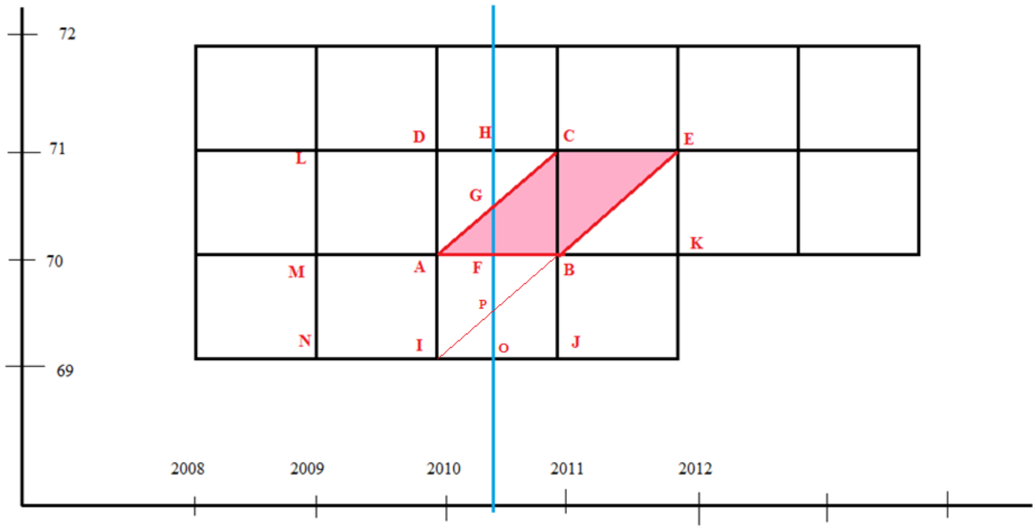
Estadística avanzada para actuarios/ Modelos de supervivencia
Master en CC Actuariales y Financieras 2012-2013
Alumno:……………………………………………………………………………………………

Para los ejercicios 2 y 3 considérense las tablas adjuntas detrás

1.- Suponiendo un esquema demográfico cerrado estimar q_{70} a partir de los siguientes datos

característica biométrica	**periodo**	**valor**	***
Fallecidos 69 años-Nacidos 1940	2010	520	IAB
Fallecidos 69 años -Nacidos 1941	2010	515	IJB
Fallecidos 70 años -Nacidos 1939	2010	560	ADC
Fallecidos 70 años -Nacidos 1940	2010	540	ABC
Fallecidos 70 años -Nacidos 1940	2011	572	BCE
Fallecidos 70 años -Nacidos 1941	2011	555	BKE
Población hombres con 69 años	1-7-2010	121000	OF
Población hombres con 70 anos	1-7-2010	100200	FH

(1.75 ptos)



La probabilidad pedida será: q_{70}=ABCE/AB
Los datos suministrados son : ***

Estimamos los fallecidos de 70 ABCE=ABC+BCE=540+572=**1112**
Por otro los supervivientes que a lo largo del año 2010 cumplieron 70 años AB serán:
AB= AF+FB

AF= FG + AFG

FG=FH/2 =100200/2=50100
AFG=ABC/4=540/4=135

AF=50100+135=**50235**

FB=PF-PFB

PF=OF/2=121000/2=60500
PFB=IAB/4=520/4=130

FB=60500-130=**60370**

AB=50235+60370=110605

q_{70}=ABCE/AB=1112/11065=**0,010053795**

2. Calcula: a) ${}_{16}q_{36}$ generación 1990; b) La probabilidad de que una persona de 36 años de la generación de 1995 viva al menos 20 años, pero no más de 30; c) La probabilidad de que de un grupo con edades 39,34 y 29, de las generaciones de 1985, 90 Y 95 viva a lo sumo un individuo durante los próximos 25 años. d) La probabilidad de que el grupo anterior se disuelva antes de 15 años por causa de *A* o de C.
(0.25+0.5+0.5+0.75)

a)

$$ {}_{16}q_{36} = 1 - {}_{16}p_{36} = 1 - \frac{l^{1990}_{52}}{l^{1990}_{36}} = 1 - \frac{953336}{972222} = 0,019425604 $$

b)

$$ {}_{20/10}q^{1995}_{36} = \frac{l_{56} - l_{66}}{l_{36}} = \frac{943650 - 905005}{972170} = 0,039751278 $$

c)

La probabilidad de que viva a lo sumo 1 es la probabilidad de que viva 1 o ninguno:

$$ P = {}_{25}p^{[1]}_{\overline{39,34,29}} + {}_{25}q_{\overline{39,34,29}} = $$

$$ = ({}_{25}p_{39} \cdot {}_{25}q_{34} \cdot {}_{25}q_{29}) + ({}_{25}q_{39} \cdot {}_{25}p_{34} \cdot {}_{25}q_{29}) + ({}_{25}q_{39} \cdot {}_{25}q_{34} \cdot {}_{25}p_{29}) + ({}_{25}q_{39} \cdot {}_{25}q_{34} \cdot {}_{25}q_{29}) = $$

$$ = \left[\frac{l_{64}}{l_{39}}.(1-\frac{l_{59}}{l_{34}}).(1-\frac{l_{54}}{l_{29}})\right] + \left[(1-\frac{l_{64}}{l_{39}}).\frac{l_{59}}{l_{34}}.(1-\frac{l_{54}}{l_{29}})\right] + \left[(1-\frac{l_{64}}{l_{39}}).(1-\frac{l_{59}}{l_{34}}).\frac{l_{54}}{l_{29}}\right] + \left[(1-\frac{l_{64}}{l_{39}}).(1-\frac{l_{59}}{l_{34}}).(1-\frac{l_{54}}{l_{29}})\right] = $$

$$ = P = 0,0047384887889 $$

d)

El grupo se disolverá por causa de A (39) en todas las ocssiones en las que muera A pero no B y C, en la mitad de las ocasiones en que mueran A y B, la mitad de las ocasiones en que mueran A y C, y en un tercio de las ocasiones en que lo hagan los tres:

$$ P(disol/A) = {}_{15}q_{39} \cdot {}_{15}p_{34} \cdot {}_{15}p_{29} + \frac{1}{2}({}_{15}q_{39} \cdot {}_{15}q_{34} \cdot {}_{15}p_{29}) + \frac{1}{2}({}_{15}q_{39} \cdot {}_{15}p_{34} \cdot {}_{15}q_{29}) + \frac{1}{3}({}_{15}q_{39} \cdot {}_{15}q_{34} \cdot {}_{15}q_{29}) $$

el mismo razonamiento valdría para la disolución por causa de C de forma que :

$$ P(disol/C) = {}_{15}p_{39} \cdot {}_{15}p_{34} \cdot {}_{15}q_{29} + \frac{1}{2}({}_{15}p_{39} \cdot {}_{15}q_{34} \cdot {}_{15}q_{29}) + \frac{1}{2}({}_{15}q_{39} \cdot {}_{15}p_{34} \cdot {}_{15}q_{29}) + \frac{1}{3}({}_{15}q_{39} \cdot {}_{15}q_{34} \cdot {}_{15}q_{29}) $$

De forma que la disolución por causa de A o C que es la unión de ambos sucesos quedará:

$$ P(disol/A \cup C) = $$

$$ = {}_{15}q_{39} \cdot {}_{15}p_{34} \cdot {}_{15}p_{29} + \frac{1}{2}({}_{15}q_{39} \cdot {}_{15}q_{34} \cdot {}_{15}p_{29}) + \frac{1}{2}({}_{15}q_{39} \cdot {}_{15}p_{34} \cdot {}_{15}q_{29}) + \frac{1}{3}({}_{15}q_{39} \cdot {}_{15}q_{34} \cdot {}_{15}q_{29}) + $$

$$ + {}_{15}p_{39} \cdot {}_{15}p_{34} \cdot {}_{15}q_{29} + \frac{1}{2}({}_{15}p_{39} \cdot {}_{15}q_{34} \cdot {}_{15}q_{29}) + \frac{1}{2}({}_{15}q_{39} \cdot {}_{15}p_{34} \cdot {}_{15}q_{29}) + \frac{1}{3}({}_{15}q_{39} \cdot {}_{15}q_{34} \cdot {}_{15}q_{29}) = $$

$$ = {}_{15}q_{39} \cdot {}_{15}p_{34} \cdot {}_{15}p_{29} + {}_{15}p_{39} \cdot {}_{15}p_{34} \cdot {}_{15}q_{29} + ({}_{15}q_{39} \cdot {}_{15}p_{34} \cdot {}_{15}q_{29}) + \frac{1}{2}({}_{15}q_{39} \cdot {}_{15}q_{34} \cdot {}_{15}p_{29}) + $$

$$ + \frac{1}{2}({}_{15}p_{39} \cdot {}_{15}q_{34} \cdot {}_{15}q_{29}) + \frac{2}{3}({}_{15}q_{39} \cdot {}_{15}q_{34} \cdot {}_{15}q_{29}) = 0,0301335 $$

3.- Consideremos un individuo *A* de 20 años de la generación de 1985 que suscribe un seguro de supervivencia de un millon de euros a 50 años. a) A partir de unas tablas recargadas al 2.5%. de riesgo y un l_o = 1000 ¿Qué prima de riesgo única pagará por el seguro suscrito, si se supone un tipo de interés teórico del 2 %anual? b) Consideran una cartera compuesta por 30 sujetos similares a *A* que además suscriben un segura póliza de fallecimiento de doscientos mil euros. Si las primas de vida y muerte se calculan de modo independiente con tablas recargadas como en el apartado anterior y admitiendo que el tipo de .interés es nulo. ¿Cuál es el riesgo, medido en probabilidad, de que la compañía no pueda hacer frente a los compromisos asumidos con los recursos captados a partir de las primas de riesgo con un recargo del 2.5 % (como en A)?

(0.75+1.25)

a) La prima a pagar, prescindiendo del tipo de interés será: $\pi = 1000000 \cdot {}_{50}p_{30}^{+} = 1000000 \cdot \frac{l_{80}^{+}}{l_{30}^{+}}$

Los valores recargado correspondientes , con un recargo del 2,5% y un valor de l_o de 1000 serán:

$$l_{80}^{+} = l_0 \cdot {}_{80}p_0 + z_{\alpha}\sqrt{l_0 \cdot {}_{80}p_0 \cdot {}_{80}q_0} = 1000 \cdot 0,776076 + 1,96\sqrt{1000 \cdot 0,776076.0,223924} = 801,914$$

$$l_{30}^{+} = l_0 \cdot {}_{30}p_0 + z_{\alpha}\sqrt{l_0 \cdot {}_{30}p_0 \cdot {}_{30}q_0} = 1000 \cdot 0,977503 + 1,96\sqrt{1000 \cdot 0,977503.0,022497} = 986,6943$$

De modo que la prima sin interés será:

$$\pi = 1000000 \cdot {}_{50}p_{30}^{+} = 1000000 \cdot \frac{l_{80}^{+}}{l_{30}^{+}} = 1000000\frac{801,914}{986,6943} = 812727,914$$

Y aplicando un interés constante anual del 2 %:

$$\Pi = \frac{\pi}{(1+0,02)^{50}} = 301951,1$$

b)

Por un lado tenderemos que con el nuevo seguro de fallecimiento ambos seguros conllevarán una prima de :

$$\pi = 812727,914 + 200000 \cdot {}_{50}q_{30}^{-} = 812727,914 + 200000 \cdot \left(1 - \frac{l_{80}^{-}}{l_{30}^{-}}\right)$$

Los valores recargados de los supervivientes serán:

$$l_{80}^{+} = l_0 \cdot {}_{80}p_0 - z_{\alpha}\sqrt{l_0 \cdot {}_{80}p_0 \cdot {}_{80}q_0} = 1000 \cdot 0,776076 - 1,96\sqrt{1000 \cdot 0,776076.0,223924} = 750,238$$

$$l_{30}^{+} = l_0 \cdot {}_{30}p_0 - z_{\alpha}\sqrt{l_0 \cdot {}_{30}p_0 \cdot {}_{30}q_0} = 1000 \cdot 0,977503 - 1,96\sqrt{1000 \cdot 0,977503.0,022497} = 968,3117$$

Por lo que la prima quedará como: $\pi = 812727,914 + 200000 \cdot \left(1 - \frac{750,238}{968,3117}\right) = 857770$

Y el total de recursos por estas primas será: R=85770.30=25733100 €

Los compromisos a los que tendrá que hacer frente serán:

$$C = 1000000.S + 200000.F = 1000000.S + 200000.(30 - S) = 6000000 + 800000S$$

con F= número de fallecidos, S=número de supervivientes y

$$S \to B(30; {}_{50}p_{30}) \equiv B(30; \frac{l_{80}}{l_{50}}) \equiv$$

$$\equiv B(30; 0,79394) \xrightarrow{aprox} N(30 \cdot 0,79394; \sqrt{30 \cdot 0,79394 \cdot (1 - 0,79394)}) \equiv N(23,8182; 2,2154)$$

y por lo tanto los compromisos seguirán aproximadamente también una Normal:

$$\mathrm{C} \to \mathrm{N}(6.10^6 + 8.10^5 \cdot \mu_s;; 8 \cdot 10^5.\sigma_s) \equiv N(25054560; 1772320)$$

Lo que implicará que el riesgo de la cartera medido como probabilidad de no poder hacer frente a sus compromisos será:

$$P(C > R) = P(Z > \frac{R - \mu_c}{\sigma_c}) = P(Z > \frac{25733100 - 25054560}{1772320} = P(Z > 0,3828) = 0,351$$

Un riesgo del 35,1% (muy alto)

4.-Un siniestro tiene para su cuantía monetaria una función de distribución lgN(μ=8, σ=2) ¿cuál es la probabilidad de tener un siniestro cuya cuantía se encuentre entre 7000 y 8000 euros? (0.5)

Sea X la variable aleatoria "cuantía del siniestro

$$X \to \lg N[8;2]$$
$$¿P(7000 < x < 8000) \text{ tipificando}$$
$$P(\frac{\ln 7000 - 8}{2} t < \frac{\ln 8000 - 8}{2}) = P(\frac{8,853 - 8}{2} t < \frac{8,987 - 8}{2}) =$$
$$P(0,4265 < t < 0,4485) = 0,008 = F(0,4485) - F(0,4265) =$$
$$0,673 - 0,665 = 0,008$$

5.- Se supone que el tiempo que transcurre entre dos accidentes registrados entre los asegurados de nuestra compañía sigue una distribución exponencial. Y que el tiempo medio que transcurre entre dos de ellos es de 12 horas .¿Cuál es la probabilidad de que en un día no tengamos ningún parte por accidente? (0.75)

Tiempo medio es 12 horas por tanto $\mu = 12 = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = 0,083333$

Por lo que X = tiempo(en horas) entre partes de accidente :

$$X \to \exp(\alpha = 0,083333)$$

P(ningún accidente en un día)=P(X > 24) = S(x=24) (función de supervivencia)

$$S(X) = P(x > X) = 1 - F(X) = 1 - (1 - e^{-\alpha X}) = e^{-\alpha X}$$

por lo que $S(24) = e^{-0,083333 \cdot 24} = 0,1353$

6.La proporción de graves entre los heridos de los "Bous al carrer" es del 5% , la mitad de ellos lo son en la pierna . ¿Cuál es la probabilidad de que el tercer herido grave en la pierna sea el cuarto herido en producirse? (0.5)

La proporción heridos graves en la pierna es el 50% del 5% por tanto el 2,5% del total.
x= {número de heridos (pruebas) necesarios para conseguir K=3 heridos graves en la pierna } x será un modelo Binomial negativo $x \Rightarrow BN(3;0,025)$

Se nos pregunta por x = 4 (núero de heridos)

$$P(x) = \binom{x-1}{x-k} q^{x-k} p^k$$

$$P(x=4) = \binom{3}{1} 0,975^1 0,025^3 = 3 \cdot 0,975 \cdot 0,000015625 = 0,000045$$

7.- Dados dos individuos x e y pertenecientes a dos poblaciones que cumplen un modelo de Makeham con funciones de supervivencia respectivas:

$$\boxed{\begin{array}{l} S(x) = 0.99^{x} \cdot 0.9^{(1.1^{x}-1)} \\ S(y) = 0.98^{y} \cdot 0.95^{(1.05^{x}-1)} \end{array}}$$

Constituyen un grupo en el que x tiene 20 años e y tiene 25, ¿Cuál es la probabilidad de que el grupo se disuelva antes de 20 años? (1.5)

Identificando los parámetros de una ley de Makeham tenemos que :

$$\text{para x: } S = 0.99 \quad g = 0.9 \quad c = 1.1$$
$$\text{para y: } S = 0.98 \quad g = 0.95 \quad c = 1.05$$

De forma que :

$$_{n}p_{x} = S^{n} g^{C^{X}(C^{n}-1)}$$

$$_{20}p_{20}^{x} = 0.99^{20} \cdot 0.9^{1.1^{20}(1.1^{20}-1)}$$ y como nos piden la probabilidad de disolución:

$$_{20}p_{25}^{y} = 0.98^{25} \cdot 0.95^{1.05^{25}(1.05^{20}-1)}$$

$$_{20}q_{20,25} = 1 - {}_{20}p_{20,25} = 1 - \left({}_{20}p_{20}^{x} \cdot {}_{25}p_{20}^{y} \right) = 1 - (0.99^{20} \cdot 0.9^{1.1^{20}(1.1^{20}-1)} . 0.98^{25} \cdot 0.95^{1.05^{25}(1.05^{20}-1)}) =$$
$$= 1 - (0.014111963 \cdot 0.452828853) = 0.993609695$$

Edad	1985 lx	1990 lx	1995 lx
0	1000000	1000000	1000000
1	993225	993256	994567
2	992570	992553	992469
………..	………..	………..	………..
………..	………..	………..	………..
29	978475	978479	978417
30	977503	977509	977478
31	976570	976577	976518
32	975679	975688	975659
33	974784	974794	974738
34	973902	973914	973859
35	973040	973053	973026
36	972207	972222	972170
………..	…..	………..	………..
44	964896	964928	964894
45	963770	963804	963787
46	962571	962606	962575
47	961275	961312	961282
48	959936	959974	959960
49	958556	958596	958569
50	956973	957014	957001
51	955221	955264	955240
52	953292	953336	953325
53	951227	951273	951252
54	948805	948852	948833
55	946282	946331	946322
56	943616	943666	943650
57	940820	940872	940864
58	937837	937890	937877
59	934651	934706	934700
60	931327	931383	931373
61	927652	927710	927701
62	923699	923742	923719
63	919510	919555	919544
64	915074	915120	915100
65	910245	910293	910274
66	904965	905014	905005
67	899382	899433	899417
68	893382	893434	893420
69	886917	886971	886964
70	880035	880090	880079
71	872774	872831	872821
72	864993	865051	865043
73	856516	856576	856572
74	847325	847386	847381
75	837366	837429	837425
76	826635	826699	826698
77	815179	815245	815244
78	802983	803050	803051
79	789988	790057	790058
80	776076	776146	776150