TEMA 1: Principales modelos de mortalidad. Modelización estocástica.

- Ley de De Moivre.
- Leyes de Dormoy y de Sang.
- Leyes de Gompertz y de Makeham.
- Otros modelos de mortalidad.

Estudiaremos aquí distintos modelos de comportamiento aleatorio de las funciones biométricas. En cada caso el modelo propone una forma funcional para la función de supervivencia, el tanto instantáneo de mortalidad, la probabilidad de supervivencia o/y la probabilidad de fallecimiento.

La razón e interés de la construcción, diseño y estudio de los modelos de supervivencia pivota sobre dos ámbitos: uno metodológico y otro práctico:

Metodológicamente la consideración de algunas hipótesis sobre los fenómenos biométricos conlleva una estructura funcional de algunas de las funciones biométricas.

En el ámbito práctico, una vez seleccionado un modelo que implica un forma funcional para una determinada función biométrica, ésta dependerá de unos pocos parámetros (2 o 3) y una vez determinados (generalmente estimados estadísticamente) la obtención de cualquier "incógnita" biométrica se convierte en un simple problema de cálculo.

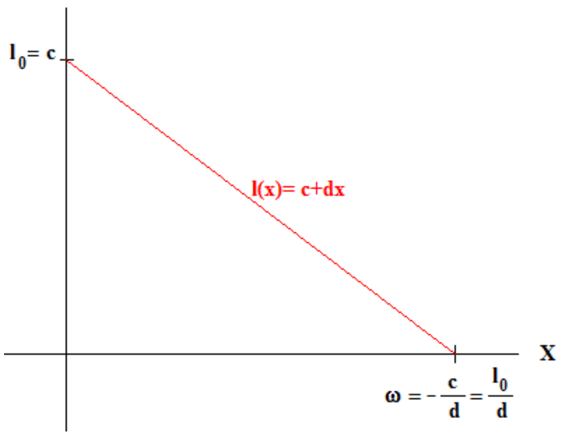
Antes de introducirnos en los distintos modelos hay que tener en cuenta finalmente que, aunque los estudiaremos separadamente, en la práctica suelen tomarse muchas veces de forma combinada aplicando un modelo distinto a distintos tramos de edad.

Ley de De Moivre

La ley de De Moivre supone que la **función de supervivencia es una función lineal de la edad**: $\boxed{l(x)=c+d.x}$ para $x \geq 0$

Los parámetros c y d son fácilmente identificables:

$\boxed{l_0 = c + d .0= c}$ $\quad l_\omega = 0 = c + d.\omega \rightarrow \boxed{\omega = -c/d}$



Como la ordenada en el origen es l_0 y la pendiente es $-(l_0/\omega)$, podemos escribir la ley de De Moivre como:

$$\boxed{l(x)=l_0-\frac{l_0}{\omega}x=l_0(1-\frac{x}{\omega})}$$

Para edades enteras la función de supervivencia será una progresión aritmética decreciente con diferencia l_0/ω : Esta diferencia es, en realidad, las defunciones anuales:

$$d_x = l_x - l_{x+1} = l_0(1-\frac{x}{\omega}) - l_0(1-\frac{x+1}{\omega}) = \frac{l_0}{\omega}$$

Es decir, el modelo supone que las defunciones son iguales todos los años y coinciden con la pendiente cambiada de signo de la f. de supervivientes, en definitiva, igual al tamaño de la cohorte dividido por la edad de extinción, ya que los fallecimientos se distribuyen igualitariamente todos los años.

Las probabilidades de fallecimiento serán:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{\frac{l_0}{\omega}}{l_0(1-\frac{x}{\omega})} = \frac{1}{\omega - x}$$

Por lo tanto la probabilidad anual de fallecimiento es creciente, lo que es lógico si pensamos que el número de fallecidos es constante pero pertenecen a un colectivo que va menguando con la edad.

Igualmente la tasa instantánea de mortalidad también será creciente y, de hecho, coincide con la probabilidad anual de fallecimiento:

$$\mu_x = -\frac{l'(x)}{l(x)} = -\frac{-\frac{l_0}{\omega}}{l_0(1-\frac{x}{\omega})} = \frac{1}{\omega - x}$$

Como el tanto instantáneo crece con la edad este modelo suele usarse para tramos de edades altas.

En cuanto a las probabilidades temporales de supervivencia y fallecimiento para más de un año tendremos:

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_0(1-\frac{x+n}{\omega})}{l_0(1-\frac{x}{\omega})} = \frac{\omega - x - n}{\omega - x} = 1 - \frac{n}{\omega - x} = 1 - n \cdot \mu_x$$

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = 1 - \left(1 - n \cdot \mu_x\right) = n \cdot \mu_x$$

Esta última expresión muestra que la probabilidad de fallecer en un tramo de tiempo es proporcional a μ_x según el factor n (años del tramo): por lo que, por ejemplo, la probabilidad de que un individuo fallezca en los próximos 10 años es el doble de que lo haga en los próximos 5.

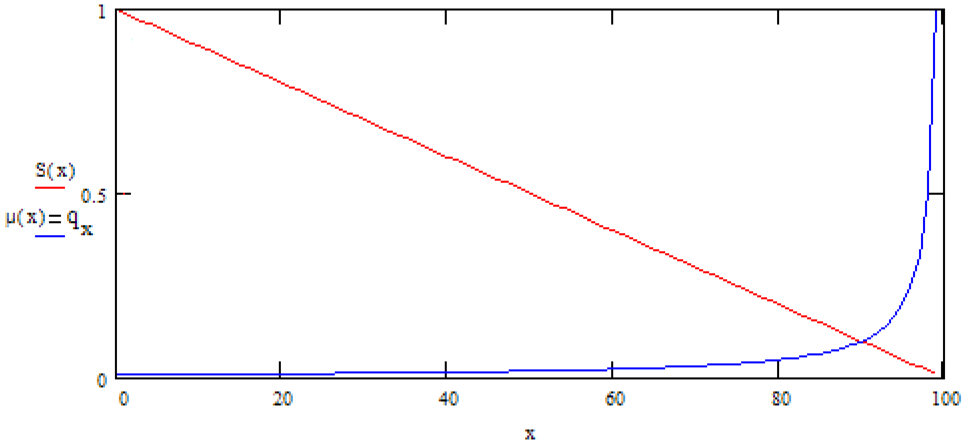
La función de supervivencia S(x) y la función de distribución de la edad de fallecimiento puede obtenerse también a partir de l(x) como:

$S(x)=l(x)/l_0$ y $F(x)=1-S(x)$

Tendremos que $\boxed{S(x) = \frac{l(x)}{l_0} = 1 - \frac{x}{\omega}} \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{x}{\omega}}$

Por lo que: f(x)= 1 /ω lo que supone que según la ley de De Moivre la variable edad de fallecimiento sigue una Distribución **Uniforme** en [0,ω]

En el siguiente gráfico se muestran las funciones de: Supervivencia (la de distribución sería la diagonal contraria) y tanto instantáneo de mortalidad (que coincide con la probabilidad de fallecimiento) en el modelo de De Moivre



Igualmente es muy sencillo ver que la distribución de la vida residual es también una distribución uniforme en el intervalo [x,ω], ya que

$$g_x(t) = {}_t p_x \cdot \mu(x+t) = \frac{l(x+t)}{l(x)} . \frac{1}{\omega - x - t} = \frac{l_0(1 - \frac{x+t}{\omega})}{l_0(1 - \frac{x}{\omega})} \frac{1}{\omega - x - t} = \frac{1}{\omega - x}$$

Que es la función de densidad de una uniforme en [x,ω] y ,de aquí, es elemental concluir que la esperanza de vida en x y la vida residual probable son, precisamente, ((ω-x) / 2)

Resumiendo en esta ficha el modelo:

Modelo	De Moivre
enunciado	La supervivencia es función lineal (decreciente) de la edad
Distribución de X	uniforme
l(x)	$l_0(1-\frac{x}{\omega})$
d_x	$\frac{l_0}{\omega}$
p_x	$\frac{\omega-x-1}{\omega-x}$
q_x	$\frac{1}{\omega-x}$
μ_x	$\frac{1}{\omega-x}$
${}_np_x$	$1-n.\mu_x$
${}_nq_x$	$n.\mu_x$
S(x)	$1-\frac{x}{\omega}$
F(x)	$\frac{x}{\omega}$
f(x)	$\frac{1}{\omega}$
$g_x(t)$	$\frac{1}{\omega-x}$
e_x	$\frac{\omega-x}{2}$
V_x	$\frac{\omega-x}{2}$

Primera ley de Dormoy

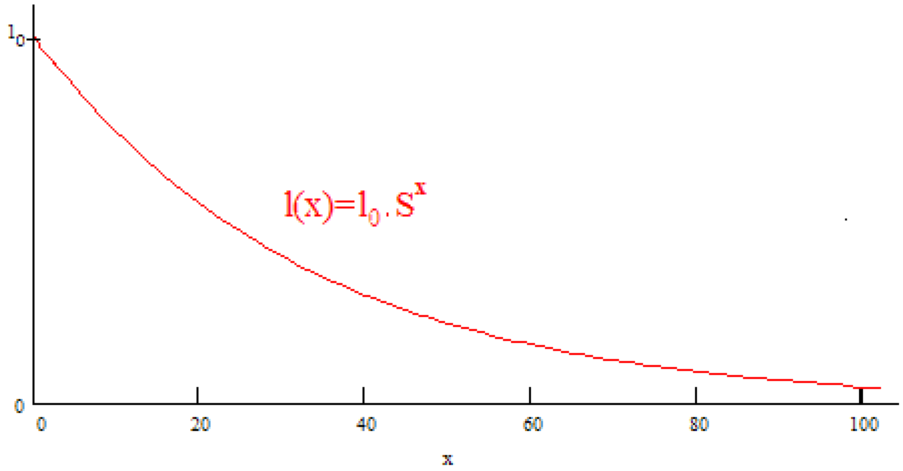
La primera ley de Dormoy supone que la forma funcional de **la función de supervivientes** l(x) **es exponencial** según:

$$\boxed{l(x) = K \cdot S^{x}}$$

Donde **S** es un valor **menor que 1** para que l(x) sea una función decreciente

Para x= 0 tendremos que $l(0)=l_0$ y por lo tanto el parámetro K es el valor inicial de la cohorte

$$l(0) = l_0 = K \cdot S^0 = K \quad \rightarrow \quad \boxed{l(x) = l_0 \cdot S^{x}}$$



Alternativamente podemos considerar $S=e^{-\alpha}$ y el modelo para l(x) se podría re-escribir como:

$$l(x) = l_0 \cdot S^{x} = l_0 \cdot e^{-\alpha x}$$

Para edades enteras los valores de la función de supervivencia se encuentran en progresión geométrica decreciente de razón S (S<1):

$$l_{x+1} = l_0 \cdot S^{x+1} = l_0 \cdot S^{x} \cdot S = l_x S$$

De aquí se deduce que la probabilidad de supervivencia anual es constante e igual a S ya que :

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = S$$

Como consecuencia la probabilidad anual de fallecimiento será igualmente constante q_x= 1-S

Para obtener la tasa instantánea de mortalidad derivemos la función l(x):

$$l'(x) = l_0 S^{x} (\ln(S))$$

Y el tanto instantáneo de mortalidad será la *constante* –ln(S), en efecto:

$$\mu(x) = -\frac{l'(x)}{l(x)} = -\frac{l_0 S^{x} (\ln(S))}{l_0 S^{x}} = -\ln(S) = \alpha$$

Por lo tanto la fuerza de la mortalidad se está considerando independiente de la edad.

Puede tener sentido esta consideración, y por lo tanto este modelo, de forma muy aproximada, en los tramos centrales de edad.

Veamos ahora cómo se comportan las probabilidades temporales de supervivencia y fallecimiento:

$$ {}_n p_x = \frac{l(x+n)}{l(x)} = \frac{l_0 \cdot S^{x+n}}{l_0 \cdot S^x} = S^n \qquad {}_n q_x = 1 - S^n $$

Que son también independientes de la edad.

En cuanto a la función de supervivencia S(x) tendremos que :

$$ S(x) = \frac{l(x)}{l_0} = \frac{l_0 S^x}{l_0} = S^x $$

La función de distribución de la edad de fallecimiento será:

$F(x)=1-S^x$

Y derivándolo obtenemos las de densidad:

$$ f(x) = F'(x) = -S^x(\ln(S)) $$

Nótese que se trata de la función de densidad de un distribución exponencial cuyo parámetro sería $\alpha = -\ln(S)$:

$$ f(x) = -S^x(\ln(S)) = \alpha(e^{-\alpha})^x = \alpha e^{-\alpha x} $$

La función de densidad de la variable vida residual vendrá dada por:

$$ g_x(t) = {}_t p_x \cdot \mu(x+t) = S^t(-\ln(S)) $$

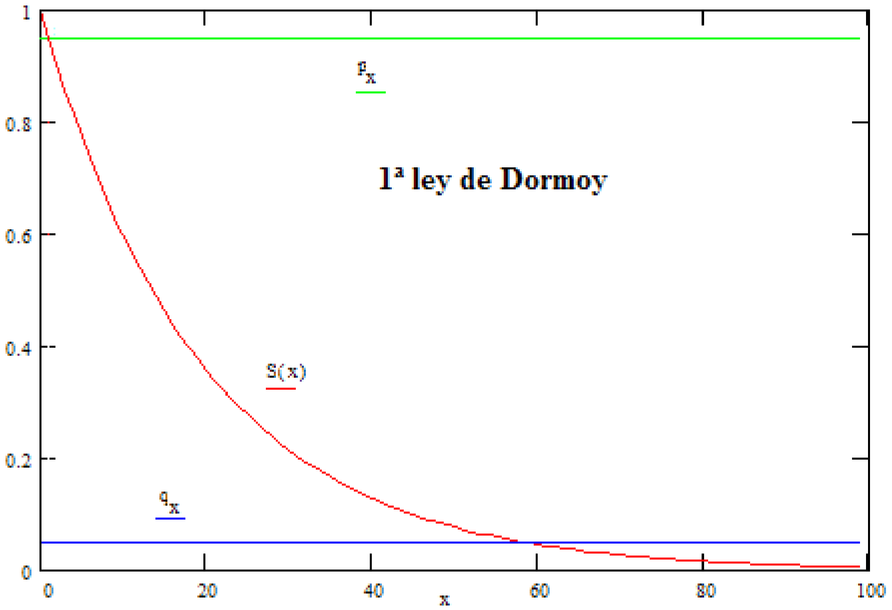
Que es también la función de densidad de una exponencial con parámetro $\alpha = -\ln(s)$

La esperanza de vida será la media de la vida residual que al seguir una distribución exponencial tomará el valor recíproco de su parámetro :

$$ e_x = E\left(t \mid t \to \exp(\alpha = -\ln(S))\right) = -\frac{1}{\ln(S)} $$

Y la vida media probable acabará siendo :

$$ V_x = -\frac{\ln 2}{\ln(S)} $$



El gráfico muestra la función de supervivencia, la probabilidad anual de supervivencia y muerte para una ley (1ª) de Dormoy de parámetro S=0.95

Modelo	Primera ley de Dormoy
enunciado	La supervivencia es función exponencial (decreciente) de la edad
Distribución de X	Exponencial (α=-ln(S))
l(x)	$l_0 \cdot S^x$
d_x	$l_0 \cdot S^x(1-S)$
p_x	S (constante)
q_x	1-S (constante)
μ_x	$-\ln(S)$ (constante)
${}_np_x$	S^n
${}_nq_x$	$1-S^n$
S(x)	S^x
F(x)	$1-S^x$
f(x)	$-S^x(\ln(S))$ ($x \to \exp(\alpha = -\ln(S))$)
$g_x(t)$	$-\ln(S) \cdot S^t$
e_x	$-\dfrac{1}{\ln(S)}$
V_x	$-\dfrac{\ln 2}{\ln(S)}$

Segunda ley de Dormoy

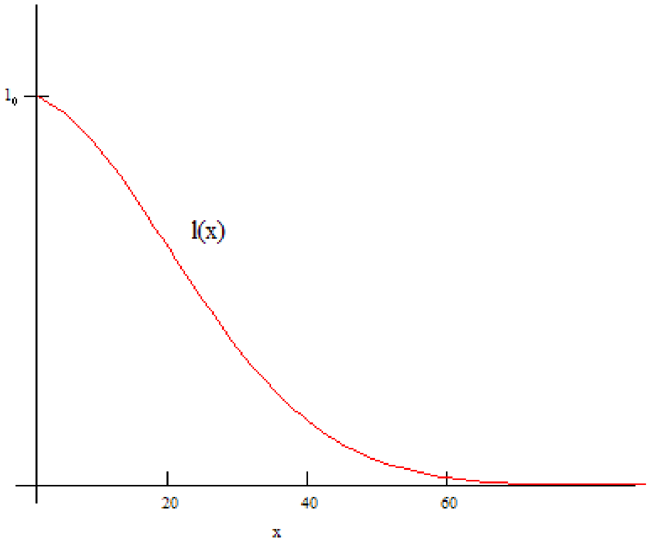
En el modelo anterior ni la tasa instantánea de mortalidad ni la probabilidad (anual) de fallecimiento dependían de la edad. En algunas situaciones esto será poco realista. Precisamente para subsanar esto y que μ_x y q_x sí dependan de x , la segunda ley de Dormoy propone una función de supervivientes l(x) según el siguiente esquema:

$$l(x) = K \cdot S_1^x \cdot S_2^{x^2}$$

Donde S_1 y S_2 son inferiores a la unidad y como en la primera ley $K=l_0$.

$$\boxed{l(x) = l_0 \cdot S_1^x \cdot S_2^{x^2}}$$

El siguiente gráfico muestra cómo quedaría l(x) para $S_1=0.995$ y $S_2=0.999$



Alternativamente podemos considerar $S_1=e^{-\alpha}$ y $S_2=e^{-\beta}$ y el modelo para l(x) se podría re-escribir como:

$$\boxed{l(x) = l_0 \cdot S_1^x \cdot S_2^{x^2} = l_0 \cdot e^{-(\alpha x + \beta x^2)}}$$

En la 2ª ley de Dormoy las probabilidades de supervivencia y fallecimiento anual resultarán:

$$\boxed{p_x = \frac{l(x+1)}{l(x)} = \frac{l_0 S_1^{x+1} S_2^{(x+1)^2}}{l_0 S_1^x S_2^{x^2}} = S_1 S_2^{2x+1}}$$

$$\boxed{q_x = 1 - p_x = 1 - (S_1 S_2^{2x+1})}$$

Para determinar el tanto instantáneo de mortalidad, primero derivamos la función de supervivientes:

$$l'(x) = l_0 \cdot S_1^x \cdot \left(2x \cdot S_2^{x^2} \cdot \ln(S_2)\right) + l_0 \cdot S_2^{x^2} \cdot \left(S_1^x \cdot \ln(S_1)\right) =$$
$$= l_0 \cdot S_1^x \cdot S_2^{x^2}\left(2 \cdot \ln(S_2) \cdot x + \ln(S_1)\right) = l(x)\left(2 \cdot \ln(S_2) \cdot x + \ln(S_1)\right)$$

Por lo que el tanto instantáneo de mortalidad quedará como:

$$\mu(x) = -\frac{l'(x)}{l(x)} = -\frac{l(x) \cdot \left(2\ln(S_2)x + \ln(S_1)\right)}{l(x)} = -2\ln(S_2)x - \ln(S_1)$$

(alternativamente $\mu(x)=\alpha+2\beta x$)

La probabilidades temporales de supervivencia y muerte serán, para la segunda ley de Dormoy:

$${}_n p_x = \frac{l(x+n)}{l(x)} = \frac{l_0 \cdot S_1^{x+n} \cdot S_2^{(x+n)^2}}{l_0 \cdot S_1^x \cdot S_2^{x^2}} = S_1^n \cdot S_2^{2nx+n^2} = \left(S_1 \cdot S_2^{2x+n}\right)^n$$
$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = 1 - \left(S_1 \cdot S_2^{2x+n}\right)^n$$

Las función de supervivencia y distribución serán :

$$S(x) = \frac{l(x)}{l_0} = S_1^x \cdot S_2^{x^2}$$
$$F(x) = 1 - S_1^x \cdot S_2^{x^2}$$

(alternativamente $S(x)=e^{-(\alpha x+\beta x^2)}$ y $F(x)=1-e^{-(\alpha x+\beta x^2)}$)

Y la función de densidad quedará como:

$$f(x) = F'(x) = -\left(2x \cdot \ln(S_2) + \ln(S_1)\right) S_1^x \cdot S_2^{x^2}$$

(alternativamente $f(x)=(2\beta x+\alpha).e^{-(\alpha x+\beta x^2)}$)

En cuanto a la distribución de la vida residual T_x=(X-x) su función de densidad quedará como:

$$g_x(t) = {}_t p_x \cdot \mu(x+t) = \left(S_1 \cdot S_2^{2x+t}\right)^t \left(-2\ln(S_2)(x+t) - \ln(S_1)\right)$$

A partir de la densidad de vida residual podríamos obtener la esperanza de vida como la esperanza de la variable T_x, aunque se suele obtener a partir de la integral de la probabilidad de supervivencia temporal, y aún así por aproximación numérica:

$$\overline{e}_x = E(T_x) = \int_0^\infty t.g(t)dt =$$
$$\overline{e}_x = \int_0^\infty {}_t p_x dt = \int_0^\infty \left(S_1 \cdot S_2^{2x+t}\right)^t dt$$

En cuanto a la vida residual probable puede obtenerse igualando a ½ la probabilidad temporal de supervivencia en ella y tendríamos:

$$ {}_{v_x}p_x = \frac{1}{2} \to \left(S_1 \cdot S_2^{2x+v_x}\right)^{v_x} = S_1^{v_x} \cdot S_2^{2xv_x+v_x^2} = \frac{1}{2} \to \text{tomando logaritmos:} $$

$$ v_x \cdot \ln(S_1) + (2xv_x + v_x^2)\ln(S_2) = -\ln(2) \to \text{ resolviendo la ecuación de 2º grado} $$

$$ v_x = \frac{-2x\ln(S_2) - \ln(S_1) - \sqrt{\left(2x\ln(S_2) + \ln(S_1)\right) - 4\ln(2)\ln(S_2)}}{2\ln(S_2)} $$

Modelo	Segunda ley de Dormoy
enunciado	La supervivencia es función exponencial-cuadrática (decreciente) de la edad
Distribución de X	Exponencial-cuadrática
l(x)	$l_0 \cdot S_1^x \cdot S_2^{x^2}$ $\quad l_0 \cdot e^{-(\alpha x+\beta x^2)}$
d_x	$l_0 \cdot S_1^x \cdot S_2^{x^2} \cdot \left(1-(S_1 S_2^{2x+1})\right)$
p_x	$S_1 S_2^{2x+1}$
q_x	$1-(S_1 S_2^{2x+1})$
μ_x	$-2\ln(S_2)x - \ln(S_1)$ $\quad \alpha+2\beta x$
${}_np_x$	$\left(S_1 \cdot S_2^{2x+n}\right)^n$
${}_nq_x$	$1-\left(S_1 \cdot S_2^{2x+n}\right)^n$
S(x)	$S_1^x \cdot S_2^{x^2}$ $\quad e^{-(\alpha x+\beta x^2)}$
F(x)	$1-S_1^x \cdot S_2^{x^2}$ $\quad 1\text{-}e^{-(\alpha x+\beta x^2)}$
f(x)	$-\left(2x \cdot \ln(S_2) + \ln(S_1)\right) S_1^x \cdot S_2^{x^2}$ $\quad (2\beta x+\alpha).e^{-(\alpha x+\beta x^2)}$
$g_x(t)$	$\left(S_1 \cdot S_2^{2x+t}\right)^t \left(-2\ln(S_2)(x+t) - \ln(S_1)\right)$
e_x	$\int_0^\infty \left(S_1 \cdot S_2^{2x+t}\right)^t dt$
V_x	$\frac{-2x\ln(S_2) - \ln(S_1) - \sqrt{\left(2x\ln(S_2) + \ln(S_1)\right) - 4\ln(2)\ln(S_2)}}{2\ln(S_2)}$

Ley de Sang

La ley de Sang es una modificación de la primera ley de Dormoy añadiendo a la función l(x) la adición una constante independiente de la edad:

$$\boxed{l(x) = a + Kb^x}$$

Con K positivo y b comprendido entre 0 y 1. Discutiendo la función para sus valores singulares (l(0), l(ω)) podemos evaluar algunos de sus parámetros:

$$\left.\begin{array}{l} l(0) = l_0 = a + Kb^0 = a + K = l_0 \rightarrow a = l_0 - K \\ l(\omega) = 0 = a + Kb^\omega \rightarrow l_0 - K + Kb^\omega = 0 \end{array}\right\}$$

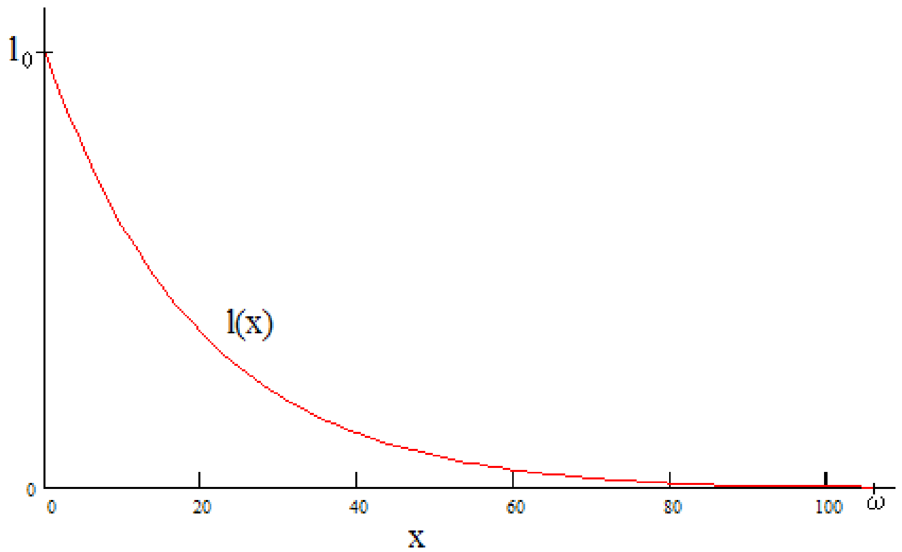
$$l_0 - K(1-b^\omega) = 0 \rightarrow \boxed{K = \frac{l_0}{(1-b^\omega)}}$$ y entonces el valor de a se podría obtener como:

$$a = l_0 - K = l_0 - \frac{l_0}{(1-b^\omega)} = \boxed{a = -\frac{l_0 b^\omega}{1-b^\omega}}$$

Quedando la función l(x) como:

$$\boxed{l(x) = a + Kb^x = -\frac{l_0 b^\omega}{1-b^\omega} + \frac{l_0}{1-b^\omega} b^x = \frac{l_0}{1-b^\omega}(b^x - b^\omega)}$$

El siguiente gráfico muestra la función de supervivientes según la ley de Sang



Para determinar el tanto instantáneo de mortalidad, primero derivamos la función de supervivientes:

$$l'(x) = \frac{l_0}{1-b^\omega} b^x \ln(b)$$

Por lo que el tanto instantáneo de mortalidad quedará como:

$$\mu(x)=-\frac{l'(x)}{l(x)}=-\frac{\frac{l_0}{1-b^{\omega}}b^x\ln(b)}{\frac{l_0}{1-b^{\omega}}(b^x-b^{\omega})}=-\frac{b^x\ln(b)}{(b^x-b^{\omega})}=\frac{b^x\ln(b)}{(b^{\omega}-b^x)}=\frac{\ln(b)}{(b^{\omega-x}-1)}$$

Resultando un tanto instantáneo positivo (numerador y denominador son ambos negativos) y creciente con la edad.

Las probabilidades anuales de supervivencia y fallecimiento, quedarán como:

$$p_x=\frac{l(x+1)}{l(x)}=\frac{\frac{l_0}{1-b^{\omega}}(b^{x+1}-b^{\omega})}{\frac{l_0}{1-b^{\omega}}(b^x-b^{\omega})}=\frac{(b^{x+1}-b^{\omega})}{(b^x-b^{\omega})}=\frac{\frac{(b^{x+1}-b^{\omega})}{b^x}}{\frac{(b^x-b^{\omega})}{b^x}}=\frac{b-b^{\omega-x}}{1-b^{\omega-x}}$$

$$q_x=1-p_x=1-\frac{b-b^{\omega-x}}{1-b^{\omega-x}}=\frac{1-b}{1-b^{\omega-x}}$$

Las probabilidades temporales de supervivencia y fallecimiento serán:

$$_np_x=\frac{l(x+n)}{l(x)}=\frac{\frac{l_0}{1-b^{\omega}}(b^{x+n}-b^{\omega})}{\frac{l_0}{1-b^{\omega}}(b^x-b^{\omega})}=\frac{(b^{x+n}-b^{\omega})}{(b^x-b^{\omega})}=\frac{\frac{(b^{x+n}-b^{\omega})}{b^x}}{\frac{(b^x-b^{\omega})}{b^x}}=\frac{b^n-b^{\omega-x}}{1-b^{\omega-x}}$$

$$_nq_x=1-{}_np_x=1-\frac{b^n-b^{\omega-x}}{1-b^{\omega-x}}=\frac{1-b^n}{1-b^{\omega-x}}$$

La función de supervivencia y la de distribución de la variable X=edad de fallecimiento tomará la expresión:

$$S(x)=\frac{l(x)}{l_0}=\frac{1}{l_0}\frac{l_0}{1-b^{\omega}}(b^x-b^{\omega})=\frac{(b^x-b^{\omega})}{1-b^{\omega}}$$

$$F(x)=1-S(x)=1-\frac{(b^x-b^{\omega})}{1-b^{\omega}}=\frac{1-b^x}{1-b^{\omega}}$$

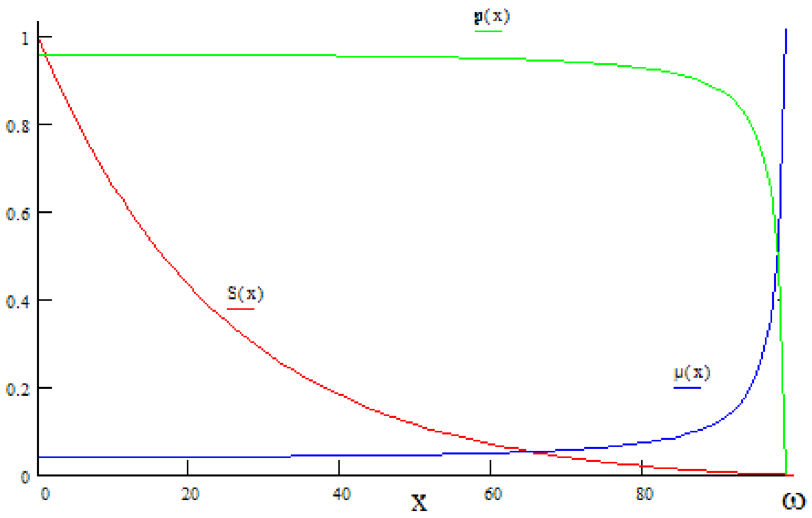
Resultando la función de densidad: $f(x)=F'(x)=-\frac{\ln(b).b^x}{1-b^{\omega}}$

Que son las funciones de supervivencia distribución y densidad de una distribución exponencial truncada para valores $X\in[0,\omega]$ con un valor del parámetro $\alpha=-\ln(b)$.

En efecto, por ejemplo, para la función de densidad nos quedaría:

$f(x)=-\frac{\ln(b).b^x}{1-b^{\omega}}=\frac{\alpha\cdot e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha\omega}}=\frac{1}{F_{\exp(\alpha)}(\omega)}\alpha\cdot e^{-\alpha x}$ E, igualmente podríamos comprobarlo para F(x) o S(x)

En este gráfico se muestran las funciones de supervivencia, tanto instantáneo de mortalidad y probabilidad anual de supervivencia, para un modelo de supervivencia de Sang con b=0.96:



En cuanto a la distribución de la vida residual a la edad x, tendremos que :

$$g_x(t) = {}_t p_x \cdot \mu(x+t) = \frac{b^t - b^{\omega-x}}{1-b^{\omega-x}} \frac{\ln(b)}{(b^{\omega-x-t}-1)} = \frac{b^t(1-b^{\omega-x-t})}{1-b^{\omega-x}} \frac{\ln(b)}{(b^{\omega-x-t}-1)} = -\frac{b^t \ln(b)}{1-b^{\omega-x}}$$

Que vuelve a ser, de nuevo, la función de densidad de una exponencial truncada, esta vez entre [0,ω-x]

La esperanza de la variable *vida residual* será la esperanza de vida en x:

$$\bar{e}_x = E[T] = \int_0^{\omega-x} t \cdot \left(-\frac{b^t \ln(b)}{1-b^{\omega-x}}\right) dt = -\frac{\ln(b)}{1-b^{\omega-x}} \int_0^{\omega-x} t.b^t dt$$

resolviendo por partes:

u=t du=dt

dv=$b^t dt$ v=$\frac{b^t}{\ln(b)}$

$$\bar{e}_x = -\frac{\ln(b)}{1-b^{\omega-x}} \cdot \left(\left[\frac{tb^t}{\ln(b)}\right]_0^{\omega-x} - \int_0^{\omega-x} \frac{b^t}{\ln(b)} dt = \right)$$

$$= -\frac{1}{1-b^{\omega-x}} \cdot \left(\left[tb^t\right]_0^{\omega-x} - \int_0^{\omega-x} b^t dt \right) = -\frac{1}{1-b^{\omega-x}} \cdot \left((\omega-x)b^{\omega-x} - \left[\frac{b^t}{\ln(b)}\right]_0^{\omega-x} \right) =$$

$$= -\frac{1}{1-b^{\omega-x}} \cdot \left((\omega-x)b^{\omega-x} - \left(\frac{b^{\omega-x}-1}{\ln(b)}\right) \right) = -\frac{1}{1-b^{\omega-x}} \cdot \left((\omega-x)b^{\omega-x} + \left(\frac{1-b^{\omega-x}}{\ln(b)}\right) \right) =$$

$$= -\frac{(\omega-x)b^{\omega-x}}{1-b^{\omega-x}} - \frac{1}{\ln(b)}$$

Y la vida residual probable v_x la podemos obtener a partir de que :

$$ {}_{v_x}p_x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b^{v_x} - b^{\omega-x}}{1-b^{\omega-x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow b^{v_x} = \frac{1}{2}(1-b^{\omega-x}) + b^{\omega-x} \Rightarrow \frac{1}{2}(1+b^{\omega-x}) \Rightarrow $$

$$ \text{tomando logaritmos} \Rightarrow v_x \ln(b) = \ln(1+b^{\omega-x}) - \ln 2 \Rightarrow $$

$$ v_x = \frac{\ln(1+b^{\omega-x}) - \ln 2}{\ln(b)} $$

Modelo	ley de Sang
enunciado	La supervivencia es función exponencial (decreciente) de la edad más una constante
Distribución de X	Exponencial (α=-ln(b)) truncada al intervalo $(0,\omega)$
l(x)	$\frac{l_0}{1-b^{\omega}}(b^x - b^{\omega})$
d_x	$\frac{l_0}{1-b^{\omega}} b^x(1-b)$
p_x	$\frac{b-b^{\omega-x}}{1-b^{\omega-x}}$
q_x	$\frac{1-b}{1-b^{\omega-x}}$
μ_x	$\frac{\ln(b)}{(b^{\omega-x}-1)}$
${}_np_x$	$\frac{b^n - b^{\omega-x}}{1-b^{\omega-x}}$
${}_nq_x$	$\frac{1-b^n}{1-b^{\omega-x}}$
S(x)	$\frac{(b^x - b^{\omega})}{1-b^{\omega}}$ (x→exp(α= –ln(b)|truncada a [0,ω]))
F(x)	$\frac{1-b^x}{1-b^{\omega}}$ (x→exp(α= –ln(b)|truncada a [0,ω]))
f(x)	$-\frac{\ln(b).b^x}{1-b^{\omega}}$ (x→exp(α= –ln(b)|truncada a [0,ω]))
$g_x(t)$	$-\frac{b^t \ln(b)}{1-b^{\omega-x}}$ (T_x→exp(α= –ln(b)|truncada a [0,ω-x]))
e_x	$-\frac{(\omega-x)b^{\omega-x}}{1-b^{\omega-x}} - \frac{1}{\ln(b)}$
V_x	$\frac{\ln(1+b^{\omega-x})-\ln 2}{\ln(b)}$

Ley de Gompertz

La ley de Gompertz se plantea , al igual que hacía la segunda ley de Dormoy, considerar el tanto instantáneo de mortalidad creciente con la edad, pero con un crecimiento relativo constante (en la ley de Dormoy este crecimiento relativo es decreciente). Es decir que la ley Gompertz plantea que :

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\gamma$$

Con γ constante y positiva.
Integrando la expresión anterior:

$$\ln(\mu(x))=\gamma x+h \Rightarrow \mu(x)=e^{\gamma x+h}=BC^x$$

Donde B= e^h es positiva y C= e^γ >1, ya que γ era positiva.

Veamos la expresión que toma la función de supervivientes, l(x):

$$-\frac{l'(x)}{l(x)}=\mu(x)=BC^x \rightarrow \text{integrando} \rightarrow -\ln(l(x))=\frac{BC^x}{\ln(C)}+D \rightarrow$$

$$l(x)=e^{-\frac{BC^x}{\ln C}-D} \rightarrow l(x)=K\cdot g^{C^x}$$

con:

$$K=e^{-D}>0 \qquad g=e^{-\frac{B}{\ln C}} \quad |\, 0<g<1 \text{ (ya que } \frac{B}{\ln C}>0)$$

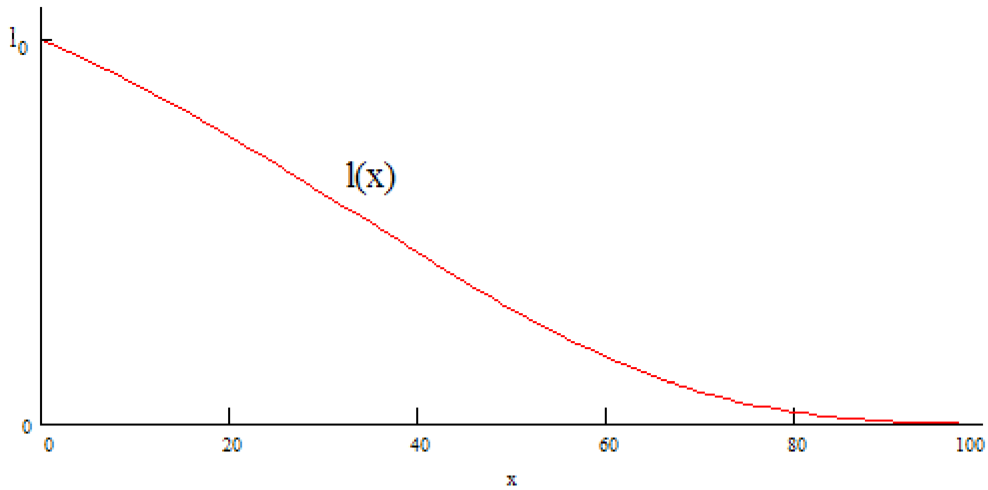
Podemos relacionar la constante K con l_0:

$$l_0=l(0)=K\cdot g^{C^0}=K\cdot g$$

Por lo que podemos reescribir la expresión de l(x) como:

$$l(x)=K\cdot g^{C^x}=\frac{l_0\cdot g^{C^x}}{g}=l_0\cdot g^{C^x-1}$$

Aquí se muestra la función l(x) según la ley de Gompertz para valores C=1.03 y g=0.7:



Teniendo en cuenta las expresiones anteriores es fácil ver que el tanto instantáneo de mortalidad, en función de los parámetros C y g quedaría como:

$$\mu(x)=-\ln(g).\ln(C).C^x$$

Las probabilidades temporales de supervivencia y muerte vendrán dadas por:

$$ {}_n p_x = \frac{l(x+n)}{l(x)} = \frac{l_0 \cdot g^{C^{x+n}-1}}{l_0 \cdot g^{C^x-1}} = g^{C^{x+n}-C^x} = g^{C^x(C^n-1)} $$

$$ {}_n q_x = 1 - {}_n p_x = 1 - g^{C^x(C^n-1)} $$

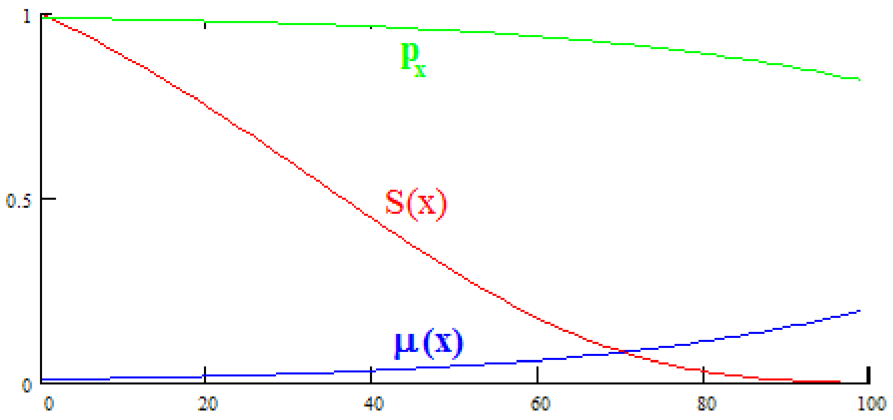
La función (teórica) de supervivencia, S(x), y las funciones de distribución y de densidad de la variable edad de fallecimiento serán:

$$ S(x) = \frac{l(x)}{l_0} = g^{C^x-1} $$

$$ F(x) = 1 - S(x) = 1 - g^{C^x-1} $$

$$ f(x) = F'(x) = -\ln(g).\ln(C).C^x \cdot g^{C^x-1} $$

El siguiente gráfico muestras las funciones S(x), p_x, μ(x) para una ley de Gompertz con C=1.03 y g=0.7



La vida residual a la edad x, $T_x(X)$ tendrá una función de densidad:

$$ g_x(t) = {}_t p_x \cdot \mu(x+t) = -\left(g^{C^x(C^t-1)} \cdot \ln(g).\ln(C).C^{x+t} \right) $$

Obtener la esperanza de T para determinar la esperanza de vida en x es difícil para valores generales y en cuanto a la vida probable , a partir de su definición, se puede obtener que es :

$$ v_x = \frac{1}{\ln C} \ln\left(1 - \frac{\ln 2}{C^x \ln g} \right) $$

Modelo	ley de Gompertz
enunciado	La mortalidad(tanto instántaneo) se considera creciente con un crecimiento relativo constante.
Distribución de X	
l(x)	$l_0 \cdot g^{C^x - 1}$ C >1, g <1 ambas positivas
d_x	
p_x	$g^{C^x (C-1)}$
q_x	$1 - g^{C^x (C-1)}$
μ_x	$-\ln(g).\ln(C).C^x$
${}_n p_x$	$g^{C^x (C^n - 1)}$
${}_n q_x$	$1 - g^{C^x (C^n - 1)}$
S(x)	$g^{C^x - 1}$
F(x)	$1 - g^{C^x - 1}$
f(x)	$-\ln(g).\ln(C).C^x \cdot g^{C^x - 1}$
$g_x(t)$	$-\left(g^{C^x (C^t - 1)} \cdot \ln(g).\ln(C).C^{x+t}\right)$
e_x	$E(T_x)$
V_x	$\dfrac{1}{\ln C} \ln\left(1 - \dfrac{\ln 2}{C^x \ln g}\right)$

Primera Ley de Makeham

Este modelo supone que el tanto instantáneo de fallecimiento obedece a la expresión:

$\mu(x) = A + BC^x$

En donde el segundo sumando coincide con la ley de Gompertz y supondría un factor de resistencia a la muerte decreciente con la edad y vendría a dar cuenta de las muertes por causas naturales, mientras que el primer sumando supondría un factor constante con la edad y vendría a registrar la mortalidad accidental.

A > 0, B > 0, 0 < C <1

La función de supervivientes $l(x)$ la obtendremos integrando la relación entre $l(x)$ y $\mu(x)$:

$$-\frac{l'(x)}{l(x)} = \mu(x) = A + BC^x \quad \Rightarrow \ln\left(l(x)\right) = -(Ax + \frac{BC^x}{\ln C} + D) \quad \Rightarrow$$

$$l(x) = e^{-(Ax + \frac{BC^x}{\ln C} + D)} \Rightarrow \boxed{l(x) = KS^x g^{C^x}}$$

donde:

$K = e^{-D}$ constante positiva

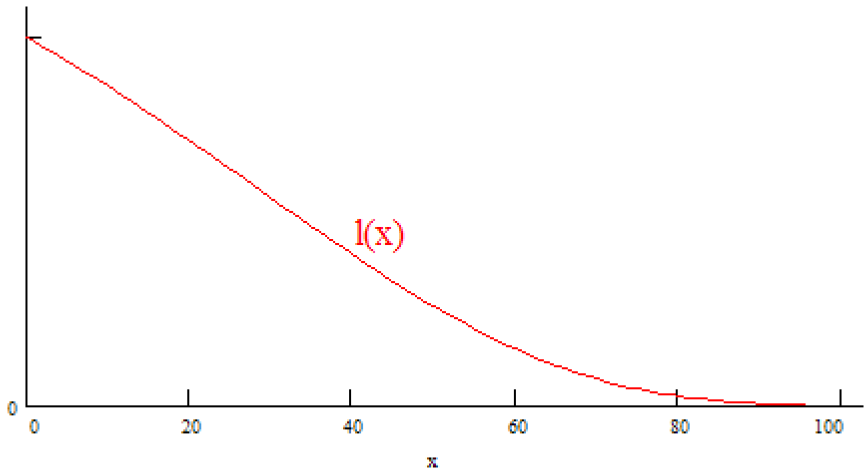
$g = e^{-\frac{BC}{\ln C}}$ constante menor que 1 ya que B/lnC es positivo

$S = e^{-A}$ constante menor que la unidad.

Teniendo en cuenta de $l(0) = l_0$: $l_0 = Kg$ y , por tanto: K= (l_0 / g) y nos quedará:

$$l(x) = KS^x g^{C^x} = \frac{l_0}{g} S^x g^{C^x} = \boxed{l(x) = l_0 S^x g^{C^x - 1}}$$

En este gráfico tenemos la función l(x) con C=1.03 ,g=0.7 y S=0.998:



Volviendo a la relación entre $l(x)$ y $\mu(x)$ podemos ver que:

$$\mu(x) = -\frac{l'(x)}{l(x)} = -\frac{l_0 S^x g^{C^x-1} \cdot \left(\ln S + \ln g \cdot \ln C \cdot C^x\right)}{l_0 S^x g^{C^x-1}} = -\ln S - \ln g \cdot \ln C \cdot C^x$$

Las probabilidades temporales de supervivencia y muerte serán:

$${}_n p_x = \frac{l(x+n)}{l(x)} = \frac{l_0 S^{x+n} g^{C^{x+n}-1}}{l_0 S^x g^{C^x-1}} = S^n g^{C^x(C^n-1)}$$

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = 1 - S^n g^{C^x(C^n-1)}$$

Y finalmente:

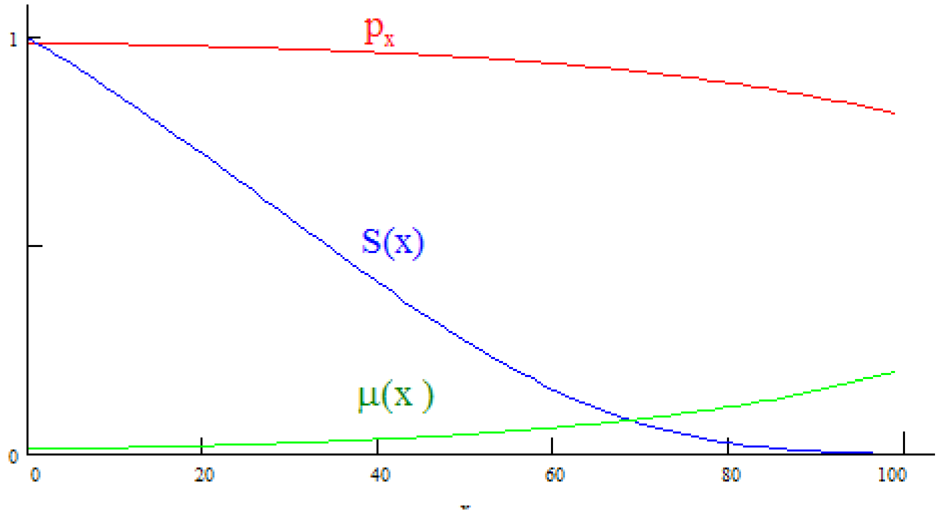
$$S(x) = \frac{l(x)}{l_0} = S^x g^{C^x-1}$$

$$F(x) = 1 - S(x) = 1 - S^x g^{C^x-1}$$

$$f(x) = F'(x) = S^x g^{C^x-1}\left(-\ln S - \ln g \cdot \ln C \cdot C^x\right)$$

$$g_x(t) = {}_t p_x \cdot \mu(x+t) = S^t g^{C^x(C^t-1)} \cdot \left(-\ln S - \ln g \cdot \ln C \cdot C^{x+t}\right)$$

En este gráfico se muestran las funciones S(x), μ(x) y p_x para el caso de una ley de Makeham con parámetros: C=1.03 ,g=0.7 y S=0.998, puede verse cómo el perfil es muy similar a la ley de Gompertz.



La primera Ley de Makeham suele presentar problemas de ajuste a las edades más jóvenes por lo que a menudo se utiliza una segunda ley de Makeham que considera el tanto instantáneo como: $\mu(x)=A+Hx+BC^x$.

Modelo	ley de Makeham
enunciado	La mortalidad (tanto instantáneo) se debe, en parte a causas naturales, factor creciente con la edad ;y en parte a causas accidentales, factor constante
Distribución de X	
l(x)	$l_0 S^x g^{C^x-1}$ $\quad 0 < g,S < 1\ ;\ C > 1$
d_x	$l_0 S^x g^{C^x-1}\left(1-Sg^{C^x(C-1)}\right)$
p_x	$Sg^{C^x(C-1)}$
q_x	$1-Sg^{C^x(C-1)}$
μ_x	$-\ln S-\ln g\cdot\ln C\cdot C^x$
${}_np_x$	$S^n g^{C^x(C^n-1)}$
${}_nq_x$	$1-S^n g^{C^x(C^n-1)}$
S(x)	$S^x g^{C^x-1}$
F(x)	$1-S^x g^{C^x-1}$
f(x)	$S^x g^{C^x-1}\left(-\ln S-\ln g\cdot\ln C\cdot C^x\right)$
$g_x(t)$	$S^t g^{C^x(C^t-1)}\cdot\left(-\ln S-\ln g\cdot\ln C\cdot C^{x+t}\right)$
e_x	Se obtiene por su definición
V_x	Se obtiene por su definición