8

Puntuaciones verdaderas

1. La relación entre puntuaciones empíricas y verdaderas

El modelo general establece que las puntuaciones empíricas X que obtenemos en una medición pueden descomponerse en una puntuación verdadera V y un error de medida aleatorio E.

$$X_i = V_i + E_i$$

Más precisamente puede decirse que, según el modelo, las puntuaciones empíricas X son función lineal de las puntuaciones verdaderas V, dado que el término E tan sólo es un componente de error aleatorio, es decir, no sistemático, por definición del modelo.

En estas condiciones el coeficiente de correlación de Pearson entre X y V, calculada para una muestra de N sujetos, es un estadístico adecuado para describir el grado de asociación entre ambas puntuaciones. Precisamente el coeficiente de correlación r_{VX} lo hemos denominado índice de fiabilidad. Su cuadrado es el coeficiente de fiabilidad, representado como r_{XX}. El coeficiente de fiabilidad expresa que proporción de la varianza de las puntuaciones empíricas se debe a varianza de las puntuaciones verdaderas.

De acuerdo con el modelo teórico las puntuaciones verdaderas determinan las empíricas:

$$V_i \rightarrow X_i$$

Un sujeto tiene una puntuación empírica determinada como resultado de una variación aleatoria introducida por la medición sobre su puntuación verdadera.

Sorprendentemente el modelo no informa acerca de la razón de esa variación aleatoria. De acuerdo con el modelo si no hubiese esa variación aleatoria, las puntuaciones empíricas serían verdaderas. Enfocado el problema de este modo la cuestión esencial parece residir en eliminar esa variación aleatoria. Ahora bien ¿a qué se debe esa variación aleatoria? y ¿cómo podría reducirse o eliminarse? Si todo lo que hace que la puntuación empírica no sea verdadera es esa variación aleatoria, las cuestiones anteriores son principales. Pero la teoría clásica no parece enfrentarlas.

Si X es una función lineal de V entonces podremos utilizar las ecuaciones de regresión lineal para pronosticar X a partir de V.

2. Regresión lineal de Y sobre X

En general, si la variable X (independiente) es un predictor lineal de la variable Y (dependiente), podemos escribir:

$$Y'_i = a + bX_i$$

donde:

Y'_i refleja la puntuación pronosticada para el sujeto i a partir de su puntuación X_i

a es una constante en la ecuación que indica el valor de Y'_i cuando X_i vale 0

b es una constante en la ecuación que indica cuanto crece Y'_i cuando X_i crece 1

La diferencia entre el valor real de Y para el sujeto i, representado por Y_i, y el valor de Y pronosticado por la ecuación para ese mismo sujeto, representado por Y'_i, es un error de estimación que representaremos aquí por R (para evitar confundirlo con el error de medida que hemos llamado E).

$$R_i = Y_i - Y'_i$$

Cuanto más error de estimación cometa una ecuación tanto peor es capaz de predecir Y a partir de X.

Un estadístico que indica cuanto error de estimación comete globalmente la ecuación de regresión es el error típico de estimación:

$$\boxed{s_{Y.X} = \sqrt{\frac{\sum (Y - Y')^2}{N}}}$$

Si se calculan los parámetros a y b de la ecuación de regresión lineal de tal modo que la suma de los errores de estimación al cuadrado sea lo menor posible se dice que efectuamos regresión lineal *minimocuadrática.*

> Calcular los parámetros a y b de la ecuación de regresión lineal de tal modo que la suma de los errores de estimación al cuadrado sea lo menor posible equivale a calcular los parámetros a y b de la ecuación de regresión lineal de tal modo que el error típico de estimación sea lo menor posible.

Con ese criterio mínimo-cuadrático, expresada la ecuación en puntuaciones directas, los parámetros valen:

$$b = r_{XY}\frac{s_Y}{s_X}$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

De este modo la ecuación de regresión lineal minimocuadrática puede escribirse, sustituyendo a y b:

$$Y'_i = \bar{Y} - r_{XY}\frac{s_Y}{s_X}\bar{X} + r_{XY}\frac{s_Y}{s_X}X_i$$

Precisamente, sustituyendo en la fórmula del error típico de estimación Y' por su valor en la ecuación anterior y simplificando se alcanza una fórmula operativa del error típico de estimación:

$$\boxed{s_{Y.X} = s_Y\sqrt{1 - r^2_{XY}}}$$

Si la ecuación de regresión se expresa en diferenciales o en típicas los valores de a y b varían consecuentemente. En el cuadro siguiente se resumen el valor de los parámetros a y b en la ecuación de regresión según trabajemos con puntuaciones directas, diferenciales o típicas.

Ecuación de regresión lineal minimocuadrática de Y sobre X.

$$Y' = a + bX$$

Fórmulas para el cálculo de "a" y "b"

<table>
<tr><th></th><th>"a" en la ecuación es igual a:</th><th>"b" en la ecuación es igual a:</th></tr>
<tr><td>En puntuaciones Directas:</td><td>$\bar{Y} - b\bar{X}$</td><td rowspan="2">$r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x}$</td></tr>
<tr><td>En Puntuaciones Diferenciales:</td><td rowspan="2">0</td></tr>
<tr><td>En puntuaciones Típicas:</td><td>r_{xy}</td></tr>
</table>

3. Regresión de las puntuaciones empíricas sobre las verdaderas

Como hemos analizado el modelo teórico implica que las puntuaciones verdaderas determinan las empíricas:

$$V_i \rightarrow X_i$$

Un sujeto tiene una puntuación empírica determinada como resultado de una variación aleatoria introducida por la medición sobre su puntuación verdadera. Como X es una función lineal de V entonces resulta adecuado utilizar la ecuación de regresión lineal para pronosticar X a partir de V:

$$X' = a + bV$$

Aplicando las fórmulas de la regresión lineal a este caso, en puntuaciones directas tenemos:

$$b = r_{XV} \frac{s_X}{s_V} = \frac{s_V}{s_X} \cdot \frac{s_X}{s_V} = 1$$

$$a = \bar{X} - b\bar{V} = \bar{X} - \bar{V} = \bar{X} - \bar{X} = 0$$

Es decir, la ecuación en puntuaciones directas es:

$$X' = a + bV = V$$

Es decir, la ecuación de regresión para un sujeto con puntuación verdadera V pronostica como puntuación empírica precisamente V.

Esto es consistente con el modelo.

La diferencia entre un valor X y el pronosticado por la ecuación X' es lo que hemos denominado error de estimación R. Pues bien, obsérvese que en este caso:

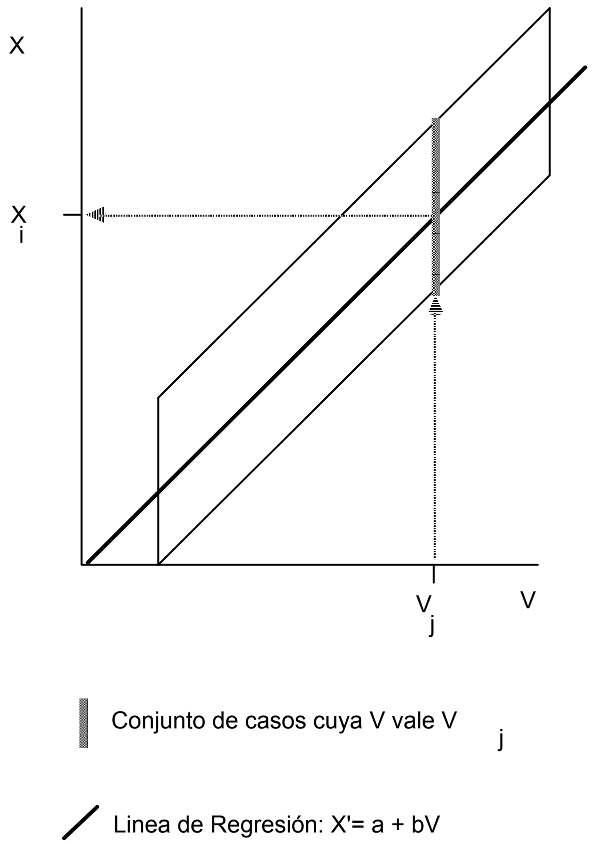
$$R = X - X' = X - V = E$$

La última parte de la expresión es precisamente la definición de error de medida: una variación aleatoria en torno a la puntuación verdadera con media cero.

El error típico de estimación de X a partir de V es precisamente el error de medida. En efecto, si aplicamos la fórmula del error típico de estimación a este caso tenemos inmediatamente la fórmula del error típico de medida:

$$s_{X.V} = s_X \sqrt{1 - r^2_{XV}}$$

Estimación de las puntuaciones empíricas a partir de las puntuaciones verdaderas.



En el gráfico puede apreciarse la situación descrita. Un conjunto de sujetos con la misma puntuación verdadera no obtienen exactamente la misma puntuación empírica. Cada puntuación empírica difiere de su verdadera por una variación aleatoria que es, precisamente, el error de medida.

4. Intervalo confidencial en torno a la puntuación verdadera

Supuesto que el error de medida sea el mismo para cada puntuación verdadera y que su distribución sea normal, entonces podemos aprovechar el conocimiento de la distribución normal para establecer intervalos confidenciales.

Si conocemos la puntuación verdadera V de un sujeto podemos afirmar que:

-El 99% de las mediciones empíricas X que efectuemos del mismo darán valores entre V-2'58 s_E y V+2'58 s_E

-El 95% de las mediciones empíricas X que efectuemos del mismo darán valores entre V-1'96 s_E y V+1'96 s_E

Recuérdese que en una distribución normal el 99% de los casos están entre -2'58 desviaciones típicas y +2'58 desviaciones típicas de la media. En la distribución que nos ocupa el error típico de medida es la desviación típica de todas las puntuaciones X fruto de una misma puntuación verdadera V, siendo precisamente V la media de todas ellas.

Este razonamiento aclara como el error típico de medida s_E permite establecer un intervalo confidencial en torno a la puntuación verdadera, pero no tiene aplicación práctica real dado que en la práctica las mediciones producen puntuaciones empíricas X y no puntuaciones verdaderas V.

5. Intervalo confidencial en torno a la puntuación empírica

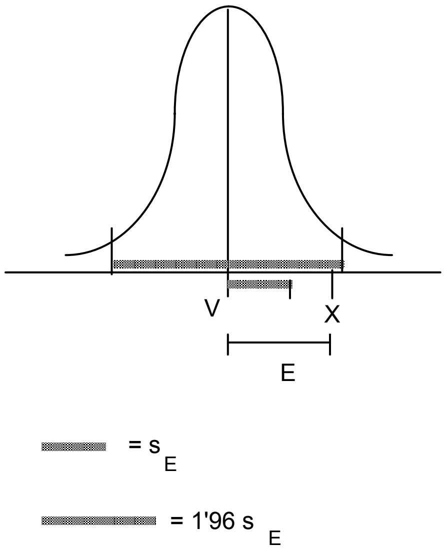
Examinemos con más detalle la distribución de puntuaciones empíricas X que aparecen por variación aleatoria en torno a una misma puntuación verdadera V.

En el gráfico siguiente puede verse la distribución de N casos con distintas puntuaciones empíricas pero todas "fruto" de variaciones aleatorias en torno a una misma puntuación verdadera V. Es decir, la distribución de N casos con la misma puntuación verdadera y que, por tanto, tan solo difieren entre sí debido al error de medida.

Si el error de medida presenta una distribución normal entonces, como acabamos de ver, el 95% de las mediciones empíricas X estarán entre

$V - 1'96\, s_E$ y $V + 1'96\, s_E$

Distribución de N puntuaciones empíricas X
todas fruto de la misma puntuacion verdadera V



Como el error típico de medida es una unidad constante para estos datos también puede razonarse al revés:

Dada una puntuación empírica X perteneciente a la distribución anterior en el 95% de los casos su puntuación verdadera V estará dentro del intervalo

$X - 1'96\, s_E$ y $X + 1'96\, s_E$

O bien:

Dada una puntuación empírica X en el 99% de los casos su puntuación verdadera V estará dentro del intervalo

$X - 2'58\, s_E$ y $X + 2'58\, s_E$

6. Regresión de las puntuaciones verdaderas sobre las empíricas

Si X es una función lineal de V entonces, teóricamente, podríamos utilizar las ecuaciones de regresión lineal para pronosticar X a partir de V. Sin embargo, este planteamiento resulta irreal dado que en la práctica al medir sujetos lo que obtenemos son puntuaciones empíricas X a partir de las cuales podríamos estimar las puntuaciones verdaderas V.

Por eso resulta conveniente estudiar como se pueden estimar las puntuaciones verdaderas V a partir de las empíricas X.

Si aplicamos las fórmulas de regresión lineal al problema de estimar V a partir de X, es decir, si aplicamos las fórmulas a la estimación de "a" y "b" en la ecuación:

$$V'_i = a + bX_i$$

se obtienen, mediante algunos pasos de simplificación, las fórmulas de estimación (en puntuaciones directas, diferenciales y típicas) que se muestran en el cuadro siguiente. Las fórmulas de estimación del cuadro se desprenden casi inmediatamente de la aplicación de las ecuaciones de regresión.

Por ejemplo, en puntuaciones diferenciales:

$$v' = r_{XV} \frac{s_V}{s_X} \cdot x$$

pero, a su vez,

$$r_{XV} = \frac{s_V}{s_X}$$

de donde,

$$v' = \frac{s_V}{s_X} \cdot \frac{s_V}{s_X} \cdot x$$

y, por tanto:

$$v' = \frac{s_V^2}{s_X^2} \cdot x$$

que equivale a:

$$v' = r_{XX} \cdot x$$

El cuadro sintetiza cómo pasar de empíricas a verdaderas tanto en directas como en diferenciales o típicas.

Para pasar de verdaderas diferenciales a verdaderas típicas hay que dividir por la desviación típica de las puntuaciones verdaderas. Puede encontrarse una expresión fácilmente manejable de la desviación típica de las puntuaciones verdaderas.

Como el coeficiente de fiabilidad es:

$$r_{XX} = \frac{s^2_V}{s^2_X}$$

se sigue que:

$$s^2_V = s^2_X \cdot r_{XX}$$

y de ahí que:

$$\boxed{s_V = s_X \sqrt{r_{XX}}}$$

o bien que:

$$s_V = s_X r_{XV}$$

La estimación de las Puntuaciones Verdaderas

Expresadas en Puntuaciones:	Puntuaciones Empíricas	*Fórmula de estimación.* $\longrightarrow$	Puntuaciones verdadera
Directas	X	$V' = \bar{X} + r_{XX}(X - \bar{X}$ $\longrightarrow$	V'
	$-\bar{X}\ \downarrow$		$\downarrow\ -\bar{X}$
Diferenciales $x = X - \bar{X}$	x	$v' = r_{XX} \cdot x$ $\longrightarrow$	v'
	$\div s_X\ \downarrow$		$\downarrow\ \div s_V$
Típicas $z_X = \frac{X - \bar{X}}{s_X}$	z_X	$z_{V'} = r_{XV} \cdot z_X$ $\longrightarrow$	$z_{V'}$

Fórmulas utilizadas en la tabla

Media de X: $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{N}$

Desviación típica de X: $s_X = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N}}$

Desviación típica de V: $s_V = s_X \sqrt{r_{XX}}$

7. Error típico de estimación de las puntuaciones verdaderas a partir de las empíricas

El error típico de estimación en general es:

$$s_{Y.X} = s_Y \sqrt{1 - r^2_{XY}}$$

Aplicado al caso que nos ocupa:

$$s_{V.X} = s_V \sqrt{1 - r^2_{XV}}$$

Sustituyendo la desviación típica de las verdaderas por su valor tenemos:

$$s_{V.X} = s_X r_{XV} \sqrt{1 - r^2_{XV}}$$

O lo que es lo mismo:

$$s_{V.X} = s_X r_{XV} \sqrt{1 - r_{XX}}$$

Si se trabaja en puntuaciones típicas la desviación típica de X es 1, lo que elimina este término de la fórmula.

La expresión anterior para el error típico de estimación de las puntuaciones verdaderas a partir de las empíricas puede reescribirse de otros modos equivalentes. Como el error típico de medida es:

$$s_E = s_X \sqrt{1 - r_{XX}}$$

podemos simplificar la expresión anterior considerablemente:

$$s_{V.X} = r_{XV} \cdot s_E$$

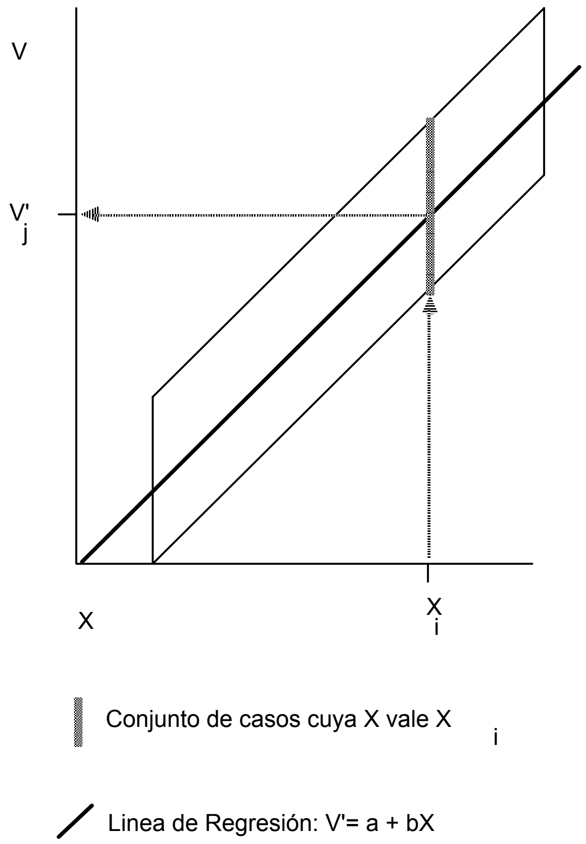
o, lo que es equivalente:

$$s_{V.X} = s_E \sqrt{r_{XX}}$$

8. Intervalo confidencial en torno a la puntuación verdadera estimada

La ecuación de regresión de las puntuaciones verdaderas sobre las puntuaciones empíricas permite pronosticar para un valor de X determinado (por ejemplo X_i), una puntuación verdadera V'. Si se cumplen perfectamente las condiciones de la regresión lineal, esa puntuación V' es la puntuación promedio en V para todos los sujetos que presentan esa puntuación empírica X_i.

Estimación de las puntuaciones verdaderas a partir de las puntuaciones empíricas.



Si cada puntuación empírica X sólo difiere de la verdadera V en una variación *aleatoria* E, entonces, si obtenemos una muestra suficiente de sujetos con una determinada puntuación empírica X, cada uno de ellos provendrá de una V distinta y presentará una E distinta. Sin embargo, dado que E es aleatorio, tendremos que en promedio el error de esa muestra suficiente será 0 y, por tanto, la media de esa muestra de puntuaciones empíricas iguales será una buena estimación de la puntuación verdadera que corresponde a los casos con esa X, aunque no necesariamente a la puntuación verdadera de un caso determinado con esa X.

La diferencia entre la verdadera puntuación verdadera V que corresponde a un determinado caso con puntuación empírica X_i y la puntuación verdadera estimada V' que le pronostica la ecuación de regresión es un error de estimación R.

$$R = V - V'$$

En estas condiciones parece razonable suponer que los errores de estimación R se distribuyen normalmente en torno a V'. Si se hace este supuesto, puede aprovecharse el conocimiento previo de la distribución normal para establecer un intervalo confidencial en el que, para una puntuación X determinada, podamos afirmar que se encuentra su puntuación verdadera con una probabilidad determinada.

En efecto, si R distribuye normalmente podemos afirmar que:

-En el 99% de los casos la puntuación verdadera V para un caso con puntuación empírica X se encuentra entre V'-2'58 errores típicos de estimación y V'+2'58 errores típicos de estimación.

En una distribución normal el 99% de los casos están entre -2'58 desviaciones típicas y +2'58 desviaciones típicas de la media. A esta puntuación z' que comprende en el intervalo de -z' a +z' un determinado porcentaje se la denomina a veces Z_c o z crítica. En la distribución de R que nos ocupa el error típico de estimación es la desviación típica de esos errores de estimación, y V' la posición media.

-En el 95% de los casos la puntuación verdadera V para un caso con puntuación empírica X se encuentra entre V'-1'96 errores típicos de estimación y V'+1'96 errores típicos de estimación.

(Estas afirmaciones suponen que la relación entre X y V esta efectivamente bien descrita por la ecuación de regresión lineal minimocuadrática, lo que implica que los errores de estimación distribuyen normalmente en torno a cada V' y que el modelo es homocedástico, es decir, que hay el mismo error típico de estimación para cada distribución de V condicionada a cada valor de X)

En términos de procedimiento práctico, para establecer un intervalo confidencial en torno a una puntuación verdadera estimada procedemos así:

0. Previamente, estimamos V' a partir de X mediante la ecuación de regresión, y el error típico de estimación $s_{V.X}$.

1. Escogemos un nivel de confianza. (Convencionalmente se establecen intervalos bien con un nivel de confianza del 99% o bien del 95%)

2. Con un nivel de confianza del 99% la puntuación verdadera para un sujeto con puntuación empírica X se encuentra en el intervalo entre V'-2'58 $s_{V.X}$ y V'+2'58 $s_{V.X}$

Con un nivel de confianza del 95% la puntuación verdadera para un sujeto con puntuación empírica X se encuentra en el intervalo entre V'-1'96 $s_{V.X}$ y V'+1'96 $s_{V.X}$

Al producto $|Z_C| \cdot s_{V.X}$ se lo denomina error máximo.

Por supuesto todos los procedimientos para establecer intervalos pueden operar con puntuaciones directas, diferenciales o típicas. En este caso hay que recordar que las desviaciones típicas de las puntuaciones típicas son igual a 1.

Existen otros procedimientos para establecer intervalos confidenciales, en torno a la puntuación empírica y en torno a la puntuación verdadera. Sin embargo, este procedimiento parece especialmente consistente con los supuestos y propósitos del modelo lineal, aunque también está expuesto a crítica.

9. Ejemplos

1. La estimación de las puntuaciones verdaderas

Una persona ha obtenido una puntuación de 25 en un test cuya media es 20, cuya desviación típica es 5 y cuyo coeficiente de fiabilidad es 0'7.

Obtened su puntuación verdadera estimada en directas, en diferenciales y en típicas.

Datos:

$X = 25 \qquad \bar{X} = 20 \qquad s_x = 5 \qquad r_{xx} = 0'7$

Solución:

Puntuaciones empíricas:

Empírica directa, está en los datos:

$X = 25$

Empírica diferencial

$x = X - \bar{X} \quad \rightarrow \quad x = 25 - 20 = 5$

Empírica típica:

$$z_x = \frac{x}{s_x} \quad \rightarrow \quad z_x = \frac{5}{5} = 1$$

Puntuaciones verdaderas estimadas:

Verdadera estimada directa:

$V' = \bar{X} + r_{xx}(X - \bar{X}) \quad \rightarrow \quad V' = 20 + 0'7(25 - 20) = 23'5$

Verdadera estimada diferencial:

$v' = r_{xx} \cdot x \quad \rightarrow \quad v' = 0'7 \cdot 5 = 3'5$

Verdadera estimada típica:

$r_{xv} = \sqrt{r_{xx}} \quad \rightarrow \quad r_{xv} = \sqrt{0'7} = 0'8366$

(Indice de fiabilidad).

$z_{v'} = r_{xv} \cdot z_x \quad \rightarrow \quad z_{v'} = 0'8366 \cdot 1 = 0'8366$

El problema puede ser resuelto por varios caminos equivalentes entre sí.

Tal vez sea particularmente fácil convertir empíricas diferenciales a verdaderas estimadas diferenciales (simplemente multiplicando por el coeficiente de fiabilidad, como acabamos de hacer) y desde ahí obtener las verdaderas estimadas directas y típicas. Una vez tenemos la verdadera estimada diferencial procederíamos así:

Verdadera estimada directa:

$V' = v' + \bar{X} \quad \rightarrow \quad V' = 3'5 + 20 = 23'5$

Desviación típica de las verdaderas:

$s_v = s_x\sqrt{r_{xx}} \quad \rightarrow \quad s_v = 5\sqrt{0'7} = 4'1833$

Verdadera estimada típica:

$$z_{v'} = \frac{v'}{s_{v'}} \quad \rightarrow \quad z_{v'} = \frac{3'5}{4'1833} = 0'8366$$

2. Intervalo confidencial en torno a la puntuación verdadera estimada

Una vez obtenida la puntuación verdadera estimada puede establecerse en torno a ella un intervalo confidencial para un nivel de confianza determinado.

Por ejemplo, para establecer un intervalo con un nivel de confianza del 95% en torno a la puntuación verdadera estimada directa, con los datos del problema anterior procederemos del siguiente modo.

Paso 0.

Establecer la puntuación verdadera estimada directa. Como hemos visto es igual a 23'5.

$$V' = \overline{X} + r_{xx}(X - \overline{X}) \quad \rightarrow \quad V' = 20 + 0'7(25 - 20) = 23'5$$

Calcular el error típico de estimación de las puntuaciones verdaderas a partir de las empíricas:

$$s_{v.x} = s_e \cdot r_{xv} \quad \rightarrow \quad s_{v.x} = 5 \cdot \sqrt{1 - 0'7} \cdot \sqrt{0'7} = 2'2912$$

Paso 1.

Determinar la puntuación típica crítica correspondiente al nivel de confianza escogido.

$$\alpha = 0'05 \rightarrow |z_c| = 1'96$$

(Contraste bidireccional)

Paso 2.

Calcular el error máximo:

$$E_{max} = |z_c| \cdot s_{v.x} \rightarrow E_{max} = 1.96 \cdot 2'2912 = 4'49$$

Establecer el Intervalo de Confianza:

$$I.C. = V' \pm E_{max} \quad \rightarrow \quad I.C. = 23'5 \pm 4'49 = \begin{cases} 19'01 \\ 27'99 \end{cases}$$

Es decir, en estas condiciones (para un test de esas características métricas) puede afirmarse con un nivel de confianza del 95% que una persona que ha obtenido una puntuación empírica directa de 25 presentará una puntuación verdadera estimada directa entre 19'01 y 27'99.

Existe todavía un margen de error del 5%, es decir, 5 de cada 100 veces que efectuemos este pronóstico la puntuación verdadera estará fuera de este intervalo.

Comentario:

Este tipo de estimación por intervalo es cierta si, además de los supuestos generales de la teoría clásica y de los que implica la estimación de la puntuación verdadera mediante las ecuaciones de regresión implícitas en el paso 0, es cierto que las puntuaciones empíricas distribuyen normalmente en torno a la verdadera al menos en el punto de la escala del test en que está ubicada la puntuación empírica directa de la que se parte.

Obsérvese que cuanto mayor es el nivel de confianza menor es el margen de error (nivel alfa en términos de probabilidades), pero este incremento de la confianza en el pronóstico se efectúa siempre a costa de abrir el intervalo, de modo que si el error de estimación es grande (lo que depende esencialmente de la fiabilidad del test) entonces el intervalo obtenido para un nivel de confianza alto (p.e. 99%) puede ser tan amplio que carezca de sentido operativo.

Es obvio, por ejemplo, que si la escala de un test va entre 0 y 30 puntos podemos afirmar con un nivel de confianza del 100% que la puntuación verdadera de cualquier sujeto, sea cual sea su puntuación empírica, ha de estar entre esos dos valores, porque la escala no puede reconocer otros niveles más allá de los que discrimina empíricamente (plantear otra cosa lleva a diversos absurdos). Pero, también obviamente, un intervalo como éste no ayudaría para nada.

Por cierto que es posible por este método que el intervalo de confianza en torno a las puntuaciones verdaderas estimadas rompa los límites de la escala empírica del test planteando un intervalo que exceda en su máximo o en su mínimo el máximo o el mínimo de la escala. Basta para ello plantear el problema con un valor empírico inicial lo bastante próximo a los límites empíricos de la escala. En mi opinión no tiene sentido extender el intervalo confidencial más allá del rango empírico de la escala del test y la interpretación debería restringirse a la zona en la que se produce una discriminación conocida (es decir, al rango de la variable). Una situación así insinúa que es posible que la persona este más allá del suelo (mínimo) o del techo (máximo) que la escala es capaz de evidenciar y que quizás proceda utilizar un test que opere en esa zona inferior o superior, según el caso, para medir esa dimensión de esa persona. Sin embargo, no creo que ello autorice a establecer un brazo del intervalo sobre una zona donde la escala simplemente no alcanza.

Los modelos frecuentemente operan considerando las escalas en un intervalo sin limites superiores ni inferiores. Como de hecho las escalas de medición tienen un origen y un fin se producen situaciones paradójicas en los extremos de la escala. El problema es semejante a la cuestión de la homocedasticidad en los extremos de la distribución (¿como va a distribuir normalmente el error de medida en el extremo de la escala si esto implica necesariamente "salirse de la escala"?) y de la regresión a la media (¿cómo va distribuir normalmente la segunda medición en torno a un valor en los extremos de la escala si esto implica "salirse de la escala?). Por supuesto esta una discusión divertida más allá de los sencillos fines de nuestro ejemplo.