ANALISIS .

18. Análisis de las combinaciones de respuesta con items dicotómicos.

Ahora que hemos introducido los conceptos elementales podemos entrar a analizar más sistemáticamente las combinaciones de respuestas que pueden darse con items dicotómicos y su ajuste o no al patrón correspondiente.

En las tablas siguientes se analiza la situación para escalas de 2, 3, 4 y 5 items dicotómicos, pudiendo extenderse las conclusiones extraídas y el modo de análisis a escalas de mayor número de items.

Las columnas de esas tablas tienen los siguientes significados:

TOTAL = Se refiere a la puntuación total, que es igual al número de items acertados o aceptados por el sujeto que contesta. A cada total le corresponde un patrón de respuesta, siguiendo el principio que genera una escala Guttman según el cual aceptar o acertar un ítem supone haber aceptado o acertado todos los anteriores.

PATRON = Refleja el Patrón de Escala que corresponde a ese total, indicando con un signo "+" los items aceptados o acertados (siempre los primeros, si los hay) y con un signo "-" los items no acertados o no aceptados (siempre los últimos en un patrón, si es que los hay).

NCR = La abreviatura NCR significa, como ya expusimos anteriormente, Número de Combinaciones de Respuesta posibles. En las tablas en esta columna se detallan todas las combinaciones de respuesta posibles (ajustadas al patrón y no ajustadas al patrón) que pueden formarse para cada Total. Todas las combinaciones de respuestas que aparecen en una misma celdilla tienen el mismo número de respuestas acertadas o aceptadas (de signos +) y por tanto, corresponden a un mismo total. Todas las combinaciones de respuesta que tienen un mismo total han de compararse con el patrón correspondiente a ese total a efectos de calcular el número de errores E.

E = Es el número de errores. En esta columna se refleja el número de errores que tiene cada combinación de respuestas. La combinación de respuestas que coincide con el patrón tiene 0 errores. El número de errores sólo puede ser 0 o cifra par, como puede observarse en las tablas. Ello es debido a que, fijado un total que determina el patrón con el que comparar, un error no es sino la ubicación inadecuada de un signo + (ó -), lo que implica necesariamente la ubicación inadecuada de otro signo - (ó +).

NCE = Es el Número de Combinaciones con Error. En esta columna se va contabilizando el número de combinaciones que presentan un mismo número de errores.

TCE = Es la suma total de Combinaciones con Error. Acumula los totales parciales de Combinaciones con Error contabilizados en la columna NCE.

EMA = Es el Error MAximo que puede producirse para cada patrón de respuesta. Recoge el valor de E más grande que ha aparecido para ese patrón.

MM = Es el Marginal Mínimo. En cada patrón hay un número de signos + (Desde 0 hasta tantos como items tenga la prueba) y un número de signos - (Desde 0 hasta tantos como tenga la prueba). El MM es aquel número de estos dos que resulte menor. Por ejemplo, en el patrón + - - -, el número de + es el menor de modo que el MM es ese número MM = 1; en el patrón + + + - - el número de - es menor que el de + de modo que el número de - es el marginal mínimo MM = 2. Cada patrón tiene un marginal mínimo.

Análisis de las combinaciones de respuesta a una escala de 2 items dicotómicos.

TOTAL	PATRON	NCR	E	NCE	TCE	EMA	MM
0	- -	- -	0	0	0	0	0
1	+ -	+ -	0	0			
		- +	2	1	1	2	1
2	+ +	+ +	0	0	0	0	0

Análisis de las combinaciones de respuesta a un escala de 3 items dicotómicos.

TOTAL	PATRON	NCR	E	NCE	TCE	EMA	MM
0	- - -	- - -	0	0	0	0	0
1	+ - -	+ - - - + - - - +	0 2 2	0 2	 2	 2	 1
2	+ + -	+ + - + - + - + +	0 2 2	0 2	0 2	 2	 1
3	+ + +	+ + +	0	0	0	0	0

Análisis de las combinaciones de respuesta a un escala de 4 items dicotómicos.

TOTAL	PATRON	NCR	E	NCE	TCE	EMA	MM
0	- - - -	- - - -	0	0	0	0	0
1	+ - - -	+ - - -	0	0			
		- + - -	2				
		- - + -	2				
		- - - +	2	3	3	2	1
2	+ + - -	+ + - -	0	0			
		+ - + -	2				
		+ - - +	2				
		- + + -	2				
		- + - +	2	4			
		- - + +	4	1	5	4	2
3	+ + + -	+ + + -	0	0			
		+ + - +	2				
		+ - + +	2				
		- + + +	2	3	3	2	1
4	+ + + +	+ + + +	0	0	0	0	0

Análisis de las combinaciones de respuesta a un escala de 5 items dicotómicos.

TOTAL	PATRON	NCR	E	NCE	TCE	EMA	MM
0	- - - - -	- - - - -	0	0	0	0	0
1	+ - - - -	+ - - - -	0	0			
		- + - - -	2				
		- - + - -	2				
		- - - + -	2				
		- - - - +	2	4	4	2	1
2	+ + - - -	+ + - - -	0	0			
		+ - + - -	2				
		+ - - + -	2				
		+ - - - +	2				
		- + + - -	2				
		- + - + -	2				
		- + - - +	2	6			
		- - + + -	4				
		- - + - +	4				
		- - - + +	4	3	9	4	2
3	+ + + - -	+ + + - -	0	0			
		+ + - + -	2				
		+ + - - +	2				
		+ - + + -	2				
		+ - + - +	2				
		- + + + -	2				
		- + + - +	2	6			
		+ - - + +	4				
		- + - + +	4				
		- - + + +	4	3	9	4	2
4	+ + + + -	+ + + + -	0	0			
		+ + + - +	2				
		+ + - + +	2				
		+ - + + +	2				
		- + + + +	2	4	4	2	1
5	+ + + + +	+ + + + +	0	0	0	0	0

Las tablas anteriores merecen una consideración atenta para descubrir algunas regularidades importantes que esclarecen el modo en que opera un escalograma.

Las escalas de Guttman bien ajustadas suelen tener relativamente pocos items, cuidadosamente escogidos en el proceso de elaboración para cumplir con los principios estrictos de un escalograma. A diferencia de los modelos de escalamiento probabilistas que hemos visto en capítulos anteriores, donde no es raro ver instrumentos de medida con 25, 30 o incluso 50 items, los escalogramas de Guttman suelen tener un número de items más reducido.

19. La relación entre MM y EMA

La importancia del concepto de marginal mínimo (MM) es que el error máximo (EMA) que se puede cometer bajo un patrón determinado, es decir, fijado un total, depende únicamente del marginal mínimo.

Como puede verse en la tabla siguiente, el error máximo es siempre el doble del marginal mínimo.

$$\text{EMA} = 2\ \text{MM} \qquad (19)$$

Esta propiedad es muy interesante a la hora de considerar cuánto error puede aparecer por azar en una masa de datos.

> Existe una razón lógica para esta igualdad. Fijado un total queda determinado un patrón. A partir de ese punto un error de escala no es más que la incorrecta ubicación de una respuesta. Como ya vimos, los errores de escala son necesariamente 0 o cifra par, debido a que cuando se coloca una respuesta x en un sitio que no le corresponde z ello significa necesariamente que aquella respuesta que debía ocupar ese sitio z ha ido a parar al lugar que debía ocupar x. Al ser un error una mala ubicación necesariamente afecta a dos lugares o a dos respuestas. Pues bien, si tenemos n respuestas con dos modalidades, una más abundante y otra menos abundante cuya cantidad representamos por MM, el peor modo en que podemos disponer los datos es colocar las MM respuestas del tipo menos frecuente en lugares que deberían corresponder a las del tipo más frecuente. Al colocar MM respuestas fuera de su sitio,

como todo error afecta a dos respuestas, tendremos un número total de errores igual a 2 veces MM.

Podría pensarse que con n respuestas con dos modalidades, una más frecuente y otra menos frecuente, lo peor que se podría hacer para incumplir el patrón correspondiente es colocar mal todas las respuestas de la categoría más frecuente. ¡Pero ello no es posible! No hay tantos sitios determinados de la categoría menos frecuente donde ubicar mal las respuestas más frecuentes. Por eso el límite del número de errores viene dado por la mala ubicación de todas las MM respuestas de la categoría menos frecuente, que al colocarlas mal se ubican en lugares correspondientes a respuestas de la categoría más frecuente provocando un total de 2MM errores de escala.

Si ambas categorías de respuesta tienen el mismo número de respuestas, entonces es posible colocar todas las respuestas mal. Por ejemplo, si tenemos 6 items y tenemos 3 aceptaciones (que deberían ser las primeras según el patrón) y 3 no aceptaciones, podemos colocar mal todas las respuestas, poniendo las no aceptaciones las primeras y las aceptaciones las últimas. Por eso en ese caso la frecuencia de cualquiera de las categorías se considera igual al MM.

n	+	-	MM	EMA
2	0	2	0	0
	1	1	1	2
	2	0	0	0
3	0	3	0	0
	1	2	1	2
	2	1	1	2
	3	0	0	0
4	0	4	0	0
	1	3	1	2
	2	2	2	4
	3	1	1	2
	4	0	0	0
5	0	5	0	0
	1	4	1	2
	2	3	2	4
	3	2	2	4
	4	1	1	2
	5	0	0	0
6	0	6	0	0
	1	5	1	2
	2	4	2	4
	3	3	3	6
	4	2	2	4
	5	1	1	2
	6	0	0	0
...				

En la tabla anterior se puede apreciar claramente como el error máximo (EMA) que se puede cometer en una combinación de respuestas es siempre función del marginal mínimo (MM). Es decir, es función del número de respuestas + ó - que menos haya.

Por supuesto, si el error máximo (EMA) depende únicamente del marginal mínimo (MM), el Acierto MInimo (AMI), que es el concepto complementario al de EMA, también depende del MM.

En efecto, si definimos el acierto mínimo (AMI) como:

$$AMI = n - EMA \quad (20)$$

tendremos que:

$$EMA = n - AMI \quad (21)$$

y sustituyendo en (12) obtendremos:

$$AMI = n - 2MM \quad (22)$$

De este modo puede apreciarse que en función del número de items n y del marginal mínimo MM queda fijado exactamente un número de aciertos mínimo AMI. Para un n y un marginal mínimo dados no se pueden obtener menos aciertos de escala de los que expresa la igualdad (22). AMI es el número de aciertos de escala mínimo que es posible obtener dado un marginal mínimo para n estímulos. Con n items y un marginal mínimo igual a MM no es posible disponer los datos de forma que aparezcan menos aciertos de escala de los que expresa AMI en la fórmula anterior.

Hemos definido el marginal mínimo MM como la frecuencia de la categoría de respuestas menos frecuente. El concepto complementario al de marginal mínimo es el de marginal máximo. El Marginal MAximo es la frecuencia de la categoría de respuestas más frecuente. Definidos ambos conceptos para una combinación de respuestas a n items tenemos que:

$$MMA = n - MM \quad (23)$$

de donde es inmediato:

$$MM = n - MMA \quad (24)$$

La definición de MMA y las igualdades (23) y (24) nos permiten reescribir las fórmulas anteriores en función de MMA.

La relación entre el marginal mínimo MM y el error máximo EMA venía expresado por (19), sustituyendo obtenemos:

$$EMA = 2\,(n - MMA) \qquad (25)$$

La relación entre el marginal mínimo MM y el acierto mínimo AMI venía expresada por (22), sustituyendo obtenemos:

$$AMI = n - 2(n - MMA)$$

$$AMI = 2MMA - n \qquad (26)$$

Esta aproximación pone de manifiesto cómo la proporción de aciertos de escala (CR) de unos datos debería considerar que hay un mínimo de aciertos de escala que inevitablemente se producen para cada valor de n y de MM. Es decir, existe un Coeficiente de Reproductibilidad MInimo (CRMI) que depende del MM.

20. Relación entre MM y el CRMIs.

El Coeficiente de Reproductibilidad MInimo (CRMI) puede definirse, como sucedía con el coeficiente de reproductibilidad en general, para sujetos, para items, para el total de datos de una muestra y para cualquier subconjunto de los mismos. El CRMI es un caso particular del CR, es el CR calculado a partir del número de aciertos mínimo (AMI).

Para un sujeto, es decir, para cualquier combinación de respuestas, puede definirse el CRMIs como:

$$CRMIs = AMI/n \qquad (27)$$

Como a su vez AMI = n - 2MM, según (15), entonces podemos escribir:

$$CRMIs = (n - 2MM)/n$$

De donde es inmediato:

$$CRMIs = 1 - 2MM/n \qquad (28)$$

Lo cual pone de manifiesto con toda claridad que el CRMIs depende sólo de n y de los MM.

Como a su vez AMI = 2MMA - n , según (26), entonces sustituyendo en (27) tenemos:

$$CRMIs = (2MMA - n)/n$$

$$CRMIs = 2MMA/n - 1 \qquad (29)$$

Donde se aprecia que se puede expresar el CRMIs en función de los marginales máximos MMA y de n. Por supuesto (28) y (29) son expresiones equivalentes.

Calculemos el valor del CRMIs para los MM que pueden aparecer para los valores de n que venimos considerando.

n	+	-	MM	EMA	AMI	CRMIs
2	0	2	0	0	2	1
	1	1	1	2	0	0
	2	0	0	0	2	1
3	0	3	0	0	3	1
	1	2	1	2	1	0'3333
	2	1	1	2	1	0'3333
	3	0	0	0	3	1
4	0	4	0	0	4	1
	1	3	1	2	2	0'5
	2	2	2	4	0	0
	3	1	1	2	2	0'5
	4	0	0	0	4	1
5	0	5	0	0	5	1
	1	4	1	2	3	0'6
	2	3	2	4	1	0'2
	3	2	2	4	1	0'2
	4	1	1	2	3	0'6
	5	0	0	0	5	1
6	0	6	0	0	6	1
	1	5	1	2	4	0'6667
	2	4	2	4	2	0'3333
	3	3	3	6	0	0
	4	2	2	4	2	0'3333
	5	1	1	2	4	0'6667
	6	0	0	0	6	1
...						

Puede verse en la tabla anterior como el CRMIs varía en función del MM. Reparese en que los marginales "extremos", de 0 ó cercanos a 0, producen CRMIs muy altos. Es decir, por ejemplo, si tenemos una combinación de una escala de 6 items con un marginal mínimo de 0, es imposible materialmente encontrar ningún error de escala en esa combinación. Para una combinación de la misma escala, con una MM de 1 necesariamente habrá 4 respuestas bien colocadas en la combinación, es decir, necesariamente habrá 4 aciertos de escala, lo que significa que necesariamente el coeficiente de reproductibilidad para esa combinación tendrá que ser mayor o igual a 0'6667. En esas condiciones encontrar un CRs de 0'6667 no indica que los datos sean escalables, ése es el peor coeficiente de reproductibilidad posible para una combinación de esas características. Para una combinación con n=6 y MM=1 no hay forma física de construir una combinación con más de 2 errores de escala y menos de 4 aciertos de escala; por tanto no hay forma de encontrar una CRs menor que el CRMIs=0'6667. Para 12 items, con MM=1 no se puede construir una combinación de respuestas con menos de 10 aciertos de escala, de forma que no es posible obtener un CRs menor de 0'8333. Para n=13, con MM=1, el CRMIs=0'8462. Para n=14, con MM=1, tenemos un CRMIs=0'8571; valor que se encuentra por encima del punto crítico arbitrario de 0'85. De ello se desprende, por un lado, que los criterios de escalabilidad mínima sólo se pueden aplicar al CRt y no a los CRs o CRi, y por otro, que conviene estudiar cual es el CRMIt para n items contestados por N sujetos.

21. CRMIs y CRt esperado.

El CRMIs sólo depende de MM y de n, de forma que el cálculo es, como hemos visto, muy sencillo y sólo admite una solución. Hay un sólo CRMIs para cada combinación de n y MM, y para ese n y ese MM es imposible obtener un CRs por debajo del CRMIs.

La cuestión de la elaboración del concepto de CRMIt es más compleja. En una muestra de N sujetos contestando a n items encontraremos diferentes combinaciones de respuesta. Podemos encontrar hasta NCR combinaciones de respuesta, que son todas las posibles con n items. Cada una de ellas tiene un CRs asociado. Algunas corresponden a combinaciones cuyo CRs coincide con el CRMIs correspondiente y otras no. El CRMIt que esperemos depende de los CRs obtenidos para cada combinación de respuestas, y, además, depende de la probabilidad que cada una de esas combinaciones tenga dentro de una muestra de N sujetos.

> Por ejemplo, sabemos que para una escala de 3 items (n=3) podemos encontrar: MM=0 lo que supone CRMIs=1, y MM=1, lo que supone CRMIs=0'3333. Ahora bien ¿cuál es la probabilidad de encontrar un MM=1 en una muestra de N sujetos?; y dentro de las

combinaciones con MM=1, ¿cuál es la probabilidad de encontrar una combinación con CRs=CRMIs? El CRMIt que esperemos dependerá de los CRs de las combinaciones de respuesta posibles y de la probabilidad con que esperemos que aparezca cada una de esas combinaciones. Al depender de probabilidades el CRMIt es él mismo de naturaleza probabilista y no absoluta. Definidas el conjunto de probabilidades con que esperamos un conjunto de CRs, el CRMIt calculado es el CRMIt más probable bajo esas condiciones, pero no es un "mínimo absoluto por debajo del cual es imposible encontrar resultados", por eso en general preferimos hablar del CRt esperado para determinadas condiciones de probabilidad.

Podría definirse un CRMIt absoluto obtenido como el CRMIs más bajo para n items. Este es realmente un límite inferior absoluto para el CRt con n items. Pero esto supone esperar que la probabilidad de aparición de la combinación que da lugar al CRMIs más bajo sea 1 y que la probabilidad de aparición de las restantes NCR - 1 combinaciones sea 0, supuesto inverosímil que carece de interés.

En resumen, para cada n hay un conjunto de NCR combinaciones de respuesta posibles. Cada una de las NCR combinaciones tiene un CRs asociado, obtenido como A/n. A su vez, cada una de las NCR tiene una determinada probabilidad de aparecer en una población o en una muestra de N sujetos. El CRt que esperemos para el total de unos datos dependerá tanto de los CRs de las NCR combinaciones como de las probabilidades de aparición de cada una de las NCR combinaciones.

22. Probabilidad de una combinación de respuesta bajo condiciones de azar.

Si los sujetos contestan al azar entonces para cada respuesta de cada sujeto a cada ítem existirá la misma probabilidad.

$$\mathcal{P}\ (R_{ij} = 0\ ) = 1/2 = 0'5 \qquad (30)$$

$$\mathcal{P}\ (R_{ij} = 1\ ) = 1/2 = 0'5 \qquad (31)$$

Es decir, la probabilidad de que la respuesta del sujeto j al ítem i sea un "no acierto" o una "no aceptación", representada la respuesta de "no acierto" o "no aceptación" por el 0, es 0'5. Y la probabilidad complementaria, de que el sujeto "acierte" o "acepte" el ítem, representada esa respuesta por el 1, es también 0'5. Es decir, si un sujeto j contesta al azar un ítem i, se supone que hay la misma probabilidad de que lo "acepte o acierte" (respuesta 1) que de que "no lo acepte o no lo acierte" (respuesta 0). Como sólo hay dos respuestas posibles cada una de ellas tienen 1/2 de probabilidad de aparecer.

Bajo este supuesto de respuesta al azar, dado que la probabilidad de cada respuesta a cada ítem se considera independiente de la probabilidad de respuesta a otro ítem, puede afirmarse que todas y cada una de las combinaciones respuesta para un número n de items son equiprobables. A continuación justificaremos esta afirmación.

Al ser probabilidades independientes y todas iguales a 0'5, la probabilidad de una combinación de respuestas dada es simplemente una potencia de 0'5. Exactamente 0'5 elevado al número de items n.

Por ejemplo, con dos items (n=2) la probabilidad del patrón:

+ +

es igual a la probabilidad de la primera respuesta por la de la segunda. Es decir, a 0'5 por 0'5. La probabilidad del patrón es:

$$\mathcal{P}\ (P = 2 \mid n=2\ ) = 0'5\ ^2 = 0'25$$

Pero la probabilidad de cualquier otra combinación con dos items también es el producto de 0'5 por 0'5, porque las respuestas + y - son equiprobables.

En resumen, la probabilidad de cualquier combinación de respuesta para items dicotómicos dado n, bajo condiciones de azar es:

$$\mathcal{P}\,(P = x \mid n) = 0'5^{\,n} \qquad (32)$$

La expresión anterior se puede expresar con mayor generalidad para items con v alternativas de respuesta como:

$$\mathcal{P}\,(P = x \mid n) = 1/v^{\,n} \qquad (33)$$

expresando 1/v la equiprobabilidad de las alternativas.

En la tabla siguiente puede verse cual es la probabilidad de cualquier combinación de respuesta para items dicotómicos en función de n, considerando equiprobables las respuestas de "aceptación" y de "no aceptación".

n	$\mathcal{P}$ (P = x| n) = 0'5 ^{n}	NCR= 2 ^{n}	$\mathcal{P}$ (P = x| n) = 1/(2 ^{n})
2	0'5 ^{2} = 0'25	4	1/4 = 0'25
3	0'5 ^{3} = 0'125	8	1/8 = 0'125
4	0'5 ^{4} = 0'0625	16	1/16 = 0'0625
5	0'5 ^{5} = 0'0313	32	1/32 = 0'0313
6	0'5 ^{6} = 0'0156	64	1/64 = 0'0156
7	0'5 ^{7} = 0'0078	128	1/128 = 0'0078
....			

La tabla anterior permite comprobar como, efectivamente, cada una de las combinaciones de respuesta resulta equiprobable. Es decir, si tomamos un sujeto al azar de una muestra suficientemente grande donde los sujetos han contestado al azar los items, tenemos la misma probabilidad de encontrar cualquiera de las NCR combinaciones de respuestas posibles. Por ejemplo, puede leerse en la tabla que para 7 items (n=7), hay 128 combinaciones posibles (NCR=128), y cada una tendría una probabilidad de aparecer de 0'0078.

En efecto, se sigue fácilmente que.

$$\mathcal{P}\ (P = x|\ n\ ) = 1/NCR = \ 1/(2\ ^n) = 1/2^n\ = 0'5\ ^n$$

expresión que enlaza la equiprobabilidad de las combinaciones de respuesta a la equiprobabilidad de las respuestas dentro de cada combinación.

Esta equiprobabilidad de cada combinación posible, dada una escala de n items dicotómicos, es importante porque permite estudiar de un modo sencillo qué sucedería en una muestra suficientemente grande donde los sujetos hubieran contestado los items al azar.

En las tablas de análisis de las combinaciones de respuesta con items dicotómicos, detallamos todas la combinaciones posibles de respuestas para escalas de 2, 3, 4, y 5 items dicotómicos. Ahora sabemos que, dado el número de items de la escala, cada una de esas combinaciones es igual de probable que aparezca bajo respuesta al azar.

Por ejemplo, tomemos una escala de 4 items (n=4), tenemos 16 combinaciones posibles ($NCR=2^n=2^4=16$), exactamente las que detallamos en la tabla de análisis de combinaciones de respuesta para n=4. Pues bien, si esas 16 combinaciones son equiprobables entonces en una muestra suficientemente grande donde los sujetos contestaran al azar, cada una de estas combinaciones tendrá la misma frecuencia. Para una muestra de N sujetos cabe esperar que cada una de esas combinaciones presente una misma frecuencia de N/16 casos.

> En general, para una muestra de N sujetos contestando bajo condiciones de azar para cada una de las NCR combinaciones de respuesta podemos esperar una frecuencia (F) de N/NCR.

$$F= N/NCR \tag{34}$$

Bajo estas condiciones, el conjunto de las 16 combinaciones posibles puede considerarse un modelo adecuado para estudiar que sucedería en la muestra completa. Al tomar el conjunto de las 16 combinaciones como muestra representativa de las N combinaciones de respuesta que darían N sujetos, es como si tomásemos 1 caso representativo de cada uno de los los 16 posibles, que se manifiestan con la misma frecuencia N/16. El conjunto de NCR combinaciones posibles se considera representativo del conjunto de N combinaciones de respuesta donde cada N/NCR pertenecen a uno de los NCR casos posibles. De las conclusiones que extraigamos de esta muestra inferimos el comportamiento de una muestra de N sujetos contestando los items al azar. Por ejemplo, cabe esperar que las proporciones que podamos calcular en el modelo de las 16 combinaciones de respuesta posibles se mantuvieran en la muestra de N sujetos. De este modo queda justificado el estudio del conjunto de combinaciones de respuestas posibles como muestra representativa de una población de N sujetos que contestaran al azar n items.

23. CRt esperado bajo respuesta al azar.

Basándonos en los razonamientos anteriores podemos calcular el coeficiente de reproductibilidad total CRt que podemos esperar si los sujetos contestan al azar n items. El modo más sencillo e intuitivo de hacer esto consiste simplemente en contar el número de aciertos de respuesta que encontramos en cada una de las NCR combinaciones que hay para n items y dividir por el número de respuestas.

Consideremos de nuevo las tablas donde analizábamos las combinaciones de respuesta a n items dicotómicos. Tomemos la tabla para n=2. Allí se detallan todas las combinaciones de respuesta posibles y el número de errores de escala asociados a las mismas, de donde es fácil deducir el número de aciertos de escala asociados a las mismas:

n	Combinación	A	CRi=A/n
2	+ +	2	2/2=1
	+ -	2	1
	- +	0	0
	- -	2	1
Media		1'5	0'75

No hay más combinaciones posibles. Ahora sabemos que si suponemos que los N sujetos contestan al azar, con idéntica probabilidad de aceptar o no aceptar cada ítem, cada una de esas 4 combinaciones es a su vez equiprobable. Siendo esto así, el CRt de los datos puede calcularse como suma de los aciertos de escala de las combinaciones partido por el número total de datos en todas las combinaciones.

CRt = (2 + 2 + 0 + 2)/8 = 0'75.

Al ser las combinaciones equiprobables una muestra suficientemente grande presentaría cada una de las 4 combinaciones con la misma frecuencia, con lo que la proporción de A en el total cabría esperar que se mantuviera idéntica a la calculada.

> Obsérvese que hay otros modos de llegar a ese CRt. En efecto, el CRt es igual a la media de los CRi. Y también es igual a la media de los CRs. Y también es igual a la media de los aciertos dividida por n. Dejamos para el lector la comprobación en los datos y la sencilla demostración de estas afirmaciones.

El CRt que acabamos de calcular puede interpretarse en el sentido de que trabajando con 2 items dicotómicos se puede esperar un 75% de reproductibilidad debida al azar. Si en estas condiciones en los resultados empíricos de una muestra encontramos un CRt=0'75 esa reproductibilidad no puede ser interpretada como fruto del particular ajuste de esos items a un escalograma.

> Adviértase que el punto crítico para averiguar si los items ajustan a la escala está en las combinaciones de total 1. Las combinaciones cuyo MM es 0 no aportan ninguna información acerca de si unos datos ajustan o no, porque para esas combinaciones necesariamente el ajuste es perfecto. En este caso, para las combinaciones de total igual a 1, si encontramos que el 50% de las mismas ajustan al patrón y el otro 50% no, podemos pensar que los items no forman un escalograma, dado que ésa es la proporción que cabe esperar si los sujetos contestan al azar y los items no mantienen ninguna relación entre sí.

Del mismo modo se pueden calcular y estudiar los CRt que cabe esperar en condiciones de respuesta al azar en función de cada n. A partir de las tablas de análisis de las combinaciones de respuesta con n items dicotómicos podemos deducir la siguiente tabla de CRt esperables bajo respuesta al azar.

n	A	E	R	CRt esperable
2	6	2	8	6/8= 0'75
3	16	8	24	16/24= 0'6667
4	40	24	64	40/64= 0'625
5	96	64	160	96/160= 0'60
...				

Si por ejemplo, con 5 items, encontramos un CRt en unos datos de 0'60 podemos considerar claramente que aquellos datos no ajustan a un escalograma, dado que su nivel de correspondencia con un escalograma perfecto, su nivel de "aciertos de escala", no es mayor que el que se hubiera obtenido si los sujetos hubiesen contestado al azar.

24. Probabilidad de un total y probabilidades de error de escala.

A partir de las tablas de análisis de las combinaciones de respuesta, podemos resumir cual es el número de combinaciones de respuesta posibles (NCR_1), el número de patrones (NP) y su complementario, el número de combinaciones con error (NCE) en función del número de items, detallando, además el número de combinaciones de respuesta (NCR_2) que corresponden a cada patrón (P), y, dentro de cada patrón, el número de combinaciones de respuesta (NCR_3) que corresponde a cada número de errores (E).

n	NCR_1	NP	NCE	P	NCR^2	E	NCR_3
2	4	3	1	0	1	0	1
				1	2	0	1
						2	1
				2	1	0	1
3	8	4	4	0	1	0	1
				1	3	0	1
						2	2
				2	3	0	1
						2	2
				3	1	0	1
4	16	5	11	0	1	0	1
				1	4	0	1
						2	3
				2	6	0	1
						2	4
						4	1
				3	4	0	1
						2	3
				4	1	0	1
5	32	6	26	0	1	0	1
				1	5	0	1
						2	4
				2	10	0	1
						2	6
						4	3
				3	10	0	1
						2	6
						4	3
				4	5	0	1
						2	4
				5	1	0	1
...							

La tabla anterior es muy útil porque permite calcular:

1. La probabilidad de encontrar un total determinado para un escalograma de determinado número de items.

2. La probabilidad que hay de encontrar determinado número de errores de escala dado el número de items de la escala.

3. La probabilidad de encontrar determinado número de errores dado el número de items y un total de puntos.

Veamos por partes estas probabilidades y su significado.

25. Probabilidad de encontrar un total dado el número de items.

Si cada una de las combinaciones de respuesta tuvieran la misma probabilidad de aparecer en una muestra (es decir, bajo condición de respuesta al azar de los sujetos), para una escala de dos items hay una probabilidad de 1/4 de encontrar un total 0 (ninguna aceptación o acierto); 2/4 ó 1/2 de encontrar un total de 1 (aceptar o acertar uno de los dos items); y una probabilidad de 1/4 de encontrar un total de 2 (aceptar o acertar ambos items). Es decir, abreviando Total con la letra T podemos escribir:

$$P\ (T=0 \mid n=2) = 1/4 = 0'25$$

$$P\ (T=1 \mid n=2) = 2/4 = 0'5$$

$$P\ (T=2 \mid n=2) = 1/4 = 0'25$$

La primera expresión se lee "La probabilidad de que el Total sea igual a 0 dado que el número de items es igual a 2 es 0'25".

Las probabilidades anteriores serían las que cabría esperar que se cumplieran con una muestra suficientemente grande ($N \rightarrow \infty$) contestando al azar. (Como vimos, bajo respuesta al azar la probabilidad de un + ó un - en cada posición es 0'5, de donde la probabilidad de cada combinación es la misma, por lo que lo que determina la probabilidad de cada total es el número de combinaciones que dan lugar a ese total). Sin embargo, verificar en una muestra probabilidades que ajusten a las anteriores no significa necesariamente que los sujetos hayan contestado al azar. Para un cuestionario determinado se puede calcular la distribución de probabilidad de los totales empíricamente. Ahora bien, desviaciones significativas de las probabilidades teóricas de los totales calculadas bajo el supuesto de respuesta al azar pueden interpretarse en el sentido de que las respuestas de los sujetos no son al azar.

Si los dos items dicotómicos forman un escalograma entonces, de acuerdo con el principio que rige una escala Guttman, las respuestas de los sujetos deben caer sólo en uno de los tres patrones de escala.

Si suponemos que los tres patrones de escala son equiprobables en una población, entonces cada uno de ellos tiene una probabilidad de 1/3.

$$\mathcal{P}\ (P \mid n=2 \text{ y } E=0) = 1/3 = 0'3333$$

Sin embargo, la suposición de que los patrones de escala son equiprobables puede ser completamente infundada para muchos cuestionarios concretos.

En todo caso, si en una muestra un conjunto de items actúan como un escalograma habría que esperar que la frecuencia relativa de las combinaciones de respuesta que contienen error fueran sensiblemente menores que las probabilidades que les corresponden suponiendo respuesta al azar.

Los razonamientos anteriores pueden extenderse fácilmente a escalas de 3 o más items dicotómicos. En la tabla siguiente se detallan las probabilidades que existen, bajo respuesta al azar, de encontrar cada uno de los Totales señalados en la columna t.

n	t	$\mathcal{P}$ (T=t|n)
2	0	1/4=0'25
	1	1/2=0'5
	2	1/4=0'25
3	0	1/8=0'125
	1	0'375
	2	0'375
	4	0'125
4	0	1/16=0'0625
	1	0'25
	2	0'375
	3	0'25
	4	0'0625
5	0	1/32=0'0312
	1	0'1563
	2	0'3125
	3	0'3125
	4	0'1563
	5	0'0312
...		

26. Probabilidad de encontrar una combinación con determinado número de errores de escala dado el número de items.

Si suponemos respuesta al azar, entonces cada una de las combinaciones de respuesta es equiprobable para una escala de un número de items determinado. Bajo ese supuesto, dado que cada combinación lleva asociado un número de errores (E) es posible cuantificar cuantas combinaciones de respuesta (NCR) puede esperarse que presenten un número dado de errores, y, en consecuencia calcular la probabilidad de ese tipo de combinaciones en función del número de combinaciones de respuesta total.

Por ejemplo, con una escala formada por 2 items dicotómicos tendremos:

$$\mathcal{P}\ (E=0 \mid n=2) = 3/4 = 0'75$$

$$\mathcal{P}\ (E=2 \mid n=2) = 1/4 = 0'25$$

La probabilidad de encontrar por azar una combinación con 0 errores es 3/4 dado que de las cuatro combinaciones que pueden darse con dos items, tres de ellas presentan un número 0 de errores. Desde luego esto significa que una escala de 2 items tendría que operar en una muestra real manifiestamente por encima del 75% de combinaciones ajustadas al patrón para que pudiéramos empezar a confiar en su estructura de escalograma. Dicho de otro modo, encontrar que el 75% de los sujetos de una muestra dan combinaciones de respuestas ante dos items dicotómicos que ajustan perfectamente a un patrón de escala no es en absoluto ninguna garantía de que los items estén operando realmente como un escalograma, dado que ése es precisamente el nivel que encontraríamos si los items no mantuvieran ninguna relación y en consecuencia las combinaciones de respuestas de los sujetos pudieran deberse únicamente al azar.

Con una escala formada por 3 items dicotómicos tendremos:

$$\mathcal{P}\ (E=0 \mid n=3) = 4/8 = 0'5$$

$$\mathcal{P}\ (E=2 \mid n=3) = 4/8 = 0'5$$

Es decir, con 3 items dicotómicos está garantizado, si las respuestas son al azar, que un 50% de las combinaciones de respuesta dadas por los sujetos ajusten perfectamente a un patrón de escala. El resto presentará indefectiblemente sólo 2 errores.

Con una escala formada por 4 items tenemos:

$$\mathcal{P}\ (E=0 \mid n=4) = 5/16 = 0'3125$$

$$\mathcal{P}\ (E=2 \mid n=4) = 10/16 = 0'625$$

$$\mathcal{P}\ (E=4 \mid n=4) = 1/16 = 0'0625$$

En este caso puede esperarse que por azar el 31'25% de las combinaciones ajusten a un patrón de escala, que el 62'5% presente 2 errores y que el 6'25% presente 4 errores.

Obsérvese como la *probabilidad de encontrar combinaciones que ajusten a un patrón de escala* es simplemente el número de patrones de escala partido por el número de combinaciones de respuesta totales que se pueden formar:

$$\mathcal{P}\ (E=0) = NP/NCR \qquad (35)$$

Es decir:

$$\mathcal{P}\ (E=0) = (n+1)/v^n \qquad (36)$$

Esta probabilidad es muy importante porque marcará un nivel mínimo contra el que contrastar el ajuste de los datos a un escalograma.

Con un cuestionario formado por 5 items dicotómicos tendremos:

$$\mathcal{P}\ (E=0 \mid n=5) = 6/32 = 0'1875$$

$$\mathcal{P}\ (E=2 \mid n=5) = 20/32 = 0'625$$

$$\mathcal{P}\ (E=4 \mid n=5) = 6/32 = 0'1875$$

Para 6 items dicotómicos el número de combinaciones que se puede esperar que ajusten por azar es:

$$\mathcal{P}\ (E=0 \mid n=6) = NP/NCR = 7/64 = 0'1094$$

Para 7 items dicotómicos ese valor se reduce todavía más:

$$\mathcal{P}\ (E=0 \mid n=7) = NP/NCR = 8/128 = 0'0625$$

Para 8 items dicotómicos:

$$P\ (E=0 \mid n=8) = NP/NCR = 9/256 = 0'0352$$

Para 9 items dicotómicos:

$$P\ (E=0 \mid n=9) = NP/NCR = 10/512 = 0'0195$$

La serie muestra claramente que a partir de 8 ó 9 items el porcentaje de sujetos de una muestra cuya combinación de respuestas coincide con un patrón por azar es muy pequeño. Sin embargo, con escalogramas con 7, 6 o menos items hay que advertir que un porcentaje considerable de las combinaciones de respuesta que coincidan con un patrón de respuesta correcto podrían atribuirse al azar. Desde luego, unos datos deben superar estos valores mínimos de contraste para considerarlos escalables.

Más exactamente, para una escala de n items y una muestra determinada, puede calcularse la probabilidad teórica de encontrar combinaciones que ajusten a algún patrón (tal como hemos ejemplificado) y su complementaria, la probabilidad de encontrar combinaciones de respuestas que no ajusten a ningún patrón. Las frecuencias relativas reales de sujetos cuya combinación de respuestas ajusta a un patrón y de sujetos cuya combinación de respuestas no ajusta a un patrón pueden contrastarse con las probabilidades teóricas utilizando un test χ^2 al nivel a que el investigador juzgue adecuado. Este test es uno de los procedimientos más sencillos, más allá de las orientaciones arbitrarias de Guttman y otros autores acerca de niveles indicativos de algunos índices, para contrastar rigurosamente el ajuste de unos datos reales a un patrón de escalograma. Puede realizarse todavía con más precisión teniendo en cuenta las probabilidades en cada patrón de respuestas. Al parecer fue Goodman (1975) el primero en sugerir esta linea argumental.

27. Probabilidad de encontrar una combinación con determinado número de errores dado el número de items y un total de escala.

Utilizando la tabla de análisis de combinaciones de respuesta correspondiente, los procedimientos anteriores se pueden extender fácilmente para calcular qué probabilidad existe de encontrar una combinación con cierto número de errores dentro de las que tienen un total determinado.

Por ejemplo, con n=5 y un total de 3, presentando 2 errores de escala, podemos esperar encontrar un 18'75% de combinaciones de respuesta.

$$\mathcal{P}\ (E=2 \mid n=5 \text{ y } t=3) = 6/32 = 0'1875.$$

Este tipo de cálculos permite estudiar detalladamente la aparición de ciertas combinaciones de error sistemáticamente. La aparición de determinadas combinaciones de error frecuentemente es un síntoma de que los items no están bien escalados, no forman un escalograma, presentan dificultades de comprensión o interpretación, no son escalables o requieren un tratamiento multidimensional. En un escalograma se espera poco error y, además, que éste sea aleatorio y no esté concentrado en determinadas combinaciones con error.

28. Algunas propiedades de los marginales mínimos.

Por definición, los marginales mínimos MM se refieren a la frecuencia de la respuesta menos frecuente. Esos marginales, y la frecuencia con que aparecen según el número de items n presentan regularidades interesantes.

Veamos primero cómo podemos describir las series de MM según n. Para ello conviene observar en las tablas siguientes los MM en función de n. (Ii es el número de respuestas + que hay en la combinación; IIi el número de -. Cada par de números determinan cada una de las combinaciones de respuesta posibles para cada n. El MM se ha señalado poniendo en **negrita** el número que lo representa).

n=2		n=3		n=4		n=5		n=6		n=7		n=8		...
Ii	IIi	Ii	IIi	Ii	IIi	Ii	IIi	Ii	IIi	Ii	IIi	Ii	IIi	
0	2	**0**	3	**0**	4	**0**	5	**0**	6	**0**	7	**0**	8	
1	1	**1**	2	**1**	3	**1**	4	**1**	5	**1**	6	**1**	7	
2	**0**	2	**1**	**2**	2	**2**	3	**2**	4	**2**	5	**2**	6	
		3	**0**	3	**1**	3	**2**	**3**	3	**3**	4	**3**	5	
				4	**0**	4	**1**	4	**2**	4	**3**	**4**	4	
						5	**0**	5	**1**	5	**2**	5	**3**	
								6	**0**	6	**1**	6	**2**	
										7	**0**	7	**1**	
												8	**0**	

Los MM siguen la serie:

n		incremento:	suma:
2	0 1 0	+1	1
3	0 1 1 0	+1	2
4	0 1 2 1 0	+2	4
5	0 1 2 2 1 0	+2	6
6	0 1 2 3 2 1 0	+3	9
7	0 1 2 3 3 2 1 0	+3	12
8	0 1 2 3 4 3 2 1 0	+4	16
9 ...			

La disposición anterior facilita la comprensión de cómo crece la serie y el "cálculo" de los MM para n items. Es muy fácil deducir cual es el incremento que corresponde a n=9, 10, 11 ... y la suma resultante.

Los MM para un n dado son siempre una serie "simétrica" a sí misma a partir de un punto medio que representa el valor más alto. Podemos formalizar el valor de la suma de los marginales como sigue:

Para n impar: $\Sigma MM_{(n=imp)} = 2\ (\ 1 + 2 + ... + k)$

siendo: $k = (n - 1)/2$

de donde: $\Sigma MM_{(n=imp)} = 2\ (\ 1 + 2 + ... + (n - 1)/2)$

Para n par: $\Sigma MM_{(n=par)} = 2\ (\ 1 + 2 + ... + k) + n/2$

siendo: $k = (n - 2)/2$

de donde: $\Sigma MM_{(n=par)} = 2\ (\ 1 + 2 + ... + (n - 2)/2) + n/2$

Igualdades que permiten el cálculo de la suma de los marginales conocido n.

Ahora bien, las igualdades anteriores contienen la expresión: $1 + 2 + ... + k$. Como es sabido la suma de los k primeros números naturales puede expresarse:

$1 + 2 + ... + k = [k(k+1)]/2$

Sustituyendo en las igualdades anteriores y operando:

Para n impar: $\Sigma MM_{(n=imp)} = 2\ (\ 1 + 2 + ... + k) = 2\ [k(k+1)/2] = k(k+1)$

siendo: $k = (n - 1)/2$

obtenemos: $$\Sigma MM_{(n=imp)} = (n^2 - 1)/4 \qquad (37)$$

Para n par: $\Sigma MM_{(n=par)} = 2(1 + 2 + ... + k) + n/2 = 2[k(k+1)/2]+n/2= k(k+1)+n/2$

siendo: $k = (n-2)/2$

obtenemos: $$\Sigma MM_{(n=par)} = n^2/4 \qquad (38)$$

A su vez, según el valor de n, existe un NCR que presenta cada MM, como puede observarse en la tabla siguiente:

n=2		n=3		n=4		n=5		n=6		n=7	...
MM	NCR	MM	NCR	MM	NCR	MM	NCR	MM	NCR	MM	NCR
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1	7
0	1	1	3	2	6	2	10	2	15	2	21
		0	1	1	4	2	10	3	20	3	35
				0	1	1	5	2	15	3	35
						0	1	1	6	2	21
								0	1	1	7
										0	1

Los NCR asociados a cada MM siguen la serie:

n		suma= 2^n
2	1 2 1	4
3	1 3 3 1	8
4	1 4 6 4 1	16
5	1 5 10 10 5 1	32
6.	1 6 15 20 15 6 1	64
7	1 7 21 35 35 21 7 1	128
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1	256
9 ...		

Que no es otra cosa que el bien conocido Triángulo de Tartaglia, en el que cada elemento puede obtenerse como la suma de los dos que ocupan posiciones inmediatamente encima de él.
Por otra parte en el Triángulo de Tartaglia cada elemento puede calcularse como:

$$\binom{r}{s}$$

siendo r el nº de fila mas 1, y s el de la columna menos 1(contado indistintamente desde la derecha o desde la izquierda). En nuestro caso, r es n.

De la consideración de los análisis puede deducirse una propiedad muy importante:

Podemos calcular la frecuencia NCR de combinaciones de respuesta con n items que tienen el marginal MM simplemente como:

$$NCR_{(n,MM)} = \binom{n}{MM} \tag{39}$$

Esta fórmula es de gran interés, permite obtener cada elemento del triangulo de Tartaglia anterior a partir de n y MM. A partir de ella, bastará saber el número de items n y el marginal mínimo que nos interesa para establecer cuantas combinaciones de respuesta existen con ese marginal

Dada la expresión (39) ahora es posible calcular la suma de los MM ponderada en función del NCR que presenta cada MM

Para n impar

$$\sum MM_{imp} = 2\left(1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \quad + k\binom{n}{k}\right) \tag{40}$$

donde k = (n-1)/2

Para n par

$$\sum MM_{par} = 2\left(1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \quad + k\binom{n}{k}\right) + \frac{n}{2}\binom{n}{k+1} \tag{41}$$

donde k = (n-2)/2

Las fórmulas 40 y 41, para las que se puede encontrar una expresión más sencilla, nos dan la suma de los marginales mínimos de las NCR combinaciones de respuesta posibles que pueden darse con n items.

29. Formalización de la condición de error de Goodenough-Edwards.

Respuestas Tipo I y Tipo II.

Para n items i que admiten dos modalidades de respuesta (Tipo I: Aceptación o acierto o Tipo II: No aceptación o no acierto.)

Definimos:

$$cI = \{\text{respuestas Tipo I}\};$$

$$cII = \{\text{respuestas Tipo II}\};$$

$$cR = \{\text{conjunto total de respuestas}\}$$

Cumpliendo que.

$cI \cup cII = cR$, (usando $\cup$ para simbolizar unión.)

$cI \cap cII = \emptyset$, (usando $\cap$ para simbolizar intersección.)

Por tanto:

Card(cI) = Ii = número de respuestas de aceptación o acierto,

Card(cII) = IIi = número de respuestas de no aceptación o no acierto,

Card(R) = R = número de respuestas dados a los items.

Analizando las combinaciones de respuesta que los sujetos dan a n items tendremos que R = n, que es igual al número de items.

Siendo:

$$\text{Card(cI)} + \text{Card(cII)} = \text{Card(R)},$$

ó bien,

$$\text{Ii} + \text{IIi} = n,$$

como se desprende de las definiciones anteriores.

Errores de Escala y Aciertos de Escala:

Una respuesta puede ser de dos clases:

Un error de escala si no coincide con la predicha por el patrón correspondiente del modelo de escalograma (patrón del mismo total Ii), o un acierto de escala si coincide.

Obsérvese que las palabras error de escala y acierto de escala se usan aquí para significar solamente si una respuesta ajusta o no a un patrón (no significan acertar o fallar un ítem).

Podemos definir:

cE = {Respuestas error de escala}; Card(E) = E

cA = {Respuestas acierto de escala} Card(A) = A

Cumpliendo:

$$A \cup E = R;$$

$$A \cap E = \emptyset.$$

Se desprende que:

$$A + E = R.$$

Como estamos analizando combinaciones de respuesta a n items tenemos que:

$$A + E = n$$

Determinación de un patrón de respuestas correctas por Ii.

Dado Ii (número de respuestas Tipo I) queda determinado un patrón de respuestas.

Dado Ii (número de respuestas Tipo I), entonces:

Sea la combinación de respuestas:

$$r_1, r_2, r_3, \ldots r_i, r_{i+1}, r_{i+2}, \ldots r_n$$

donde:

$$r_1, r_2, r_3, \ldots r_i$$

son respuestas "aceptaciones o aciertos", es decir:

$$r_1, r_2, r_3, \ldots r_i \in cI$$

siempre que i = Ii.

Mientras que:

$$r_{i+1}, r_{i+2}, \ldots r_n \in cII$$

es decir son respuestas de "no aceptación o no acierto", siempre que i = Ii , cualquiera que sea el valor concreto de i.

Obsérvese que:

$$n = A + E$$

$$n = Ii + IIi$$

de donde:

$$A + E = Ii + IIi$$

Definición de error de escala

Dado el conjunto de respuestas ordenadas para un sujeto

$$cR=\{r_1, r_2, \ldots r_i \ldots r_n\}$$

denotaremos por el subíndice i la posición i-ésima en el conjunto de respuestas ordenadas.

Una respuesta r_i queda definida como un acierto si cumple que:

$$r_i \in cA \Leftrightarrow (r_i \in cI \text{ si } Ii \geq i) \text{ o bien } (r_i \in cII \text{ si } Ii < i)$$

Es decir, la respuesta i-ésima será un acierto de escala si sucede una de estas dos situaciones:

a) Es una respuesta Tipo I (aceptación) y ocupa una posición i menor o igual al número total de aceptaciones (Ii), o bien,

b) Es una respuesta Tipo II (no aceptación) y ocupa una posición i mayor que el número total de aceptaciones (Ii).

Si se cumple la condición a ó la b, la respuesta i-ésima será un acierto de escala; en caso contrario será un error de escala.

Formalmente, una respuesta r_i queda definida como un error si cumple que:

$$r_i \in cE \Leftrightarrow (r_i \in cI \text{ si } Ii < i) \text{ o bien } (r_i \in cII \text{ si } Ii \geq i)$$

Es decir, una respuesta i-ésima es un error de escala si sucede una de estas dos circunstancias:

c) Es una respuesta Tipo I (aceptación) colocada en una posición i mayor que el valor Ii que indica el número de respuestas Tipo I.

d) Es una respuesta Tipo II (no aceptación) colocada en una posición i menor que el valor Ii que indica el número de respuesta Tipo I.

Dado que una combinación de respuestas ajusta a un patrón *si y solo si:*

$$\forall r_i \in cI \quad y \quad \forall r_j \in cII, \quad i < j$$

Esta expresión simple refleja la idea central que guía y estructura todo el método de escalograma de Guttman.

30. La técnica Cornell para items politómicos.

La técnica de análisis de escalograma puede aplicarse también a escalas no dicotómicas. Se denomina técnica Cornell a un procedimiento para realizar el análisis de escalogramas en los que los items tienen v alternativas de respuesta (v > 2). (Los items con v > 2 pueden denominarse items politómicos).

Primero, se confecciona el conjunto de items que se desea escalar y se les dota de un conjunto de alternativas. La técnica no requiere que todos los items tengan las mismas alternativas en número ni en enunciado. Las alternativas deben tener un valor numérico asociado (como en una escala Likert).

Se aplican los items a una muestra de sujetos (II.B) y se confecciona una tabla en cuya cabecera se sitúan los items y sus alternativas (una columna para cada alternativa de cada ítem). En las filas se colocan los sujetos. En las celdillas se marca con una cruz la celdilla de la alternativa elegida por cada sujeto para cada ítem.

Se calcula la puntuación total de cada sujeto, como la suma de puntos de las alternativas elegidas (H1; I:1;II:2; III:2; con el valor de la alternativa como valor de escala; propiamente, como en una escala Likert, no hay respuestas Tipo II ó III). Se ordena a los sujetos por su total, de más a menos.

Si los datos son un escalograma perfecto, entonces primero estarán los sujetos que dan la respuesta más alta al ítem 1, después los que dan la segunda respuesta más alta al ítem 1, etc. Respecto al ítem 2 primero aparecerán los que dan la respuesta más alta al mismo, después la segunda más alta, etc. Y así con todos los items.

Con items con varias alternativas todavía es más difícil encontrar un conjunto de datos que ajuste perfectamente a lo esperado. Lo usual será encontrar un número (considerable) de errores de escala. El concepto de error de escala es esencialmente el mismo que con items dicotómicos, aunque de más compleja formalización y tratamiento.

Guttman expuso y utilizó reiteradamente el argumento de que los diferentes hábitos verbales de la gente podían explicar muchos de esos errores de escala. El argumento de los diferentes hábitos verbales se funda en que los anclajes de las alternativas son ambiguos de forma que una persona dirá, por ejemplo, "muy agradable" para la misma sensación donde otra persona diría "agradable".

Si los errores de escala se deben a los hábitos verbales, entonces se puede "manipular" la tabla de datos, básicamente juntando alternativas contiguas en una para reducir los errores. Por este procedimiento de reducir el número de alternativas en algún o algunos items, a la conveniencia del investigador se busca minimizar el error total. El proceso no es inmediato, y es posible que haya que efectuar varias aproximaciones sucesivas, ensayar varias soluciones, antes de disponer de una escala con menos error.

Este modo de proceder ha sido criticado muy reiteradamente por razones obvias. En primer lugar, resulta muy discutible el argumento de los "hábitos verbales", y en todo caso, no se provee de un procedimiento para distinguir los errores de escala debidos a "hábitos verbales" y los debidos a otras razones, como la falta de ajuste de los datos al modelo. En segundo lugar, las manipulaciones tienen un carácter arbitrario y bien poco justificado, se dirigen a eliminar todos los errores de escala -cualquiera que sea su origen- e impiden una evaluación razonable. En tercer lugar, no hay forma de evaluar razonablemente una escala sometida a este proceso. En cuarto lugar, si el investigador cree que un ítem funciona mejor con dos alternativas, por ejemplo, ¿por qué no evaluarlo directamente con dos alternativas en lugar de obtenerlas como fruto de una reordenación ad hoc de los datos? En cualquier caso resulta sorprendente que un modelo de escalamiento de naturaleza determinista haya dado lugar a este tipo de procedimiento.

La técnica Cornell (llamada así por la universidad en que se desarrolló en sus inicios) puede resultar útil para sugerir cambios en escalas y analizar el comportamiento de los sujetos ante las mismas, pero está lejos de ser un método de escalamiento riguroso que permita evaluar si un conjunto de items dicotómicos cumplen un principio de escalograma. Cualquier solución arrojada mediante la técnica Cornell debería ser evaluada empíricamente de modo directo.

Cap. 16. METODO DE ESCALOGRAMA DE GUTTMAN.

ELABORACION DE LA ESCALA.

Generación de items:

1. Elaboración de items de naturaleza acumulativa (De tipo V/F).

Obtención de información para escalar los items:

1. Administrar los items a una muestra de sujetos (Tarea de Respuesta *I.B).*

Obtención de los valores de escala de los items:

1. Disposición de la información obtenida:
   Construcción de una tabla "items por sujetos". (1 para "acuerdos" y 0 para "desacuerdos".)
2. Obtención del total por items (Suma de columnas, a través de sujetos).
3. Obtención del total por sujetos (Suma de filas, a través de items).
4. Reordenar la tabla por totales de items, de más a menos.
   A continuación, también se puede reordenar la tabla por totales de sujetos (Opcional).
5. Los items no tienen un valor de escala particular, en el sentido en que lo tienen en los métodos probabilistas. Aquí cada ítem tiene un lugar en el escalograma que indica su posición en la escala acumulativa.

Valoración y selección de items:

1. Aplicación del método de conteo de errores de Goodenough-Edwards:
   Señalar en la matriz de datos (p.e. mediante asteriscos) los errores, o diferencias con el patrón de escala de cada sujeto . El *patrón de escala* x, aplicable a un sujeto que tiene un total x, supone que el sujeto debería haber aceptado los primeros x items (1) y rechazado los restantes (0). Cada diferencia entre el patrón de escala x y las respuestas del sujeto que ha obtenido un total x es un error.
2. Cálculo de indicadores de escalabilidad:
   CR (Coeficiente de Reproductibilidad) = Aciertos / Nº de datos.
   RMM (Reproductibilidad Marginal Mínima)= Promedio de los marginales (p ó q) máximos de los items.
   PM (Porcentaje de mejora)= CR - RMM.
   CE (Coeficiente de Escalabilidad) = PM /(1-RMM)
3. Criterios de escalabilidad:
   Para que unos datos se consideren escalables Guttman estima necesario que CR≥ 0'9.
   Para el conjunto de una tabla de datos también se puede pedir que CE≥0'6.
4. Se pueden obtener CR de items aislados (y de sujetos).
   Esto permite rechazar items no escalables.

MEDICION DE SUJETOS.

Obtención de información:

1. Se administra la escala y se solicita que cada sujeto diga si está de acuerdo o no con cada ítem (Actitudes) o que cada sujeto resuelva cada ítem (Aptitudes). (Tarea de Respuesta *I.B).*

Obtención de los valores de escala o puntuaciones de los sujetos:

1. La puntuación total (suma de puntos) para cada sujeto indica su posición en la escala, y en un escalograma perfecto permite conocer exactamente qué items ha acertado o contestado afirmativamente.