TEORIA DE REPRESENTACIONES DE GRUPOS FINITOS: PROBLEMAS LOCALES

Gabriel Navarro
Facultat de Matemàtiques
Universitat de València
Burjassot, València 46100
SPAIN

E-mail: gabriel.navarro@uv.es

1. Introducción.

Después de la clasificación de los grupos finitos simples, gran parte de los problemas más relevantes en teoría de grupos finitos están centrados en decidir si determinados invariantes de un grupo finito pueden ser calculados localmente. Nadie tiene una idea exacta de por qué las conjeturas de J. Alperin, M. Broué, R. Brauer, E. Dade, J. McKay (y otros) son ciertas.

Como en otras partes de las Matemáticas, la teoría de grupos finitos tiene ideas locales y globales que deben ser relacionadas. La teoría local de grupos finitos empieza con un primo p fijo que divide el **orden** $|G|$ de un grupo G. Los **p-subgrupos** Q de G son los subgrupos de orden potencia de p, y los p-subgrupos de **Sylow** de G son aquellos que tienen orden la mayor potencia de p que divide a $|G|$. Necesitamos saber cómo los p-subgrupos "viven" en G, y así consideramos los **subgrupos locales** de G. Estos son los normalizadores de los p-subgrupos $Q > 1$ de G; es decir, los subgrupos de la forma

$$\mathbf{N}_G(Q) = \{g \in G \mid g^{-1}Qg = Q\} \, .$$

La principal idea de la teoría local de grupos finitos es: Cuánto saben sobre G sus subgrupos locales? Cómo la estructura de G se refleja y es reflejada en los subgrupos locales?

2. La Conjetura de McKay.

Por simplicidad, nos vamos a centrar en la conjetura de McKay, aunque las ideas que aquí exponemos pueden aplicarse a las demás conjeturas que mencionamos. Recordamos que una **representación compleja** de un grupo G de **grado** n es un homomorfismo de grupos

$$\mathcal{X} : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \, .$$

El **carácter** de la representación $\mathcal{X}$ (la función traza $\chi : G \to \mathbb{C}$) determina $\mathcal{X}$ salvo *semejanza*. Un carácter χ es **irreducible** si no es suma de otros dos.

Estamos interesados en el conjunto $\mathrm{Irr}_{p'}(G)$ de los caracteres irreducibles $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ de grado no divisible por p, y nuestro objetivo es contar cuántos hay localmente.

Conjetura de McKay. *Si P es un p-subgrupo de Sylow de G, entonces*

$$|\mathrm{Irr}_{p'}(G)| = |\mathrm{Irr}_{p'}(\mathbf{N}_G(P))| \, .$$

Es decir, el invariante $|\mathrm{Irr}_{p'}(G)|$ puede enteramente ser calculado en el grupo (más sencillo) $\mathbf{N}_G(P)$.

3. Congruencias.

La conjetura de McKay fue formulada en 1972, y no hay ni una sola duda de que es cierta. Como a J. Alperin le gusta decir, si esto fuera Física en lugar de Matemáticas, la conjetura de McKay habría sido simplemente aceptada como verdadera desde hace ya tiempo. Después de casi 30 años desde su formulación, fue quizá extraordinario encontrar algo nuevo en ella. Si p es impar, para todo entero positivo k, contamos

$$M_k(G) = |\{\chi \in \mathrm{Irr}_{p'}(G) \mid \chi(1) \equiv \pm k \bmod p\}| \,.$$

De esta manera, partimos el conjunto $\mathrm{Irr}_{p'}(G)$ en distintos tipos de caracteres. Nosotros (con M. Isaacs) propusimos lo siguiente:

Conjetura de McKay (con congruencias). Para cualquier k, se tiene que

$$M_k(G) = M_k(\mathbf{N}_G(P))\,.$$

Si la conjetura de McKay era ya un misterio, esta observación la hace todavía más atractiva. Nos indica que debe existir una biyección

$$^* : \mathrm{Irr}_{p'}(G) \to \mathrm{Irr}_{p'}(\mathbf{N}_G(P))$$

que satisfaga

$$\chi(1) \equiv \pm\chi^*(1) \bmod p$$

para todo $\chi \in \mathrm{Irr}_{p'}(G)$ (cuando McKay sólo garantiza la existencia de una biyección cualquiera).

4. Automorfismos de Galois.

Pero hay más. Si G es un grupo finito de orden n y $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, R. Brauer probó que χ puede ser originado por una representación

$$\mathcal{X} : G \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{Q}_n)\,,$$

donde $\mathbb{Q}_n$ es el cuerpo ciclotómico n-ésimo. Utilizando este hecho, tenemos que el grupo de Galois $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_n/\mathbb{Q})$ actúa de forma natural sobre $\mathrm{Irr}(G)$.

Intentando hallar otras relaciones entre $\mathrm{Irr}_{p'}(G)$ e $\mathrm{Irr}_{p'}(\mathbf{N}_G(P))$, es bien conocido que no puede existir una biyección

$$^* : \mathrm{Irr}_{p'}(G) \to \mathrm{Irr}_{p'}(\mathbf{N}_G(P))$$

que conmute con la acción de *todos* los elementos de $\mathcal{G}$. Pero no es ésto pedir demasiado? Al fin y al cabo, $\mathcal{G}$ no "sabe" que hay un primo p que debe ser tenido en cuenta. Nuestra preocupación fue encontrar un subgrupo $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ canónicamente asociado con p y a las representaciones de G. Experimentalmente, descubrimos que éste debía ser el **subgrupo de descomposición**, conocido por los especialistas en teoría de números. Este subgrupo es $\mathcal{H} = \{\sigma \in \mathcal{G}$ para los que existe un entero no negativo e tal que $\sigma(\delta) = \delta^{p^e}$ para las raices de la unidad δ de orden no divisible por $p.\}$. Así, debía existir una biyección * que conmutara con la acción de los elementos de $\mathcal{H}$.

Conjetura de McKay (con acción de Galois). *Sea G un grupo finito. Si $\sigma \in \mathcal{H}$, entonces σ fija el mismo número de caracteres en* $\mathrm{Irr}_{p'}(G)$ *que en* $\mathrm{Irr}_{p'}(\mathbf{N}_G(P))$.

Mientras que McKay propone que los conjuntos $\mathrm{Irr}_{p'}(G)$ e $\mathrm{Irr}_{p'}(\mathbf{N}_G(P))$ tienen el mismo cardinal (el caso $\sigma = 1$ de nuestra conjetura), la versión de McKay con acción de Galois predice algo más profundo: que hay una conexión no trivial entre los valores de los caracteres de ambos conjuntos.

5. La Conjetura de McKay en un futuro próximo.

Como es obvio, nuestra principal idea al formular estos refinamientos de la conjetura de McKay es intentar descubrir las claves para demostrarla. Desafortunadamente, a día de hoy, todavía nadie ha dado una explicación del porqué de las congruencias en McKay. La reciente extensión por A. Turull de nuestra conjetura de McKay con Galois ([**11**]), sugiere que debemos estudiar más profundamente las representaciones de los grupos finitos sobre extensiones del anillo de p-ádicos.

Aunque de momento somos algo pesimistas acerca de la posibilidad de encontrar una demostración conceptual de McKay, creemos que va a ser posible demostrar esta conjetura utilizando la clasificación de los grupos finitos simples, y en un futuro próximo. Junto con M. Isaacs y G. Malle, hemos trabajado este proyecto ([**8**]) desde hace dos años. La conjetura de McKay se reduce a un problema sobre las representaciones de los grupos finitos de tipo Lie que creemos que podrá ser finalmente demostrado.

REFERENCIAS

[**1**] J. L. Alperin, The main problem of block theory. Proceedings of the Conference on Finite Groups (Univ. Utah, Park City, Utah, 1975), 341–356. Academic Press, New York, 1976.

[**2**] J. L. Alperin, Weights for finite groups. The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Arcata, Calif., 1986), 369–379, Proc. Sympos. Pure Math., 47, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[**3**] M. Broué, Rickard equivalences and block theory, London Mathematical Society Lecture Note Series 211, 58-79, Cambridge University Press, 1995.

[**4**] E. C. Dade, Counting characters in blocks. I. Invent. Math. **109** (1992), no. 1, 187–10.

[**5**] E. C. Dade, Counting characters in blocks. II. J. Reine Angew. Math. **448** (1994), 97–190.

[**6**] I. M. Isaacs, *Character Theory of Finite Groups*, Dover, New York, 1994.

[**7**] I. M. Isaacs, G. Navarro, New refinements of the McKay conjecture for arbitrary finite groups, Ann. of Math. (2) **156** (2002), no. 1, 333–344.

[8] I. M. Isaacs, G. Malle, G. Navarro, A reduction theorem for the McKay conjecture, preprint.

[9] J. McKay, Irreducible representations of odd degree. J. Algebra **20** (1972), 416–418.

[10] G. Navarro, The McKay conjecture with Galois automorphisms, Ann. of Math. (2) **160** (2004), 1-12.

[11] A. Turull, Strengthening the McKay conjecture to include local fields and local Schur indices, preprint.