desaparece debido a que la velocidad es de divergencia cero. Se obtiene la siguiente fórmula

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx + \nu \int_{t_0}^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(x, t_0)|^2 dx. \quad (2)$$

El trabajo de J. Leray fue pionero en hacer un análisis matemático de las ecuaciones de Navier-Stokes. En 1933 [1] probó la existencia local de soluciones regulares donde el tiempo de existencia depende del dato inicial. Introdujo, en 1934 [2], la noción de solución débil, antes del desarrollo de la teoría de distribuciones por L. Schwartz (1950) y poco antes de que S.L. Sobolev (1936) definiera los famosos espacios que llevan su nombre, y probó la existencia de soluciones débiles para Navier-Stokes. No obstante la unicidad de las soluciones débiles sigue siendo un problema abierto. En cambio para Euler la unicidad es falsa (véanse [4] y [3]). Uno de los problemas más importantes, por sus consecuencias dentro de la física y de la ingeniería, es el problema de existencia de singularidades de la ecuación de Navier-Stokes en dimensión  $n=3$ . La presencia de dichas singularidades fue conjeturada por J. Leray como posible explicación del fenómeno de la turbulencia.

En 1933 Wolibner [27] probaron que en dimensión dos las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes no producen singularidades y las soluciones son globales, pero en dimensión tres el problema es extremadamente difícil por lo que S.Klainerman en su trabajo [6] lo definió como uno de los desafíos más importantes del Siglo XXI en el área de Ecuaciones en Derivadas Parciales. Recientemente se ha puesto muy de moda, sobre todo desde que el Instituto Clay anunció un premio para la persona que lo resuelva.

El estudio matemático de las ecuaciones que gobiernan la evolución de los fluidos incompresibles, viscosos o no viscosos, constituye un problema muy complicado de abordar analíticamente debido a la inestabilidad y no-linealidad del sistema. A continuación daremos una breve descripción de propiedades y resultados sobre la formación de singularidades.

La vorticidad se define por  $\omega = \nabla \times u$  y las ecuaciones (1) en dimensión  $n=3$  pueden escribirse en términos del vector  $\omega$  como

$$\omega_t + u \cdot \nabla \omega = (\nabla u)\omega + \nu \Delta \omega \quad (3)$$

$$\nabla \cdot u = \nabla \cdot \omega = 0$$

Usando la ley de Biot-Savart, la velocidad se recupera de la vorticidad por el operador

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{y \times \omega(x + y, t)}{|y|^3} dy.$$

El operador  $D_t \equiv \partial_t + u \cdot \nabla$  es la derivada con respecto al tiempo a lo largo de trayectorias que recibe el nombre de derivada material. Fijándose en la ecuación (3) con viscosidad cero es natural hacer el siguiente argumento heurístico

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega^2$$

ya que  $\nabla u$  tiene el mismo orden que la vorticidad. Esta ecuación diferencial ordinaria produce singularidades en tiempo finito. Pero en realidad,  $\nabla u$  es una convolución de la vorticidad con un núcleo homogéneo de orden -3 y con media cero en la esfera unidad. Además, debido a la incompresibilidad del fluido, podría existir suficiente cancelación en el producto  $(\nabla u)\omega$  para prevenir la singularidad.

Resulta que la ecuación de Euler en dimensión  $n=2$  no es un buen modelo para la dimensión  $n=3$ . La razón estriba en que la ecuación de la vorticidad tiene la forma

$$(\partial_t + u \cdot \nabla) \omega = 0 \quad (4)$$

$$u = \nabla^\perp \psi \quad \text{donde} \quad \omega = \Delta \psi.$$

y de aquí se deduce que las normas  $L^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) de  $\omega$  se conservan en todo tiempo. Además en el siguiente cálculo se muestra que las derivadas de la velocidad están acotadas por una exponencial: Aplicando el operador  $\nabla^\perp$  a la ecuación (4), se obtiene

$$(\partial_t + u \cdot \nabla) \nabla^\perp \omega = (\nabla u) \nabla^\perp \omega \quad (5)$$

donde

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \omega(x + y) \log|y| dy$$

y como  $u = \nabla^\perp \psi$  resulta que

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \omega(x + y) \cdot \frac{(-y_2, y_1)}{|y|^2} dy.$$

Derivando la expresión anterior aparece la relación entre las derivadas de la velocidad y las de la vorticidad

$$(\partial_{x_i} u)(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \partial_{x_i} \omega(x + y) \cdot \frac{(-y_2, y_1)}{|y|^2} dy$$

Usando la propiedad de que  $\int_{\Omega} |\omega(x, t)|^p dx$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) se conserva en todo tiempo, se acotan las derivadas de la velocidad por

$$|(\partial_{x_i} u)(x, t)| \leq \log(\sup|\nabla\omega| + 1).$$

La ecuación (5) puede escribirse como

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \right) |\nabla\omega| = \alpha |\nabla\omega|$$

donde  $\alpha$  es

$$\alpha = (\nabla u) \xi \cdot \xi.$$

En este caso,  $\xi$  es la dirección del vector  $\nabla^\perp \omega$ . Por lo tanto

$$\left| \frac{d}{dt} \|\nabla\omega\|_{L^\infty} \right| \leq C \|\nabla\omega\|_{L^\infty} \log(\|\nabla\omega\|_{L^\infty} + 1)$$

y  $\|\nabla\omega\|_{L^\infty}$  está acotada por una doble exponencial en tiempo. De este argumento puede concluirse que las derivadas de la velocidad están acotadas por una exponencial. Esta es

la mejor cota superior que se conoce siendo la existencia de soluciones con energía finita con crecimiento exponencial un problema abierto.

En dimensión  $n=3$  Euler tiene la propiedad que las líneas de vorticidad (curvas tangentes al vector vorticidad) se mueven con el fluido. Consideremos la curva lisa  $C = \{y(s) \in R^3 : 0 < s < 1\}$ : diremos que es una línea de vorticidad a tiempo  $t$  si es tangente a la vorticidad en cada uno de los puntos, eso quiere decir que

$$\frac{dy}{ds}(s) = \lambda(s)\omega(y(s), t) \text{ para algun } \lambda(s) \neq 0$$

Una cuenta muy sencilla muestra que las líneas de vorticidad, de la solución de la ecuación incompresible tridimensional de Euler, se mueven con el fluido: la curva

$$C(t) = \{X(y(s), t) \in R^3 : 0 < s < 1\}$$

satisface

$$\frac{dX}{ds}(y(s), t) = \lambda(s)\omega(X(y(s), t)) \text{ para algun } \lambda(s) \neq 0$$

Un tubo de vorticidad está formado por la unión de líneas de vorticidad. En las simulaciones numéricas se observa que estos tubos se doblan, tuercen y se contraen. Una singularidad puede formarse por la colisión de dos líneas de vorticidad, lo que significa que las trayectorias de dos partículas colisionen en tiempo finito. La trayectoria  $X(q, t)$  se obtiene de resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned} \frac{dX(q, t)}{dt} &= u(X(q, t), t) \\ X(q, 0) &= q \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} (X(q, t) - X(p, t))_t &\leq |X(q, t) - X(p, t)| |\nabla u|_{L^\infty} \\ |X(q, t) - X(p, t)| &\geq |X(q, 0) - X(p, 0)| e^{-\int_0^t |\nabla u|_{L^\infty} ds} \end{aligned}$$

Este sencillo argumento nos dice que para que dos partículas colisionen en tiempo  $T$  se tiene que dar la siguiente condición

$$\int_0^T |\nabla u|_{L^\infty} ds = \infty. \tag{6}$$

El clásico criterio para la formación de singularidades en fluidos es el teorema de Beale, Kato y Majda [29] el cual mejora la estimación (6) y además sirve para cualquier tipo de singularidad:

$$\text{Singularidad en tiempo } T \text{ si y solo si } \int_0^T \sup_x |\omega| dt = \infty.$$

Combinando técnicas analíticas de integrales singulares con argumentos geométricos, Constantin, Fefferman y Majda [13] probaron que si la dirección del vector vorticidad  $\xi(x) = \frac{\omega(x)}{|\omega(x)|}$  se mantiene lisa en regiones donde la vorticidad es alta, entonces no se puede producir una singularidad.

Estos resultados iluminan la naturaleza de los posibles escenarios geométricos donde la dinámica del fluido puede producir singularidades permitiendo que nos centremos en el estudio de casos menos generales. Por ejemplo, una forma de que se produzca una singularidad es que el grosor de un tubo de vorticidad se haga cero en tiempo finito, y se desconoce si esto puede llegar a ocurrir. En el trabajo [21] estudiamos la evolución del volumen de un *tubo regular* que se mueve con el fluido. Un *tubo regular* es un conjunto abierto  $\Omega_t \subset Q$  parametrizado por el tiempo  $t \in [0, T)$ , teniendo la forma

$$\Omega_t = \{(x_1, x_2, x_3) \in Q : \theta(x_1, x_2, x_3, t) < 0\}$$

con

$$\theta \in C^1(Q \times [0, T)) \text{ y } Q = I_1 \times I_2 \times I_3 \subset \mathbb{R}^3,$$

y satisfaciendo las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} |\nabla_{x_1, x_2} \theta| \neq 0 \text{ para } (x_1, x_2, x_3, t) \in Q \times [0, T), \theta(x_1, x_2, x_3, t) = 0; \\ \Omega_t(x_3) := \{(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2 : (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_t\} \end{aligned}$$

y  $\Omega_t(x_3)$  es un conjunto no-vacio, para todo  $x_3 \in I_3, t \in [0, T)$ ;

$$\text{cerrado } (\Omega_t(x_3)) \subset \text{interior } (I_1 \times I_2)$$

para todo  $x_3 \in I_3, t \in [0, T)$ .

El resultado que obtenemos es el siguiente

**Teorema:** *Sea  $\Omega_t \subset Q(t \in [0, T))$  un tubo regular que se mueve con un vector de velocidad  $u(x, t)$  de divergencia cero y clase  $C^1$ .*

Si

$$\int_0^T \sup_{x \in Q} |u(x, t)| dt < \infty$$

entonces

$$\liminf_{t \rightarrow T^-} \text{Vol}(\Omega_t) > 0.$$

En particular si un tubo de vorticidad se mantiene transversal al plano  $(x_1, x_2)$  entonces una condición necesaria para que el volumen se haga cero es que la velocidad diverja.

En el caso de un fluido viscoso ( $\nu > 0$ ) podemos sacar partido al operador Laplaciano, por ejemplo de la desigualdad (2) se deduce que la integral

$$\int_{t_0}^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds$$

está acotada. Los criterios de explosión son bastante mejores

- $\int_0^T \|u(x, t)\|_{L^\infty}^2 dt = \infty \Leftrightarrow$  Singularidad en  $t=T$ . (Serrin 1962) [8]
- $\int_0^T \|u(x, t)\|_{BMO}^2 dt = \infty \Leftrightarrow$  Singularidad en  $t=T$ . (Kozono y Taniuchi 1999) [9], [10].  
Mejorado por [11]

Además permite estudiar la dimensión de Hausdorff del conjunto  $\{(x, t) \in \Omega \times [0, T]; \|u(t)\| = \infty\}$  (véase [5] y [14]). Por otra parte con la viscosidad se pierde la intuición geométrica ya que las líneas de vorticidad no se mueven con el fluido.

¿Puede el fluido desarrollar una singularidad en tiempo finito? Hasta ahora todos los teoremas van en la dirección negativa. No obstante el ejemplo más simple, que cualquiera puede experimentar en casa, es la formación de una gota de agua y su posterior ruptura. En otras palabras, un dominio  $\Omega(t)$  ocupado por un fluido incompresible cambia su topología, inicialmente es simplemente conexo y posteriormente puede evolucionar a un dominio no conexo. Este fenómeno atrajo la atención de los científicos desde principios del siglo XIX, pudiendonos remontar a las observaciones experimentales de Savart (1833) [32], a los trabajos Plateau (1863) y sobre todo al primer estudio analítico de Rayleigh (1879) [31]. Los experimentos muestran que la viscosidad desempeña un papel fundamental en la geometría de la ruptura de las gotas, mientras que en el caso muy viscoso se observa la formación de filamentos muy delgados que finalmente desaparecen después de alcanzar una delgadez próxima al tamaño molecular. Hasta la fecha, todos los resultados existentes en la literatura hacían referencia a modelos o a límites asintóticos derivados del problema original. En [23] se aborda el análisis de los filamentos que se forman durante la evolución de los chorros de un fluido muy viscoso, demostrando que dichos filamentos no pueden colapsar uniformemente en tiempo finito en la dinámica de las ecuaciones de Navier-Stokes complementada con las fuerzas de tensión superficial. Se demuestra que el volumen encerrado por un filamento satisface

$$Vol(t) \geq Ce^{-t^2}.$$

Se trata del primer resultado analítico tridimensional para el problema de singularidades con interfases.

Basados en el análisis a través de estimaciones de energía obtenemos criterios de explosión, podemos medir la dimensión del conjunto de puntos donde hay singularidades y así simplificar el escenario geométrico de las posibles singularidades (véase [25]). A continuación estudiamos las singularidades en modelos unidimensionales y en fluidos incompresibles bidimensionales.

### Modelos unidimensionales

En dimensión  $n=1$  el único operador que tiene la propiedad de ser la convolución de una función con un núcleo homogéneo de orden  $-1$  y con media cero en la esfera unidad es la transformada de Hilbert. Constantin, Lax y Majda [30] estudiaron el siguiente modelo

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = H(\omega)\omega$$

$$\omega(x, 0) = \omega_0(x)$$

donde H es la transformada de Hilbert

$$H(\omega) := \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(y)}{x-y} dy$$

y la velocidad se define como

$$u = \int_{-\infty}^x \omega(y) dy.$$

Esta ecuación puede resolverse explícitamente, la solución es la siguiente

$$\omega(x, t) = \frac{4\omega_0(x)}{[2 - t(H\omega_0)(x)]^2 + t^2\omega_0^2(x)}$$

$\omega$  se hace infinito en tiempo  $T_0 \iff \exists x_0$  tal que  $\omega_0(x_0) = 0$  y  $(H\omega_0)(x_0) > 0$ .

Schochet [19] fue el primero en añadir un término viscoso al modelo de [30], estudió la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= H(\omega)\omega + k\omega_{xx} \\ \omega(x, 0) &= \omega_0(x) \end{aligned}$$

y demostró que las soluciones se hacen singulares en tiempo  $T_k$  con la sorpresa de que

$$T_k < T_0$$

donde el tiempo  $T_0$  es cuando la solución se hace singular para  $k=0$ .

Nosotros estudiamos la siguiente ecuación de transporte

$$\theta_t + u\theta_x = 0$$

donde  $u = -H\theta$ . Al derivar con respecto a  $x$

$$\theta_{xt} + u\theta_{xx} = H\theta_x \theta_x,$$

se ve la similitud con (3). En las figuras 1 y 2 se representa los perfiles  $\theta_x(x, t)$  y  $\theta(x, t)$  con dato inicial

$$\theta_0(x) = \begin{cases} (1-x^2)^2, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

en nueve tiempos consecutivos.

En [24] demostramos que las soluciones forman una cúspide en tiempo finito. Dado un dato inicial positivo, simétrico con  $\max_x \theta_0 = \theta_0(0)$  y con soporte compacto,  $\theta(x, t)$  permanece positiva, simétrica, soporte contenido en el inicial y  $\|\theta\|_{L^2}(t) \leq \|\theta_0\|_{L^2}$ . Para este tipo de datos, mediante uso de transformadas de Mellin, se obtiene que  $\|\theta_x\|_{L^\infty}$  explota en tiempo finito. Si introducimos un término disipativo en la ecuación:

$$\theta_t + u\theta_x = -\nu\Lambda^\alpha\theta$$

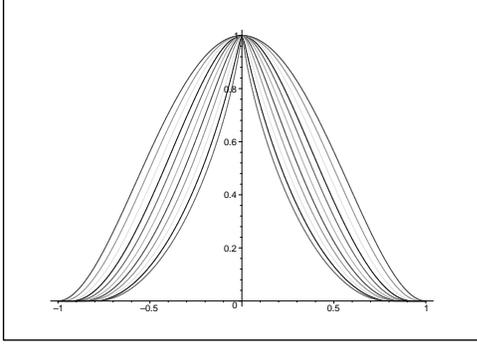


Figure 1:  $\theta(x, t)$

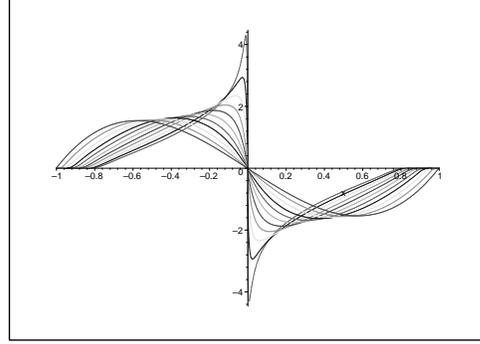


Figure 2:  $\theta_x(x, t)$

donde  $\Lambda$  representa el operador  $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ , obtenemos  $0 \leq \theta(x, t) \leq \|\theta_0\|_{L^\infty}$ ,  $\|\theta\|_{L^2}(t) \leq \|\theta_0\|_{L^2}$ . Así, cuando  $\alpha > 1$ , se obtiene regularidad global, dejando como caso crítico  $\alpha = 1$ , para el que tenemos existencia global cuando  $\|\theta_0\|_{L^\infty} < \nu$ . Por tanto, queda sin resolver que ocurre en el caso crítico si el dato inicial cumple  $\|\theta_0\|_{L^\infty} > \nu$  y el comportamiento de las soluciones en el caso  $0 < \alpha < 1$ .

### Dimensión n=2

En la sección anterior se han estudiado modelos unidimensionales con operadores no-locales que producen singularidades con energía finita. El siguiente paso es poder entender el comportamiento de un fluido que satisface un sistema mixto de operadores no-locales e incompresibilidad. Los siguientes modelos tienen esas dos características:

$$(\partial_t + u \cdot \nabla) \theta = 0 \quad (7)$$

$$u = \nabla^\perp \psi \quad \text{donde} \quad \theta \sim A(\psi).$$

y además tienen la propiedad de que las curvas de nivel de  $\theta$  se mueven con el fluido. El flujo de un fluido depende, en general, de otros factores, tales como la temperatura o la presencia de un campo magnético. Las singularidades pueden explicar la formación de frentes de aire caliente y frío, o en qué condiciones la densidad de corriente diverge en un fluido bajo un campo magnético. Algunos ejemplos de fluidos que satisfacen las ecuaciones (7) son:

1. Cuando la relación entre la función de corriente  $\psi$  y el escalar  $\theta$  está dada por un operador:

- La ecuación de Euler en dimensión n=2,  $\theta$  representa la vorticidad

$$\psi = -(\Delta)^{-1} \theta$$

- La ecuación quasi-geostrófica

$$\psi = -(\Delta)^{-\frac{1}{2}} \theta$$

- La ecuación de Prandtl

$$\psi_{x_1} = \theta$$

2. Cuando la relación entre la función de corriente  $\psi$  y el escalar  $\theta$  está dada por una ecuación de evolución: las ecuaciones magneto-hidrodinámicas, las ecuaciones de Boussinesq, ecuaciones de medios porosos, etc....

De todos estos modelos se desconoce la existencia de singularidades en tiempo finito. En un trabajo numérico reciente [22] hemos encontrado singularidades para una familia de  $\alpha$ -patches que son soluciones, en un sentido débil, de las ecuaciones (7). Estas singularidades tienen la característica de ser estables y autosimilares, y ocurren en un punto del plano en el que la curvatura explota al mismo tiempo que colapsa dos curvas de nivel. Un  $\alpha$ -patch ( $0 < \alpha < 1$ ) consiste en una región en 2D  $\Omega(t)$  (acotada y conexa) que se mueve con una velocidad dada por

$$u(\vec{x}(\gamma, t), t) = \frac{\theta_0}{2\pi} \int_{C(t)} \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial \gamma}(\gamma', t)}{|\vec{x}(\gamma, t) - \vec{x}(\gamma', t)|^\alpha} d\gamma' \quad (8)$$

donde  $\vec{x}(\gamma, t)$  es la posición de  $C(t)$  que es la frontera del dominio  $\Omega(t)$ , parametrizado con  $\gamma$ . La dinámica de la evolución del contorno viene dada por

$$\frac{d\vec{x}(\gamma, t)}{dt} = u(\vec{x}(\gamma, t), t), \quad (9)$$

y son soluciones débiles de la ecuación

$$\begin{aligned} (\partial_t + u \cdot \nabla) \theta &= 0 \\ u &= \nabla^\perp \psi \quad y \quad \theta = -(-\Delta)^{1-\frac{\alpha}{2}} \psi. \end{aligned}$$

El caso límite  $\alpha = 0$  (2D Euler) ha sido estudiado analíticamente con éxito, por Chemin [16] y Bertozzi-Constantin [17], demostrando la existencia global de soluciones. En el caso  $\alpha = 1$  (QG) Jose Luis Rodrigo [18] ha demostrado la existencia local de soluciones.

## References

- [1] Leray, J. “Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l’hydrodynamique”. J. Math Pures Appl. **12**,(1933) 1-82.
- [2] Leray, J. “Sur le mouvement d’un fluide visqueux emplissant l’espace”. Acta Math. **63**, (1934),193-248.
- [3] Shnirelman, A. “On the nonuniqueness of weak solution of the Euler equation”. Comm. Pure Appl. Math. **50** (1997), no. 12, 1261–1286.
- [4] Scheffer, V. “An inviscid flow with compact support in space-time.” J. Geom. Anal. **3** (1993), no. 4, 343–401.

- [5] Scheffer, V. “Hausdorff measure and the Navier-Stokes equations.” *Comm. Math. Phys.* **55** (1977), no. 2, 97–112.
- [6] Klainerman, S. “PDE as a unified subject.” *GAFA 2000* (Tel Aviv, 1999). *Geom. Funct. Anal.* (2000), Special Volume, Part I, 279–315.
- [7] Ladyzhenskaya, O.A. “The mathematical theory of viscous incompressible flow”. Gordon and Breach, London, (1969)
- [8] Serrin, J. “On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations”. *Arch. Rational Mech. Anal.* **9** (1962), 187–195.
- [9] Kozono, H. y Taniuchi, Y. “Bilinear estimates in BMO and the Navier-Stokes equation”. *Math. Z.* **235** (2000), no. 1, 173–194.
- [10] Kozono, H. y Taniuchi, Y. “Limiting case of the Sobolev inequality in BMO, with application to the Euler equations.” *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), no. 1, 191–200.
- [11] Kozono, H., Ogawa, T. y Taniuchi, Y. “The critical Sobolev inequalities in Besov spaces and regularity criterion to some semi-linear evolution equations.” *Math. Z.* **242** (2002), no. 2, 251–278.
- [12] Constantin, P., Fefferman, C. “Direction of vorticity and the problem of global regularity for the Navier-Stokes equations.” *Indiana Univ. Math. J.* **42** (1993), no. 3, 775–789.
- [13] Constantin, P., Fefferman, C. y Majda, A. “Geometric constraints on potentially singular solutions for the 3-D Euler equations” *Comm. Partial Differential Equations* **21** (1996), no. 3-4, 559–571.
- [14] Caffarelli, L, Kohn, R. y Nirenberg, L. “Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations.” *Comm. Pure Appl. Math.* **35** (1982), no. 6, 771–831.
- [15] Lichtenstein, L. “Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener unzusammendrückbarer, reibungsfreier Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze” *Mat Zeit.* , **23** (1925), 89-154; **26** (1927), 193-323, 387-415, 725; **32** (1930), 608
- [16] Chemin, J.Y. Persistence of geometric structures in two-dimensional incompressible fluids. *Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup.* 26 (4): 517–542, 1993.
- [17] Bertozzi, A. y Constantin, P. Global regularity for vortex patches. *Comm. Math. Phys.* 152 (1): 19–28, 1993.
- [18] Rodrigo, J.L. “On the evolution of sharp fronts for the Quasi-geostrophic equation”. *Aceptado en Comm. Pure Appl. Math.*

- [19] Schochet, S. Explicit solutions of the viscous model vorticity equation. *Commun. Pure Appl. Math.* **41** (1986), 531-537.
- [20] Temam, R. “On the Euler equations of incompressible perfect fluids.” *J. Functional Analysis* **20** (1975), no. 1, 32–43.
- [21] Córdoba, D. y Fefferman, C. On the collapse of tubes carried by 3D incompressible flows. *Comm. Math. Phys.*, 222:293-298, 2001.
- [22] Córdoba, D., Fontelos, M., Mancho, A. y Rodrigo, J.L. “Evidence of singularities for a family of counter dynamics equations”, *Preprint*.
- [23] Córdoba, A., Córdoba, D., Fefferman, C. y Fontelos, M. “A geometrical constraint for capillary jet breakup”, *Advances in Math.* 187 (1) (2004), 228-239.
- [24] Córdoba, A., Córdoba, D. y Fontelos, M. “Formation of singularities for a transport equation with nonlocal velocity”, *Preprint*.
- [25] Córdoba, D., Fefferman, C. y de la Llave, R. On squirt singularities in hydrodynamics, *SIAM J. Math Analysis*, (2004).
- [26] Kato, T. “Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in  $R^3$ .” *J. Functional Analysis* **9** (1972), 296–305.
- [27] Wolibner, W. “Un théorème d’existence du mouvement plan d’un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long.” *Mathematische Zeitschrift*, **37**, (1933), 698-726.
- [28] Kato, T. “On classical solutions of the two-dimensional nonstationary Euler equation.” *Arch. Rational Mech. Anal.* **25** 1967 188–200.
- [29] Beale, J.T., Kato, T. y Majda, A. “Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations.” *Comm. Math. Phys.* **94** (1984), no. 1, 61–66.
- [30] Constantin, P., Lax, P. y Majda, A. “A simple one-dimensional model for the three-dimensional vorticity equation.” *Comm. Pure Appl. Math.* **38** (1985), no. 6, 715–724.
- [31] Rayleigh, Lord (J.W. Strutt). On the instability of jets. *Proc. Lond. Math. Soc.* **10** (1879), 4-13.
- [32] F. Savart. Mémoire sur la Constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi. *Ann. Chim. Phys.* 53, **337** (1833), 337-386.