4

Medidas paralelas

1. Concepto de medidas paralelas

Puede decirse que dos mediciones son paralelas si "es indiferente cual de ambas se utilice".

Más precisamente, para que dos mediciones sean paralelas las puntuaciones verdaderas que producen han de ser iguales:

$$\boxed{V_{ig} = V_{ih}}$$

La igualdad anterior expresa que para que dos mediciones, g y h, se consideren paralelas, para cada sujeto i ambas han de presentar la misma puntuación verdadera V.

Esta primera condición es necesaria pero no suficiente para considerar dos mediciones paralelas. Si la diferencia entre las puntuaciones verdaderas y los errores fuera en general mayor para una medición h que para otra g, entonces sería mejor utilizar la segunda, no sería 'indiferente' utilizar una u otra medida.

Este razonamiento parece llevar a establecer que

$$E_{ig} = E_{ih}$$

pero esta condición no puede sostenerse porque implicaría que

$$r_{E_g E_h} = 1$$

lo que entraría en contradicción con la afirmación de que la correlación entre el error de medida de dos mediciones (sean o no paralelas) es 0 debido a la aleatoriedad del error. Es decir, necesariamente hay que sostener que:

$$r_{E_g E_h} = 0$$

lo que impide imponer como condición de mediciones paralelas la igualdad de los errores.

Sin embargo, sí puede incluirse en la definición de mediciones paralelas el requisito de que la varianza de los errores sea igual:

$$\boxed{s^2_{E_g} = s^2_{E_h}}$$

o su equivalente, que los errores típicos de medida sean iguales:

$$s_{E_g} = s_{E_h}$$

Las igualdades anteriores establecen la segunda condición para considerar dos mediciones g y h como paralelas: que sus varianzas de error sean iguales, o, lo que es equivalente, que sus errores típicos de medida sean iguales. Esta condición impone que "en promedio", ambas mediciones presenten el mismo error de medida, si bien el error de medida sigue siendo aleatorio y por tanto se sigue cumpliendo que:

$$r_{E_g E_h} = 0$$

condición ésta última que rige para cualesquiera dos medidas, sean o no paralelas, como consecuencia de la aleatoriedad insesgada del error de medida.

De este modo quedan definidas **mediciones paralelas** como aquellas que producen puntuaciones verdaderas iguales y varianzas de error iguales.

2. Implicaciones de la definición de mediciones paralelas.

De la definición anterior se desprenden una serie de consecuencias.

Como las mediciones paralelas producen las mismas puntuaciones verdaderas caso a caso, entonces, las medias de las puntuaciones verdaderas de dos mediciones paralelas son iguales:

$$\bar{V}_g = \bar{V}_h$$

Como, según vimos, en cualquier medición, la media de las puntuaciones verdaderas es igual a la media de las puntuaciones empíricas,

$$\bar{X}_g = \bar{V}_g$$

$$\bar{X}_h = \bar{V}_h$$

se desprende que la media de las puntuaciones empíricas de dos mediciones paralelas son iguales:

$$\bar{X}_g = \bar{X}_h$$

Necesariamente, la correlación entre las puntuaciones verdaderas de dos mediciones paralelas es 1, dado que se trata de las mismas puntuaciones:

$$r_{V_g V_h} = 1$$

Por la misma razón, la varianza de las puntuaciones verdaderas de dos mediciones paralelas son iguales:

$$s^2_{V_g} = s^2_{V_h}$$

La desviación típica de las puntuaciones verdaderas de dos mediciones paralelas son iguales:

$$s_{V_g} = s_{V_h}$$

Sabemos, según vimos, que en cualquier medición la varianza de las puntuaciones empíricas es igual a la suma de la varianza de las verdaderas y la varianza de error:

$$s^2_X = s^2_V + s^2_E$$

Por definición para que dos medidas sean paralelas sus varianzas de error han de ser iguales. Además acabamos de ver que la varianza de las puntuaciones verdaderas de dos mediciones paralelas son iguales, por tanto se desprende que la varianza de las puntuaciones empíricas de dos mediciones paralelas son también iguales:

$$s^2_{X_g} = s^2_{X_h}$$

Por supuesto esta igualdad es también cierta para las desviaciones típicas correspondientes:

$$s_{X_g} = s_{X_h}$$

Puede concluirse por tanto que dos medidas paralelas presentan medias iguales y varianzas iguales tanto en sus puntuaciones empíricas, como verdaderas y errores. Además, sus puntuaciones verdaderas correlacionan 1 y sus errores 0.

3. La correlación entre mediciones paralelas como coeficiente de fiabilidad

En este apartado mostraremos como la correlación entre las puntuaciones empíricas de dos mediciones paralelas equivale al coeficiente de fiabilidad.

La correlación entre las puntuaciones empíricas de dos mediciones paralelas g y h puede escribirse, según una definición del coeficiente de correlación de Pearson, como el cociente entre la covarianza y las desviaciones típicas correspondientes:

$$r_{x_g x_h} = \frac{s_{x_g x_h}}{s_{x_g} s_{x_h}}$$

Como la covarianza a su vez puede definirse como el sumatorio del producto de puntuaciones diferenciales partido N

$$s_{x_g x_h} = \frac{\sum x_g x_h}{N}$$

podemos escribir la correlación de este modo:

$$r_{x_g x_h} = \frac{\sum x_g x_h}{N s_{x_g} s_{x_h}}$$

como, según hemos visto, en dos mediciones paralelas

$$s_{x_g} = s_{x_h}$$

podemos simplificar la expresión así:

$$r_{x_g x_h} = \frac{\sum x_g x_h}{N s_x^2}$$

Descomponiendo la expresión en dos términos tenemos:

$$r_{x_g x_h} = \frac{\sum x_g x_h}{N} \cdot \frac{1}{s_x^2}$$

Operamos ahora con el primer término (recuérdese que las puntuaciones están expresadas en diferenciales):

$$\frac{\sum x_g x_h}{N} = \frac{\sum (v_g + e_g)(v_h + e_h)}{N} =$$

$$= \frac{\sum v_g v_h + \sum v_g e_h + \sum e_g e_h + \sum e_g v_h}{N} =$$

$$= \frac{\sum v_g v_h}{N} + \frac{\sum v_g e_h}{N} + \frac{\sum e_g e_h}{N} + \frac{\sum e_g v_h}{N}$$

Los cuatro términos de la última expresión son, respectivamente, la covarianza entre verdaderas g y h, la covarianza entre verdaderas g y errores h, la covarianza entre errores g y h, y la covarianza entre errores g y verdaderas h. Los tres últimos términos valen 0 debido a que, dada la naturaleza aleatoria insesgada de los errores, estos covarían 0 entre si o con puntuaciones verdaderas. Ello permite simplificar la expresión.

$$\frac{\sum x_g x_h}{N} = \frac{\sum v_g v_h}{N}$$

A su vez, hemos visto anteriormente que, por definición de mediciones paralelas,

$$V_g = V_h$$

de donde es inmediato que las puntuaciones diferenciales respectivas también son iguales:

$$v_g = v_h$$

lo que permite simplificar todavía más la expresión anterior, que ahora puede reducirse a la varianza de las puntuaciones verdaderas (g ó h, es igual porque es la misma):

$$\frac{\sum x_g x_h}{N} = \frac{\sum v_g v_h}{N} = \frac{\sum v^2}{N} = s_V^2$$

Retomemos ahora la última expresión de la correlación entre formas paralelas que habíamos obtenido:

$$r_{X_g X_h} = \frac{\sum x_g x_h}{N} \cdot \frac{1}{s_X^2}$$

y sustituyamos por la expresión más sencilla del primer término que hemos obtenido:

$$r_{X_g X_h} = s_V^2 \cdot \frac{1}{s_X^2}$$

Efectivamente, podemos escribir que la correlación entre las puntuaciones empíricas obtenidas en dos mediciones paralelas es igual al cociente entre varianza verdadera y varianza empírica:

$$\boxed{r_{X_g X_h} = \frac{s_V^2}{s_X^2}}$$

Como se recordará ésta es precisamente la definición formal de coeficiente de fiabilidad. Por ello podría utilizarse la correlación entre puntuaciones empíricas de dos mediciones paralelas como coeficiente de fiabilidad.

Características de Medidas Paralelas

	Empíricas	Verdaderas	Errores de Medida
Puntuaciones		Iguales**	
Medias	Iguales	Iguales	0
Varianzas	Iguales	Iguales	Iguales**
Correlaciones	Iguales*	1	0

** Condiciones que definen lo que son medidas paralelas. A partir de estas dos condiciones y de que la media de los errores de medida es 0 se deducen todas las demás características del cuadro.

* Las correlaciones entre medidas paralelas, cuando hay más de dos, son todas iguales entre sí. La correlación entre medidas paralelas es el coeficiente de fiabilidad.

Dada la fórmula anterior, si dispusiéramos de dos mediciones paralelas, una vez calculadas la correlación entre ellas y la varianza empírica (de cualquiera de ambas pues habrían de ser necesariamente iguales), podríamos obtener la varianza de las puntuaciones verdaderas. De este modo, a partir del coeficiente de fiabilidad como correlación entre dos mediciones paralelas podríamos ir obteniendo los valores de las fórmulas anteriores.

Si dispusiéramos de tres o más mediciones paralelas las correlaciones entre esas mediciones tendrían que ser todas iguales entre sí. Esto se desprende inmediatamente a la luz de la fórmula anterior dado que, al ser paralelas, todas tendrían la misma varianza verdadera y empírica.

4. Otros grados de similitud entre mediciones.

Además del concepto central de mediciones paralelas se han elaborado otros próximos, en función de otros supuestos más o menos exigentes.

Mediciones Replicadas: Aquéllas que obtienen las mismas puntuaciones verdaderas y errores de medida idénticamente distribuidos.

Mediciones Paralelas: Aquéllas que obtienen las mismas puntuaciones verdaderas e igual varianza de error.

Mediciones Tau-equivalentes: Aquéllas que obtienen las mismas puntuaciones verdaderas. (No se requiere igual varianza de error.)

Mediciones esencialmente Tau-equivalentes: Aquéllas en las que las puntuaciones verdaderas de una medición son iguales a las verdaderas de la otra medición más una constante.

Mediciones linealmente Tau-equivalentes: Aquéllas en las que las puntuaciones verdaderas de una medición son función lineal de las verdaderas de la otra medición. Es decir pueden definirse por el producto de una constante por las verdaderas más otra constante.

5. Supuestos utilizados para establecer que la correlación entre dos medidas paralelas es el coeficiente de fiabilidad.

Si se revisa la deducción que lleva a establecer que la correlación entre las puntuaciones empíricas de dos tests X_g y X_h es el coeficiente de fiabilidad, se verá que se utilizan los siguientes supuestos:

Supuesto 1. Las desviaciones típicas de las puntuaciones empíricas de las dos mediciones son iguales:

$$s_{X_g} = s_{X_h}$$

Supuesto 2. Los errores de medida tienen una naturaleza aleatoria, lo que supone que no covarían entre sí ni con las puntuaciones verdaderas de ambas mediciones. (Supuesto este general y consustancial al modelo, no solo a las mediciones paralelas).

Supuesto 3. Las puntuaciones verdaderas en ambas mediciones son iguales.

$$V_g = V_h$$

El primer supuesto, de igualdad de varianzas empíricas, se ve como una consecuencia de la igualdad de varianzas de error y de la igualdad de varianzas verdaderas, esto último depende a su vez del tercer supuesto. (Recuérdese que la varianza empírica es la suma de la varianza verdadera y de la varianza de error).

La importancia práctica de que las varianzas de error hayan de ser iguales reside en que si las varianzas de error no son iguales no puede deducirse que las varianzas empíricas hayan de ser iguales (supuesto puntuaciones verdaderas iguales).

No obstante, una vez establecido el supuesto tres de igualdad de puntuaciones verdaderas, es indiferente suponer a la vez que las varianzas de error son iguales (definición de mediciones paralelas) o que las varianzas empíricas son iguales. Ambas cosas se implican mutuamente dado el supuesto de igualdad de puntuaciones verdaderas. Es decir, podríamos definir igualmente mediciones paralelas como aquellas con puntuaciones verdaderas iguales y varianzas empíricas iguales. Esto es indiferente para la deducción del coeficiente de fiabilidad desde el coeficiente de correlación.

Si no se puede garantizar que las varianzas empíricas sean iguales no se puede deducir que el coeficiente de correlación entre las mediciones sea igual al coeficiente de fiabilidad. Este es precisamente un punto crítico de la teoría de la fiabilidad.

La teoría de la fiabilidad no necesita un supuesto tan fuerte como el de mediciones replicadas, pero en este aspecto central no puede operar *solo* bajo el supuesto de iguales puntuaciones verdaderas (mediciones tau-equivalentes) u otros menos restrictivos.

Desde luego a partir del concepto de mediciones replicadas (supuestos más fuertes) también podríamos llegar desde el coeficiente de correlación de Pearson al coeficiente de fiabilidad. Pero sería un ejercicio baldío: las medidas replicadas correlacionan siempre necesariamente 1 entre si, o, dicho en términos de fiabilidad son “absolutamente fiables”.

Puede apreciarse que el concepto de mediciones paralelas ha sido establecido *para* satisfacer la deducción del coeficiente de fiabilidad a partir de la fórmula del coeficiente de correlación de Pearson.

El proceso de razonamiento no parte del descubrimiento empírico de que la correlación entre formas de un test puede interpretarse como fiabilidad del test. Al contrario el concepto de mediciones paralelas ha sido *construido a medida* para intentar conectar los conceptos inobservables de la teoría de la fiabilidad con los tests reales.