Puntos fijos del plano y mínimos del funcional de acción

Rafael Ortega

Dado un homeomorfismo del plano $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y un punto fijo $p = h(p)$, se dirá que p es estable si posee un sistema de entornos invariantes para h. Estos puntos fijos tienen propiedades específicas ligadas a la dimensión. En esta charla me propongo describir algunas de estas propiedades y también el problema de la Mecánica que motivó su estudio. Este consitía en la búsqueda de versiones más precisas de un resultado bien conocido desde finales del siglo XIX: en un sistema lagrangiano con grado y medio de libertad, las soluciones periódicas que se obtienen al minimizar el funcional de acción son inestables en el sentido de Lyapunov.

1. Un problema mecánico

Pensamos en una partícula que se mueve en una recta y cuya posición, $x = x(t)$, cumple una ecuación de Newton

$$m\ddot{x} = F(t, x). \tag{1}$$

La constante m es positiva y la fuerza F es una función periódica en el tiempo,

$$F(t + \tau, x) = F(t, x) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

El periodo τ será fijo.

El Cálculo de Variaciones nos lleva a considerar el funcional de acción asociado

$$\mathcal{A}[x] = \int (T - U)dt, \quad x = x(t),$$

donde T es la energía cinética y U es el potencial. La ecuación de Euler-Lagrange $\delta\mathcal{A} = 0$ es precisamente la ecuación de partida (1). Para dar contenido a esta afirmación hay que especificar un dominio para el funcional. Vamos a considerar la acción periódica

$$\mathcal{A} : X \to \mathbb{R}, \ \ \mathcal{A}[x] = \int_0^\tau \{\frac{1}{2} m\dot{x}(t)^2 - U(t, x(t))\} dt \tag{2}$$

donde

$$U(t,x) = -\int_0^x F(t,\xi) d\xi$$

y $X = H^1(\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z})$ es el espacio de las funciones $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que son absolutamente continuas, τ-periódicas y tales que $\dot{x} \in L^2(]0,\tau[)$.

Los puntos críticos de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'[x] = 0$, coinciden con las soluciones τ-periódicas de (1). En particular, si $\mathcal{A}$ alcanza un mínimo en una función $x_\star \in X$, entonces $x_\star(t)$ es una solución τ-periódica de (1). Véase [9].

Ejemplo: la ecuación del péndulo. El funcional

$$\mathcal{A}[x] = \int_0^\tau \{\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 - 1 + \cos x(t)\} dt$$

es la acción para la ecuación

$$\ddot{x} + \operatorname{sen} x = 0.$$

Observamos que $\mathcal{A}[x] \geq -2\tau$ para cada función $x \in X$. De aquí deducimos que $\mathcal{A}$ alcanza su mínimo en la función constante $x_\star(t) = \pi$. También la constante $x_\natural(t) = 0$ es un punto crítico de $\mathcal{A}$, pero en este caso se trata de un punto de silla y no de un mínimo. A partir de esta discusión observamos que en la ecuación del péndulo el mínimo de la acción se alcanza en una solución inestable. Nos preguntamos si hemos encontrado un hecho específico del péndulo o una propiedad general.

Problema: *dado un funcional $\mathcal{A}$ definido por (2) y una función $x_\star \in X$ sobre la que $\mathcal{A}$ alcanza un mínimo, pruébese que $x_\star(t)$ es inestable como solución de (1).*

El capítulo 17 del libro de Caratheodory sobre Cálculo de Variaciones [4] está dedicado al problema de minimización periódica; en la página 338[1]hay un resultado que puede ser reformulado en los siguientes términos:

Si la derivada segunda $\mathcal{A}''[x_\star]$ es una forma cuadrática definida positiva, entonces $x_\star(t)$ es inestable.

[1]También se puede consultar el apéndice al capítulo 2 del libro [9].

Este resultado permite resolver nuestro problema en casi todos los casos, pues lo más frecuente es que en un mínimo la derivada segunda sea definida positiva. No obstante hay casos en los que $\mathcal{A}''[x_\star]$ es sólo semi-definida positiva y entonces el resultado de Caratheodory no se aplica. Un ejemplo es el funcional

$$\mathcal{A}[x] = \int_0^\tau \{\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{4}x(t)^4\}dt,$$

que alcanza un mínimo en $x_\star = 0$. En este caso

$$\mathcal{A}''[x_\star]\phi = \int_0^\tau \dot{\phi}(t)^2 dt$$

se anula en las funciones $\phi = constante$.

En las discusiones anteriores falta precisión: ¿qué regularidad se le supone a F? ¿son los mínimos locales o globales? ¿qué noción de estabilidad se está empleando?

Conviene contestar ahora a la tercera pregunta. La solución $x_\star(t)$ de (1) se dice estable para el futuro si, dado $\varepsilon > 0$, es posible encontrar $\delta > 0$ de modo que si $x(t)$ es otra solución que cumple

$$|x(0) - x_\star(0)| + |\dot{x}(0) - \dot{x}_\star(0)| \le \delta,$$

entonces $x(t)$ está definida en $[0, \infty[$ y

$$|x(t) - x_\star(t)| + |\dot{x}(t) - \dot{x}_\star(t)| \le \varepsilon,\ t \in [0, \infty[.$$

La estabilidad para el pasado se obtiene al cambiar el intervalo $[0, \infty[$ por $]-\infty, 0]$. La estabilidad es perpetua si lo es para el pasado y para el futuro. Para ecuaciones diferenciales arbitrarias disponemos así de tres definiciones distintas de estabilidad. La ecuación (1) tiene estructura hamiltoniana y para ella estas tres nociones acaban siendo equivalentes.

2. De la ecuación de Newton a los homeomorfismos del plano

Escribimos (1) como un sistema de primer orden

$$\dot{x} = v, \quad m\dot{v} = F(t, x) \tag{3}$$

y suponemos que se han impuesto las condiciones habituales que garantizan la unicidad y existencia local para el problema de Cauchy. Como la ecuación es τ-periódica definimos la transformación del plano

$$h : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad p = (x(0), v(0)) \mapsto h(p) = (x(\tau), v(\tau)),$$

donde $(x(t), v(t))$ es una solución de (3).

La transformación h es la aplicación de Poincaré asociada a la ecuación. La teoría clásica para el problema de Cauchy nos dice que $\mathcal{D}$ es abierto y h es un homeomorfismo entre $\mathcal{D}$ y su imagen $h(\mathcal{D})$. También se puede probar que h conserva la orientación; si variamos el tiempo entre $t = 0$ y $t = \tau$, la aplicación

$$p = (x(0), v(0)) \mapsto h_t(p) = (x(t), v(t))$$

define una isotopía entre la identidad y $h_\tau = h$.

El estudio de la ecuación diferencial (3) nos conduce a la ecuación en diferencias

$$p_{n+1} = h(p_n)$$

o, si se prefiere, al estudio de las órbitas del homeomorfismo h. Dada una solución τ-periódica $x_\star(t)$ de la ecuación diferencial, la condición inicial $p_\star = (x_\star(0), \dot{x}_\star(0))$ es un punto fijo de h. Es posible probar (véase [13], §25) que la estabilidad de $x_\star(t)$ es equivalente a la existencia de un sistema de entornos de $p_\star$ que son invariantes para h. De esta manera el estudio de la estabilidad se convierte en una cuestión puramente topológica.

3. Estabilidad e índice de puntos fijos

En esta sección nos olvidamos de las ecuaciones diferenciales y las aplicaciones de Poincaré. Nuestro ambiente de trabajo será una transformación abstracta

$$h : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \ p_1 = h(p)$$

definida sobre algún abierto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ y tal que h sea un homeomorfismo entre $\mathcal{D}$ y $h(\mathcal{D})$. Dado un punto fijo $p_\star = h(p_\star)$ en $\mathcal{D}$, diremos que $p_\star$ es estable si existe una familia $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de abiertos de $\mathbb{R}^2$ que cumplen

$$\cap_n \mathcal{U}_n = \{p_\star\}, \ \ \mathcal{U}_n \subset \mathcal{D}, \ \ h(\mathcal{U}_n) \subset \mathcal{U}_n.$$

Hemos definido así la estabilidad para el futuro, la estabilidad para el pasado se obtiene al intercambiar h y su inversa.

Supongamos ahora que $p_\star$ es aislado como punto fijo de h, entonces es posible definir el índice de punto fijo

$$i[h, p_\star] \in \mathbb{Z}.$$

Hay muchos caminos que llevan a la construcción de este índice; si se parte del grado de Brouwer en el plano se encuentra la identidad

$$i[h, p_\star] = deg(I - h, \mathcal{U}, 0),$$

donde $\mathcal{U}$ es un entorno abierto y pequeño de $p_\star$.

Teorema 1. *Se supone que h conserva la orientación y $p_\star$ es un punto fijo aislado y estable. Entonces*

$$i[h, p_\star] = 1.$$

El lector puede usar su método favorito para el cálculo de índices y comprobar el resultado para algunas transformaciones, por ejemplo para las contracciones y las rotaciones. En ocasiones los puntos fijos inestables también tienen índice uno, esto ocurre con las dilataciones y con algunos puntos de silla.

La versión del teorema para sistemas dinámicos continuos ($h \to$ flujo, $p_\star \to$ equilibrio) tiene una demostración bastante elemental basada en el Teorema de Poincaré-Bendixon. En el trabajo [5], Dancer y yo dimos una prueba para el caso discreto. En ella hacíamos uso del Lema de Traslación de Arcos y por eso se requería que el homeomorfismo conservase la orientación. Este Lema, debido a Brouwer, tiene una larga historia y varias demostraciones, todas ellas muy intuitivas pero delicadas (véase [6]). Nosotros empleamos la prueba que presentó Brown en los años ochenta [3]. En realidad usamos una pequeña modificación, porque los resultados en este campo se suelen enunciar para homeomorfismos globales pero las aplicaciones a las ecuaciones diferenciales suelen requerir el caso más general de una inmersión. En los últimos años han aparecido bastantes artículos y monografías sobre el índice de punto fijo en el plano; en un artículo muy reciente [12] Ruiz del Portal ha probado que el resultado sigue siendo válido cuando h invierte la orientación. La demostración usa una bella técnica debida a Pérez Marco. En dimensiones superiores hay difeomorfismos con puntos fijos estables de cualquier índice. Sobre esta cuestión se puede consultar el trabajo de Bonatti y Villadelprat [2] y las referencias citadas en ese artículo.

4. Más sobre los mínimos de la acción

Volvemos al problema de la Sección 1. Se parte de un campo de fuerzas F continuo y para el que hay unicidad del problema de Cauchy asociado a la ecuación (1). El funcional $\mathcal{A}$ alcanza un mínimo local en $x_\star \in X$ y se supone además que $x_\star$ es aislado como punto crítico; es decir,

$$(\mathbf{H}) \qquad \mathcal{A}'[x] \neq 0 \quad \text{si } 0 < ||x - x_\star||_X < \delta$$

para algún $\delta > 0$. En estas condiciones se deduce que $x_\star$ es una solución τ-periódica de (1) y su condición inicial $p_\star = (x_\star(0), \dot{x}_\star(0))$ es un punto fijo aislado de h, la aplicación de Poincaré. En el libro de Krasnoselskii y Zabreiko [8] se discuten algunas conexiones entre la teoría de grado y la teoría de puntos críticos. De ahí se puede deducir que para nuestro mínimo el índice $i[h, p_\star]$ vale -1. Hemos probado que $x_\star$ es inestable gracias al Teorema de la Sección anterior.

El resultado conseguido no es satisfactorio. Al igual que ocurría con el resultado de Cartheodory de la Sección 1, hemos impuesto una hipótesis (**H**) que se cumple casi siempre, pero que es muy difícil de verificar en casos concretos. Fijemos como piedra de toque uno de los primeros resultados globales sobre existencia de soluciones periódicas. En el año 1922 Hamel probó en [7] que la ecuación del péndulo forzado

$$\ddot{x} + a \operatorname{sen} x = b \operatorname{sen} t$$

admite al menos una solución 2π-periódica. Hay que observar que en este resultado no hay parámetros pequeños, a y b son constantes arbitrarias. La demostración de Hamel consiste en mostrar que la acción alcanza un mínimo global. Cuando b es grande no se sabe si se cumple (**H**) y nos preguntamos si es posible probar por otra vía que las soluciones de Hamel son siempre inestables. Para contestar a esta pregunta recurriremos a dos propiedades de la aplicación de Poincaré:
h conserva áreas, consecuencia del Teorema de Liouville para Sistemas Hamiltonianos, que se aplica a (3)
h es analítica real si F lo es, consecuencia del Teorema de diferenciabilidad con respecto a condiciones iniciales.

5. Transformaciones que conservan áreas

Volvemos al mundo de las transformaciones abstractas y consideramos la aplicación analítica real

$$h : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{D} \text{ abierto},$$

que cumple

$$\det h'(p) = 1 \quad \text{para cada } p \in \mathcal{D}$$

y que tiene un punto fijo

$$p_\star \in \mathcal{D}, \quad h(p_\star) = p_\star.$$

Podemos aplicar el Teorema de la Función Inversa y restringir h a un subdominio donde sea un difeomorfismo sobre su imagen. Tomamos esta precaución para que las discusiones de la Sección 3 sigan siendo válidas.

Teorema 2. *Se supone que h no es la identidad y que $p_\star$ es estable. Entonces $p_\star$ es un punto fijo aislado de h.*

Veamos un ejemplo que muestra que la estabilidad de $p_\star$ es esencial para el resultado. El difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$

$$h(x, y) = (x + y, y)$$

conserva áreas. Para entender su dinámica observamos que tiene un continuo de puntos fijos, $y = 0$, mientras que las restantes órbitas cumplen $y_n = constante$, $|x_n| \to \infty$ si $|n| \to \infty$. De aquí se sigue que todos los puntos fijos son inestables. Para mostrar que la dimensión juega un papel en el resultado pensamos en las rotaciones de $\mathbb{R}^3$. Son transformaciones que conservan volúmenes y orientación y tienen un continuo de puntos fijos estables (el eje de rotación). El Teorema 2 fue enunciado y probado en [10]. La demostración combinaba resultados muy clásicos sobre la estructura local del conjunto de ceros de una función analítica en dos variables y el siguiente Teorema de Punto Fijo:

Sea $D = \{p \in \mathbb{R}^2 / \ ||p|| < 1\}$ y $f : D \to D$ un homeomorfismo que conserva áreas y orientación. Entonces f tiene un punto fijo.

Este resultado pareciera derivarse del Teorema de Punto Fijo de Brouwer, no es así porque el disco D es abierto. La demostración es casi inmediata si se combinan el Lema de Traslación de Arcos[2] y el Teorema de Recurrencia de Poincaré. En el artículo de Alpern [1] se encuentra más información sobre este curioso Teorema.

Volvemos al Teorema 2 y observamos que ahora podemos probar la inestabilidad de los mínimos de la acción en el caso de ecuaciones analíticas. Seguimos la notación de la Sección 1 y suponemos que F es analítica real y $x_\star \in X$ un mínimo local de $\mathcal{A}$. Si $x_\star$ es aislado sabemos que $i[h, p_\star] = -1$ y podemos aplicar el Teorema 1. Si $x_\star$ no es aislado aplicamos el Teorema 2. En particular las soluciones de Hamel para el péndulo forzado son inestables.

6. Punto y seguido

Los Teoremas 1 y 2 tienen otras consecuencias en el área de las ecuaciones diferenciales. En [5] y [10] hay aplicaciones al método de sub y super soluciones, a las ecuaciones forzadas de Duffing y del péndulo y a los sistemas de presa y depredador.

[2]No es sorprendente que este Lema aparezca de nuevo, es una herramienta básica en la dinámica discreta en dos dimensiones.

Hace poco tiempo encontré una técnica alternativa para tratar el problema de los mínimos de la acción, sin usar los Teoremas 1 y 2. Se trata de un método más analítico que combina ideas que aparecen en el libro de Carathéodory ya mencionado, y debidas a Razmadzé, con un cambio de variables inspirado por una Forma Normal obtenida por Simó en [14].

Ignoro la solución al problema planteado en la Sección 1 cuando F no es analítica y $x_\star$ no es aislado.

Referencias

[1] S. Alpern, Area-preserving homeomorphisms of the open disk without fixed points. Proc. Am. Math. Soc. 103 (1988) 624-626.

[2] C. Bonatti, J. Villadelprat, The index of stable critical points, Topology Appl. 126 (2002) 263-271.

[3] M. Brown, A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs, Houston Math. J. 10 (1984) 35-41.

[4] C. Carathéodory, Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order, Chelsea Pub., New York 1982.

[5] E.N. Dancer, R. Ortega, The index of Lyapunov stable fixed points in two dimensions, J. Dynam. Diff. Equs. 6 (1994) 631-637.

[6] L. Guillou, Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré-Birkhoff, Topology 33 (1994) 331-351.

[7] G. Hamel, Ueber erzwungene Schingungen bei endlischen Amplituden, Math. Ann. 86 (1922) 1-13.

[8] M.A. Krasnoselskii, P.P. Zabreiko, Geometrical Methods of Nonlinear Analysis, Springer-Verlag, Berlin 1984.

[9] J. Moser, Selected Chapters in the Calculus of Variations, Birkhäuser Verlag, Basel 2003.

[10] R. Ortega, The number of stable periodic solutions of time-dependent Hamiltonian systems with one degree of freedom, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 18 (1998) 1007-1018.

[11] R. Ortega, Instability of periodic solutions obtained by minimization, en The first sixty years of Nonlinear Analysis of Jean Mawhin, páginas 189-197, World Scientific, Singapore 2004.

[12] F.R. Ruiz del Portal, Planar isolated and stable fixed points have index $= 1$, J. Diff. Equs. 199 (2004) 179-188.

[13] C.L. Siegel, J.K. Moser, Lectures on Celestial Mechanics, Springer-Verlag, Berlin 1971.

[14] C. Simó, Invariant curves near parabolic points and regions of instability, Lect. Notes in Math. 819 (1980) 418-424.