TEMA 3: Estimación de probabilidades brutas: Población asegurada.

- Población de riesgo. Cálculo.
- El efecto de selección.
- Tablas seleccionadas.

Población de riesgo. Cálculo .

Hasta ahora hemos visto cómo estimar las probabilidades brutas de fallecimiento o supervivencia en el caso de una población general, bajo los supuestos de “sistema demográficamente cerrado” y uniformidad temporal de los fallecimientos a lo largo del año. En tal caso, a partir de informaciones censales sobre la población de diferentes edades en un “instante temporal” y a partir de los registros de fallecimientos anuales podíamos estimar las probabilidades con ayuda de los esquemas de Lexis.

Sin embargo, la información disponible cambiará cuando los datos provengan de una cartera de asegurados (población a asegurada o población de riesgo) y /o el sistema no pueda ya considerarse cerrado y se disponga de información sobre las entradas y salidas que registra el colectivo sujeto a estudio.

Centrémonos en la estimación de los coeficientes q_x, que, a fin de cuentas, son los pilares básicos de la tabla de mortalidad. Según su definición, cada q_x será la probabilidad de que un individuo de edad x fallezca antes de alcanzar la edad x+1

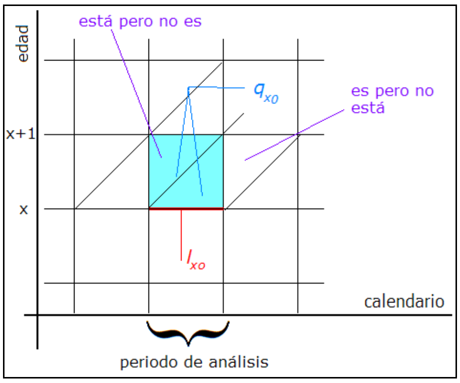
$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

Empíricamente podríamos aproximarnos a estas cantidades contabilizando el número de individuos que alcanza la edad x durante el periodo de análisis, llamémosle: l_{x0}, y el número de individuos que fallecen entre las edades x y x+1 durante ese mismo periodo de análisis: d_{x0} .La primera aproximación a q_x sería el cociente d_{x0}/ l_{x0} .

Sin embargo, esta aproximación no es demasiado buena ya que:

- Por una parte, puede haber individuos que hayan alcanzado la edad x con anterioridad al periodo de análisis, y por lo tanto no forman parte de l_{x0} pero que fallezcan entre las edad x y x+1, durante el periodo de estudio y sí formen parte de d_{x0} .

- También puede haber sujetos que hayan cumplido los x años durante el estudio y que mueran antes de alcanzar los x+1, pero cuando ya haya terminado el periodo de análisis. En tal caso estarían incluidos entre los l_{x0}, pero no entre los d_{x0} . (ver gráfico)



Además de estas dos cuestiones puede haber más situaciones que requieran otras consideraciones. Durante el periodo de análisis puede haber *salidas* del colectivo de personas de edad x no debidas al fallecimiento e incorporaciones al colectivo (*entradas*) de nuevas personas que habiendo cumplido x años aún no han cumplido x+1.

Por lo tanto podemos encontrarnos con:

- Salidas: personas que estando contabilizadas entre las l_{x0} sin embargo no están sujetas al riesgo de fallecer *durante todo su tránsito* entre las edades x y x+1. Aun falleciendo a esa edad nunca quedarían incluidos en d_{x0}, ya que han salido del colectivo.
- Entradas: personas que pasan a engrosar el colectivo de riesgo (aunque no durante todo el periodo de estudio) sin estar contabilizados en l_{x0}.Sí podrían llegar a formar parte de d_{x0}.

Estos efectos van en direcciones opuestas y, a determinadas edades quizá podrían compensarse resultando un efecto agregado nulo. Para otras edades, en cambio, sí puede haber distorsiones significativas y convendrá suavizarlas en la medida de lo posible.

Un estrategia de solución va a consistir en considerar que una persona que abandona el colectivo por una causa distinta al fallecimiento cuente sólo como una fracción, precisamente la fracción de tiempo entre las edades x y x+1 que forma parte del colectivo y está sujeta al riesgo dentro del mismo; e, igualmente, cada individuo que se incorpore sólo contará como una fracción igual a la proporción del año que trascurra en el colectivo.

También esta estrategia puede usarse para dar cuenta de los dos primeros problemas expuestos: individuos que ya tenían x años antes de empezar el periodo de estudio o que cumplirán (o cumplirían) x+1 fuera ya del periodo de análisis. En el primer caso consideraremos la fracción de tiempo desde que empieza el estudio hasta que cumple x+1 años y en el segundo la fracción de tiempo desde cumple x años hasta que termina el estudio.

Estas ideas y alguna hipótesis adicional permiten ahora afrontar el problema con cierta garantía de éxito.

Llamando:

l_{x0} : Número de individuos que alcanzan la edad exacta x durante el periodo de análisis

n_{x+t}: Número de individuos que se incorporan al colectivo con edad exacta x+t; 0 < t < 1

s_{x+t}: Número de individuos que salen del colectivo con una edad exacta x+t ; 0 < t < 1

d_{x0}: Número de fallecimientos observados durante el periodo de análisis entre las edades x y x+1 ;

Debería cumplirse de forma bastante aproximada que:

$$\boxed{d_{x0} = l_{x0} \cdot q_x + \sum_{0<t<1} (n_{x+t} \cdot {}_{(1-t)} q_{x+t}^{[n]}) - \sum_{0<t<1} (s_{x+t} \cdot {}_{(1-t)} q_{x+t})}$$

Donde:

${}_{(1-t)}q_{x+t}^{[n]}$ será la probabilidad que tiene un individuo "nuevo" de edad x+t de fallecer antes de alcanzar x+1 años

${}_{(1-t)}q_{x+t}$ será la probabilidad de que tiene de fallecer un individuo entre la edad x y x+t siendo x+t la edad a la que abandona (o abandonaría) el grupo.

En la ecuación de arriba hay tres incógnitas y no tiene solución; sin embargo, si hacemos dos supuestos adicionales podremos solventar el problema:

1) Suponemos que una vez incorporado al grupo un nuevo individuo adquiere "el mismo riesgo de fallecimiento" que el resto del grupo es decir: ${}_{(1-t)}q_{x+t}^{[n]} = {}_{(1-t)}q_{x+t}$.

2) Suponemos, igualmente que la distribución de fallecidos entre x y x+1 es uniforme y , por lo tanto: ${}_{(1-t)}q_{x+t} = (1-t).q_x$

Bajo estos dos supuestos tendríamos:

$$d_{x0} \approx l_{x0} \cdot q_x + \sum_{0<t<1} \big((1-t) \cdot q_x \cdot n_{x+t}\big) - \sum_{0<t<1} \big((1-t).q_x \cdot s_{x+t}\big)$$

De donde podremos despejar la probabilidad q_x que podría estimarse como:

$$\boxed{\widehat{q}_x = \frac{d_{x0}}{l_{x0} + \sum_{0<t<1} (1-t).n_{x+t} - \sum_{0<t<1} (1-t).s_{x+t}}}$$

Es decir, el cociente entre los fallecidos a la edad x observados en el colectivo durante el periodo de análisis y la población sujeta al riesgo (**población de riesgo**) E_x.

$$E_x = l_{x0} + \sum_{0<t<1} (1-t).n_{x+t} - \sum_{0<t<1} (1-t).s_{x+t}$$

Debe tenerse presente, en cualquier caso, que los individuos fallecidos entre x y x+1 contribuyen a la población de riesgo como una unidad completa. Si quisiéremos ajustar esta desviación y sólo considerar que los individuos que fallecen sólo están expuestos al riesgo durante el periodo que están con vida tendríamos que considerar la llamada **población censal** o **central** de **riesgo**:

$$EC_x = l_{x0} + \sum_{0<t<1}(1-t).n_{x+t} - \sum_{0<t<1}(1-t).s_{x+t} - \sum_{0<t<1}(1-t)\,f_{x+t}$$

Donde f_{x+t} representa el número de individuos del colectivo estudiado fallecidos durante el periodo de análisis a la edad exacta de x+t.

Y el cociente entre los fallecidos y la población censal de riesgo sería una estimación para el **tanto central de mortalidad:**

$$\boxed{\widehat{\mathrm{m}}_x = \frac{d_{x0}}{EC_x} = \frac{d_{x0}}{l_{x0} + \sum_{0<t<1}(1-t).n_{x+t} - \sum_{0<t<1}(1-t).s_{x+t} - \sum_{0<t<1}(1-t)\,f_{x+t}}}$$

El efecto de selección

Debe hacerse una consideración respecto al razonamiento anterior para el cálculo de la población de riesgo: una de las hipótesis que hemos considerado es que los individuos que van incorporándose al colectivo de estudio tienen el mismo riesgo de fallecimiento que los que integraban inicialmente el colectivo. Esto no siempre es cierto ni razonable y es preciso añadir supuestos adicionales u otras consideraciones al respecto. Esto ocurrirá cuando se quiera calcular la población de riesgo en colectivos en los que merced al llamado *efecto de selección* los sujetos recién incorporados presentan durante los primeros años probabilidades de fallecimiento ligeramente inferiores a los sujetos de mayor antigüedad en la subscripción.

Un caso paradigmático es el debido a que al suscribir un sujeto un seguro de vida es más que habitual que la compañía le exija superar una “selección” consistente en un examen médico. Esto será tanto más frecuente o exigente en la medida en que el asegurado sea de mayor edad o el compromiso contraído por la aseguradora como compensación sea de mayor importe, o el riesgo específico del sujeto, exija por razones laborales o de otro tipo unas mejor condiciones de salud que los sujetos normales.

Lo cierto es que el haber superado esta criba o selección disminuye la probabilidad de fallecimiento pero, como es lógico, conforme va transcurriendo el tiempo este efecto va perdiendo vigencia, hasta la llamada duración máxima (del efecto de selección). Con lo que los tanto de mortalidad para una misma edad van siendo cada vez mayores conforme va pasando tiempo desde la selección. Este hecho motiva el que sea necesario en estos casos diseñar tablas que lo tengan en cuenta: las llamadas **tablas seleccionadas de mortalidad**.

Tablas seleccionadas de mortalidad.

Como ocurre en el caso de las tablas agregadas sin selección la obtención de las tasa brutas de mortalidad (tantos de mortalidad anuales) será el primer paso para la construcción de las tablas seleccionadas. En este caso las probabilidades de fallecimiento dependerán tanto de la edad del individuo como del tiempo transcurrido desde el contrato de la póliza (y por lo tanto, desde su selección). La edad actual x la podremos ver, entonces como el resultado de la suma x=z+d, donde z es la edad a la que contrató el seguro y d el tiempo transcurrido desde entonces.

Notación:

Si tradicionalmente se han representado las funciones biométricas especificadas para una edad actual determinada y simbolizada con un subíndice de edad : x, en el caso de tablas seleccionadas pueden representarse ahora subindexadas como sub [z]+d , en vez de sub x. Así por ejemplo, el tanto instantáneo de mortalidad para una persona de 30 años que contrató su seguro hace 6 se escribiría como: $\mu_{[24]+6}$ o el tanto anual de fallecimiento para un individuo de 47 años que acaba de contratarlo sería $q_{[47]}$. (Levi,1973)(Bowers, 1986)(Jordan,1991)

Más recientemente (Renshaw y Haberman,1997) se ha utilizado otra simbología que consigna la edad actual x, como subíndice y el superíndice el tiempo transcurrido desde la selección d . Para los dos ejemplos anteriores tendríamos:

$\mu_{30}^{d=6}$ $q_{47}^{d=0}$

Según usemos, uno u otro sistema de símbolos emplearemos tablas seleccionadas ligeramente diferentes en un caso una tablas que consignen las probabilidades brutas para la edad de selección (por filas) y el tiempo transcurrido o duración del contrato (por columnas) con la primera notación o bien, unas tablas que consignen la edad actual por filas y el tiempo o duración del contrato por columnas:

Tanto anuales de fallecimiento por edad de selección y duración

Edad de selección [z]	**d=0**	**d=1**	**d=2**	**d=3**	**Z+3**
40	$q_{[40]}$ →	$q_{[40]+1}$ →	$q_{[40]+2}$ →	$q_{[40]+3}$ →	**43**
41	$q_{[41]}$ →	$q_{[41]+1}$ →	$q_{[41]+2}$ →	$q_{[41]+3}$ →	**44**
42	$q_{[42]}$ →	$q_{[42]+1}$ →	$q_{[42]+2}$ →	$q_{[42]+3}$ →	**45**
43	$q_{[43]}$ →	$q_{[43]+1}$ →	$q_{[43]+2}$ →	$q_{[43]+3}$ →	**46**

Tanto anuales de fallecimiento por edad de selección y duración

Edad de actual	**d=0**	**d=1**	**d=2**	**d=3**
40	q_{40}^{0} ↘	q_{40}^{1}	q_{40}^{2}	q_{40}^{3}
41	q_{41}^{0} ↘	q_{41}^{1} ↘	q_{41}^{2}	q_{41}^{1}
42	q_{42}^{0} ↘	q_{42}^{1} ↘	q_{42}^{2} ↘	q_{42}^{3}
43	q_{43}^{0} ↘	q_{43}^{1} ↘	q_{43}^{2} ↘	q_{43}^{3} ↘
44	q_{44}^{0} ↘	q_{44}^{1} ↘	q_{44}^{2} ↘	q_{44}^{3} ↘
45	q_{45}^{0} ↘	q_{45}^{1} ↘	q_{45}^{2} ↘	q_{45}^{3} ↘
46	q_{46}^{0} ↘	q_{46}^{0} ↘	q_{46}^{2} ↘	q_{46}^{3} ↘

En cada caso las flechas nos indican cómo se podría hacer el seguimiento de una persona que tras contratar el seguro (ser seleccionado) a cierta edad va viendo pasar 1,2 3 años (suponemos aquí que la duración máxima de la selección es de 3 años). Siguiendo este recorrido podríamos evaluar para una persona las distintas funciones biométricas, probabilidades temporales, esperanza de vida, etc. para una persona que contrata el seguro a cierta edad.

La última columna, representaría, en ambos casos la tabla de mortalidad (sin tener en cuenta la selección) con x=z+3 años, o tabla reducida. Cuyos valores serán los que se tendrían aunque no se hubiera procedido a la selección.

Comportamiento esperado de los tantos anuales cuando hay selección.

Cabe esperar que conforme va transcurriendo el tiempo desde la selección el efecto de esta sea menor: Al ir pasando el tiempo se va perdiendo la garantía de salud que había supuesto el haber superado un examen medico.

Por consiguiente cabe esperar que las probabilidades de fallecimiento vayan creciendo conforme lo hace el tiempo transcurrido desde la selección. Para individuos con la misma edad actual esta probabilidad será mayor si hace más tiempo de la selección (si contrataron el seguro hace más tiempo)

Con notación clásica:

$$q_{[z]} < q_{[z-1]+1} < q_{[z-2]+2} < q_{[z-3]+3} < \ldots$$

O bien, con notación alternativa:

$$q_x^0 < q_x^1 < q_x^2 < q_x^3 < \ldots.$$

El cumplimiento de esta propiedad es fundamental para determinar la influencia que tiene la selección de los asegurados en el nivel de riesgo asumido por la compañía. La relación, debe cumplirse a cualquier edad, pero será especialmente importante para las edades más avanzadas de la tabla.

Esta relación teórica debería cumplirse también para los datos muestrales, sin embargo, en ocasiones, esto no es así; en tales casos se podrá usar algún método de ajuste o graduación de las tablas para corregir las discrepancias.

Obtención de las principales funciones biométricas con tablas seleccionadas

El número se supervivientes ($l_{[z]+d}$) será, por lo general, un dato conocido, ya que trabajaremos con carteras de asegurados o agrupaciones de las mismas. No obstante si nuestro objetivo fuera reflejar en una tabla , a partir de las probabilidades anuales de muerte ya calculadas, la evolución de un colectivo teórico inicial, (como suele hacerse en el caso de tablas de mortalidad agregadas).procederíamos de la siguiente manera: Fijaríamos un valor arbitrario para la cohorte asociada a la edad de selección, $l_{[z]}$, y a partir de aquí podríamos desarrollar la tabla completa con la función de supervivientes y los tantos anuales, mediante una ligera variante de la relación ya conocida $l_{x+1}=l_x(1-q_x)$,que ahora tomaría la forma:

$$\boxed{l_{[z]+d+1} = l_{[z]+d}(1-q_{[z]+d})}$$

Si, por ejemplo, consideramos la edad de selección en un seguro de vida de 25 años y que la duración de la selección es de 3 años ,procederíamos de la siguiente manera :

1) partiendo de un valor inicial de $l_{[25]}$ iríamos obteniendo $l_{[25]+1}$ $l_{[25]+2}$ $l_{[25]+3}$ a través de la relación anterior

2)Para obtener $l_{[26]}$,consideraríamos, por un lado la relación anterior pero al revés

$$\boxed{l_{[z]+d-1} = \frac{l_{[z]+d}}{(1-q_{[z]+d-1})}}$$

tantas veces como sea necesario para llegar a la duración del efecto de selección (3 años , en este caso)
En nuestro ejemplo:

$$l_{[26]} = \frac{l_{[26]+1}}{(1-q_{[26]})} \qquad l_{[26]+1} = \frac{l_{[26]+2}}{(1-q_{[26]+1})} \qquad l_{[26]+2} = \frac{l_{[26]+3}}{(1-q_{[26]+2})}$$

Como tres años es la duración del efecto de selección tendríamos que $l_{[26]+3}=l_{29}$ que lo obtendríamos a partir de $l_{28}=l_{[25]+3}$ y de $q_{28}=q_{[25]+3}$:

$$l_{[29]+3} = l_{29} = l_{28} \cdot (1-q_{28}) = l_{[25]+3} \cdot (1-q_{[25]+3})$$

A partir de los valores de la función de supervivientes y con un procedimiento similar podríamos obtener los valores de la función de fallecimientos $d_{[z]+d}$