# TEMA 4: Graduación y ajuste.

Introducción.
Interpolación y ajuste.
Métodos paramétricos y no paramétricos.
Ajuste con ponderaciones kernel.
El método de las sumas (King-Hardy)

## Graduación y ajuste

Cuando se estiman funciones biométricas a partir de datos provenientes de una población, con frecuencia se plantea la necesidad de buscar una curva suave que tenga relación con las estimaciones primarias de dichas funciones. En algún caso puede convenir ajustar los datos sobre probabilidades brutas de fallecimiento de las edades avanzadas a una cierta función creciente de la edad, por ejemplo.

En otros casos querremos respetar los valores conocidos de algunas funciones, por ejemplo los valores para edades enteras y asignar los valores para edades fraccionaras en lo que se conoce como **interpolación** si se trata de asignar valores para edades intermedias entre los datos disponibles o **extrapolación** si se trata de asignar valores para edades que quedan fuera del rango para el que se disponen datos.

Con frecuencia una función sencilla que pase por los datos no es capaz de tener el perfil deseado (creciente y convexa, pongamos por caso).Se recurre entonces al **ajuste** a una función del tipo (del perfil) deseado que, aunque "no pase" por los datos, se parezca lo suficiente a ellos.

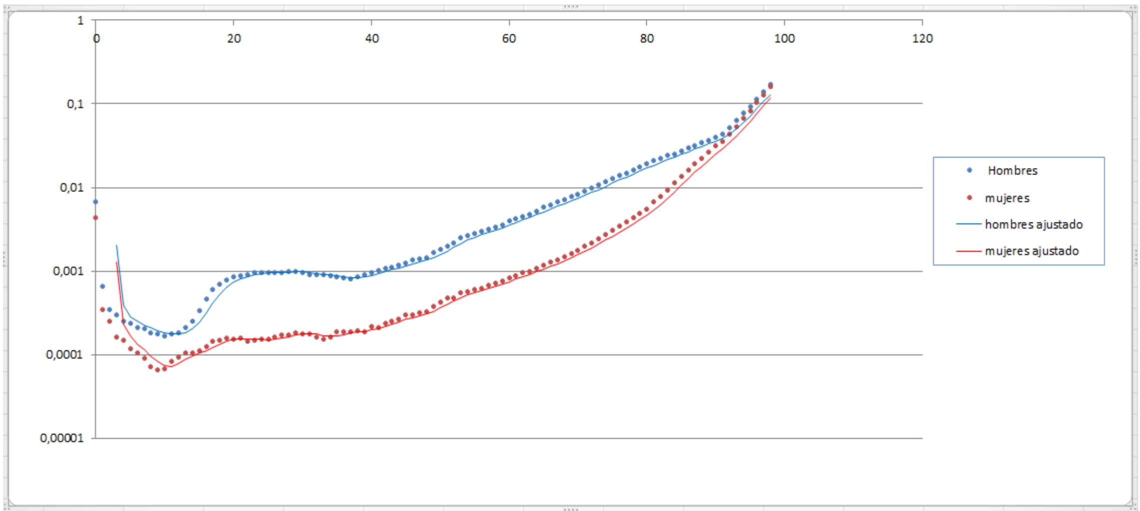
Llamaremos, en general, **graduación** al conjunto de métodos que permiten ajustar las probabilidades (de fallecimiento) brutas para que las nuevas probabilidades obtenidas permitan hacer cálculos actuariales adecuados al haberse eliminado las fluctuaciones y perturbaciones aleatorias que tenían las estimaciones iniciales.

Las tasa brutas, con sus fluctuaciones, pueden suponerse como realizaciones muestrales del comportamiento de una población mayor, y por consiguiente las probabilidades ya graduadas vendrían a ser estimaciones de las verdaderas probabilidades de fallecimiento que cumplirían ciertos requisitos de suavidad; esto es son similares para edades próximas y no presentan saltos bruscos.

Los métodos de graduación irían a garantizar estas buenas propiedades matemáticas a los resultados que se obtendrían en la tabla de mortalidad calculada a partir de las probabilidades "graduadas".

Los métodos de graduación puede dividirse en tres grandes categorías: gráficos, paramétricos y no paramétricos.

Los métodos gráficos se basan en la descripción de la trayectoria de la edad de fallecimiento en función de la edad. Sobre el eje de abscisas se representa la edad y sobre el ordenas las probabilidades graduadas. Lo habitual será emplear una escala logarítmica para poder apreciar el comportamiento ligeramente decreciente en los primeros años de vida. Los métodos gráficos suelen emplearse para fines posteriores a la construcción de la tabla de mortalidad; por ejemplo, para comparar distintos casos (varios países, o varias subcarteras) mediante una gráfica y algunos índices de referencia para comparar. Abajo: curvas de mortalidad de hombres y mujeres.




Los métodos paramétricos establecen que la probabilidad de fallecimiento $q_x$ se especifica a través de una función matemática de x, dependiente de un número finito de parámetros, el ajuste se puede llevar a cabo por alguno de los métodos clásicos como el de *mínimos cuadrados* permitiendo obtener las estimaciones de los parámetros y sus errores estándar.

Los métodos no paramétricos no presuponen ninguna forma funcional para el comportamiento de los datos, aunque por esa misma razón no pueden sintetizar en una expresión analítica simple los resultados de la graduación. Las probabilidades graduadas suelen obtenerse mediante la aplicación de un método de suavizado que combina las probabilidades adyacentes.

**Interpolación polinómica**

El problema consiste básicamente en que dada una función, *f*, se conocen los valores que toma para n+1 puntos, $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ , esto es se conocen los valores : $f(x_0)$,

$f(x_1)$, $f(x_2)$,…, $f(x_n)$, y se trata de buscar un polinomio de grado n que pase por esos puntos $(x_i, f(x_i))$,i=0,1,…,n; es decir que cumpla:

$$P_n(x_0) = f(x_0), P_n(x_1) = f(x_1),..., P_n(x_n) = f(x_n)$$

Es evidente que si el número de puntos es elevado, también lo será el grado del polinomio pudiendo llegarse a resultados, ciertamente, muy poco operativos. Por ejemplo, a partir de las primeras 15 tasas anuales brutas de mortalidad (de 0 a 14) obtendríamos un polinomio de grado 14 con un número elevado (quizá hasta 13) de máximos y/o mínimos relativos que serían muy difícilmente interpretables en términos biométricos.

Pero también es cierto que, en general, la solución existe y es única lo que garantiza la viabilidad del procedimiento.

Llamando:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

Debe cumplirse que:

$$\begin{cases} P_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0{}^2 + ... + a_nx_0{}^n = f(x_0) \\ P_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1{}^2 + ... + a_nx_1{}^n = f(x_1) \\ \quad .... \quad .... \quad .... \quad .... \quad\quad ... \\ P_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n{}^2 + ... + a_nx_n{}^n = f(x_n) \end{cases}$$

El determinante de este sistema de n+1 ecuaciones lineales con n incógnitas (los coeficientes $a_0$, $a_1$,…, $a_n$) es el determinante de Vandermonde,

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ...x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ...x_1^n \\ ... & ... & ... & ......\\ 1 & x_n & x_n^2 & ...x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$$

Por lo que si los puntos (datos) tienen distinta abscisa (son de distintas edades) el determinante será distinto de cero y el sistema tendrá solución y será única.

La solución del sistema es fácilmente calculable por la expresión:

$$A=D^{-1}Y$$

Donde: $A=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots x_n^n \end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \dots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$

Que puede llevarse a cabo con sencillez con una hoja de cálculo.

Existen otros procedimientos analíticos para obtener polinomios de interpolación. Entre otros, los de los polinomios de Lagrange, el de interpolación parabólica progresiva, o los basados en la fórmula de Newton (de aproximaciones sucesivas) o en la de Gauss.

Veamos aquí tan sólo el de *interpolación parabólica progresiva*

Se trata de un método recurrente basado en la siguiente idea supuesto que tenemos ya determinado un polinomio de grado n-1 que pasa por n-1 puntos construyamos un polinomio de grado n que pasa por los anteriores y por un punto más:

Esto es el polinomio:

$$P_{n-1}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

Que suponemos ya obtenido pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))\dots$ $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$

Construyamos, ahora el polinomio de grado n según el siguiente esquema:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

Así construido nos hemos asegurado que siga pasando por los n-1 primeros puntos y si imponemos la condición de que pase por el último punto $(x_n, f(x_n))$, podremos obtener el coeficiente restante: $a_n$

$$f(x_n) = P(x_n) = P_{n-1}(x_n) + a_n(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1}) \qquad \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

**Procedimientos de ajuste**

Los procedimientos de ajuste lineal o linealizable (exponencial o potencial) por el método de mínimos cuadrados son suficientemente conocidos y en cualquier caso pueden encontrarse en Ceaces y otras fuentes.

Por lo que aquí nos ocuparemos de otros procedimientos de ajuste.

**Método (de Tintner) de las diferencias variantes para acotar el grado del polinomio de ajuste.**

Este método (Tintner,1940) es el utilizado por el INE para suavizar los datos de las probabilidades anuales de fallecimiento, $q_x$ .(Una descripción de su uso puede verse en INE (1983))

El método considera en primer lugar que los datos originales pueden verse como la agregación de un parte sistemática de expresión polinómica en la variable edad y otra parte de error de forma que:

$$y_x = u_x + \varepsilon_x$$

Donde $u_x$ es un polinomio de la edad y $\varepsilon_x$ es un error aleatorio que suponemos, tal y como suele ser habitual, independiente de la parte sistemática, de media cero y de varianza constante (homoscedástico).

Puede probarse que llamando $\Delta^r$ al operador diferencia de orden r:

$$E(\Delta^r \varepsilon_x) = 0 \qquad Var(\Delta^r \varepsilon_x) = \binom{2r}{r} \cdot v$$

Con $v$=Var($\varepsilon_x$) supuesta constante para cualquier edad x.

Por otro lado como para un polinomio de grado h sus diferencia de orden h son constantes, tendremos que si se toman diferencias de orden h o superior para la serie de datos originales la parte sistemática tendrá varianza nula y como la parte aleatoria es independiente de la sistemática:

$$\forall r > h:$$

$$Var(\Delta^r y_x) = Var(\Delta^r u_x) + Var(\Delta^r \varepsilon_x) = 0 + \binom{2r}{r} . v$$

Y por la tanto:

$$\frac{Var(\Delta^r y_x)}{\binom{2r}{r}} = v$$

En la práctica, el polinomio sólo es una aproximación a la parte sistemática de los datos y las hipótesis de independencia y homoscedasticidad tampoco son de cumplimiento absoluto. Por tanto diremos que hemos alcanzado el grado del polinomio cuando la varianza (corregida) de las diferencias se estabilice lo que puede medirse con el estadístico:

$$\boxed{Z_{rq} = \frac{V_r * - V_q *}{V_q *} \frac{\sqrt{n-q}}{C_{rq}}}$$

Definido para q > r ( en la práctica para q=r+1 )

Donde: $V_r * = \dfrac{S_r}{(n-r)\binom{2r}{r}}$

Con $S_r$ la suma de cuadrados de las diferencias de orden r ( No se toma la varianza ya que se supone que la media es cero) y el valor de $C_{rq}$ es :

$$C_{rq} = \sqrt{2 \cdot \left[ \frac{\binom{4r}{2r}}{\binom{2r}{r}^2} + \frac{\binom{4q}{2r}}{\binom{2q}{q}^2} - 2\frac{\binom{2q+2r}{q+r}}{\binom{2r}{r}\binom{2q}{q}} \right]}$$

O bien, utilizando la aproximación de Stirling, razonable para r ≥ 5:

$$C_{rq} = \sqrt{\sqrt{2\pi} \cdot \left[ \sqrt{r} + \sqrt{q} - 2\sqrt{\frac{2rq}{r+q}} \right]}$$

Puede probarse que para intervalos de edades, n, lo suficientemente grandes $Z_{rq}$ se distribuye aproximadamente con una N(0,1) lo que permite contrastar la hipótesis de que las diferencias entre distintos órdenes son iguales a cero.

Detectado el valor de r al que podría aceptarse tal hipótesis por dar un $Z_{r,r+1}$ de valor absoluto inferior a cierto $Z_\alpha$ , el grado del polinomio a ajustar sería r .

Por ejemplo: supongamos que deseamos ajustar las probabilidades anuales de fallecimiento para una cohorte durante sus primeros 20 años: En la tabla inicial de datos aparecen también las diferencias sucesivas hasta grado13:

| Edad | qx(poi | $\Delta^1$ | $\Delta^2$ | $\Delta^3$ | $\Delta^4$ | $\Delta^5$ | $\Delta^6$ | $\Delta^7$ | $\Delta^8$ | $\Delta^9$ | $\Delta^{10}$ | $\Delta^{11}$ | $\Delta^{12}$ | $\Delta^{13}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6,77208 | -6,11564 | 5,80256 | -5,53294 | 5,25675 | -4,93538 | 4,51648 | -3,91946 | 3,01396 | -1,58252 | -0,74208 | 4,59624 | -11,14501 | 22,68188 |
| 1 | 0,65644 | -0,31308 | 0,26963 | -0,27619 | 0,32137 | -0,41890 | 0,59702 | -0,90550 | 1,43145 | -2,32460 | 3,85416 | -6,54877 | 11,53687 | -21,32349 |
| 2 | 0,34336 | -0,04345 | -0,00656 | 0,04518 | -0,09754 | 0,17812 | -0,30848 | 0,52595 | -0,89315 | 1,52956 | -2,69461 | 4,98810 | -9,78662 | 20,13525 |
| 3 | 0,29991 | -0,05000 | 0,03862 | -0,05235 | 0,08058 | -0,13036 | 0,21747 | -0,36720 | 0,63641 | -1,16504 | 2,29349 | -4,79852 | 10,34863 | -22,35935 |
| 4 | 0,24991 | -0,01138 | -0,01373 | 0,02823 | -0,04978 | 0,08711 | -0,14973 | 0,26920 | -0,52863 | 1,12845 | -2,50503 | 5,55011 | -12,01072 | 25,14049 |
| 5 | 0,23853 | -0,02511 | 0,01450 | -0,02155 | 0,03733 | -0,06262 | 0,11947 | -0,25943 | 0,59982 | -1,37658 | 3,04508 | -6,46061 | 13,12978 | -25,48064 |
| 6 | 0,21342 | -0,01061 | -0,00705 | 0,01578 | -0,02529 | 0,05685 | -0,13996 | 0,34039 | -0,77676 | 1,66850 | -3,41553 | 6,66917 | -12,35086 | 21,62293 |
| 7 | 0,20281 | -0,01766 | 0,00872 | -0,00951 | 0,03156 | -0,08311 | 0,20044 | -0,43636 | 0,89174 | -1,74703 | 3,25364 | -5,68169 | 9,27207 | -14,27998 |
| 8 | 0,18515 | -0,00894 | -0,00079 | 0,02204 | -0,05155 | 0,11733 | -0,23593 | 0,45538 | -0,85529 | 1,50661 | -2,42805 | 3,59038 | -5,00791 | |
| 9 | 0,17621 | -0,00973 | 0,02125 | -0,02951 | 0,06578 | -0,11860 | 0,21945 | -0,39992 | 0,65131 | -0,92144 | 1,16233 | -1,41752 | | |
| 10 | 0,16648 | 0,01152 | -0,00826 | 0,03627 | -0,05282 | 0,10085 | -0,18047 | 0,25140 | -0,27013 | 0,24089 | -0,25519 | | | |
| 11 | 0,17800 | 0,00326 | 0,02801 | -0,01655 | 0,04804 | -0,07962 | 0,07093 | -0,01873 | -0,02924 | -0,01430 | | | | |
| 12 | 0,18126 | 0,03127 | 0,01146 | 0,03149 | -0,03158 | -0,00869 | 0,05220 | -0,04797 | -0,04354 | | | | | |
| 13 | 0,21253 | 0,04272 | 0,04294 | -0,00009 | -0,04027 | 0,04351 | 0,00423 | -0,09151 | | | | | | |
| 14 | 0,25525 | 0,08567 | 0,04285 | -0,04036 | 0,00325 | 0,04774 | -0,08728 | | | | | | | |
| 15 | 0,34092 | 0,12852 | 0,00250 | -0,03711 | 0,05099 | -0,03954 | | | | | | | | |
| 16 | 0,46944 | 0,13101 | -0,03462 | 0,01387 | 0,01145 | | | | | | | | | |
| 17 | 0,60045 | 0,09640 | -0,02074 | 0,02532 | | | | | | | | | | |
| 18 | 0,69685 | 0,07566 | 0,00458 | | | | | | | | | | | |
| 19 | 0,77251 | 0,08024 | | | | | | | | | | | | |
| 20 | 0,85275 | | | | | | | | | | | | | |

Realizados los cálculos esta tabla muestra los resultados de los estadísticos:

| r | Sr | Vr' | Cr,r+1 | Zr,r+1 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 49,4803823 | 2,47401912 | 1,58323349 | 4,49872541 |
| 1 | 37,5702251 | 0,93925563 | 0,51256799 | 19,3641491 |
| 2 | 33,7512758 | 0,28126063 | 0,34642687 | 31,708541 |
| 3 | 30,7038106 | 0,07675953 | 0,26854556 | 42,7335619 |
| 4 | 27,7756456 | 0,01983975 | 0,2222048 | 53,2624256 |
| 5 | 24,6539924 | 0,00489167 | 0,19106719 | 64,1342237 |
| 6 | 21,1457003 | 0,00114425 | 0,16852165 | 74,7314722 |
| 7 | 17,4811314 | 0,00025468 | 0,15134609 | 73,2630069 |
| 8 | 15,6049953 | 6,0625E-05 | 0,13776973 | 35,5901612 |
| 9 | 23,7865438 | 2,4462E-05 | 0,12673334 | 5,92784006 |
| **10** | 73,0375135 | 1,9766E-05 | 0,11756189 | **0,25405262** |
| 11 | 276,121541 | 1,9571E-05 | 0,10980354 | 0,44665512 |
| 12 | 1040,42516 | 1,9238E-05 | 0,10314371 | 1,16839485 |
| 13 | 3827,30356 | 1,8399E-05 | 0,09735619 | 1,77897343 |

En donde observamos cómo para r=10 se obtiene un valor del estadístico Z bastante inferior a los valores críticos habituales para niveles de significación estándares. Por lo que procederíamos a ajustar los datos a un polinomio de orden 10.

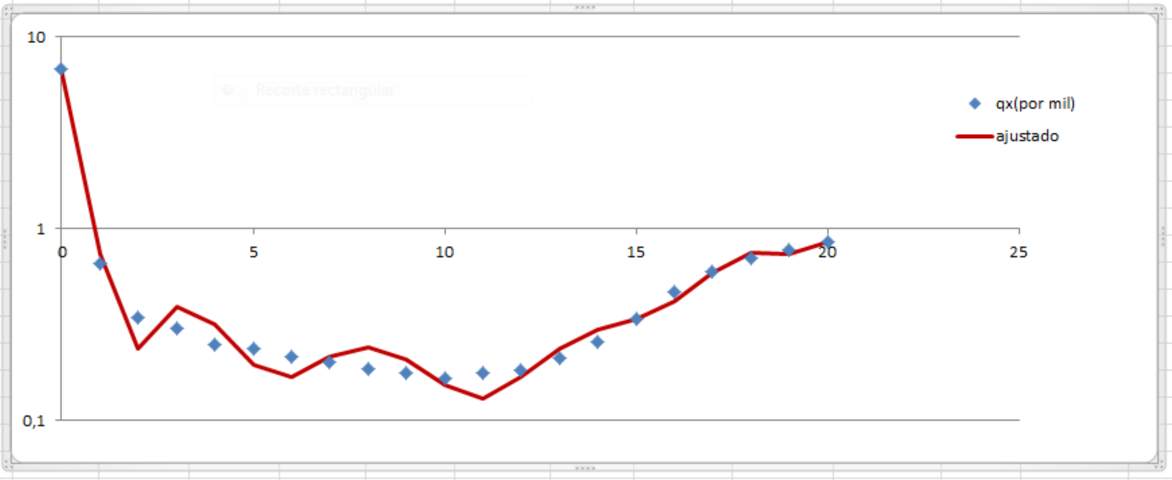
A partir de la matriz de datos original podemos estimar ese polinomio de ajuste obteniendo el vector de coeficientes A , a partir de $A=(X'X)^{-1}.(X'Y)$

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | matriz( X`X)$^{-1}$ | | | | | | | X'Y | | A |
| 0,99805 | -2,14673 | 1,720085 | -0,705666 | 0,169157 | -0,0253 | 0,00243 | -0,00015 | 5,73E-06 | -1,239E-07 | 1,1538E-09 | | 14,0642 | | 6,78405 |
| -2,14668 | 29,5908 | -40,2681 | 21,99871 | -6,33447 | 1,077003 | -0,113737 | 0,0075448 | -0,00031 | 6,922E-06 | -6,703E-08 | | 89,4451 | | -12,6336 |
| 1,72001 | -40,2677 | 59,06029 | -33,58214 | 9,923781 | -1,71852 | 0,183994 | -0,012336 | 0,000504 | -1,15E-05 | 1,1196E-07 | | 1424,84 | | 9,653583 |
| -0,70561 | 21,9982 | -33,5818 | 19,57327 | -5,88668 | 1,033032 | -0,111759 | 0,0075561 | -0,00031 | 7,131E-06 | -6,979E-08 | | 24488,3 | | -3,86017 |
| 0,16914 | -6,33428 | 9,923601 | -5,886631 | 1,794057 | -0,31814 | 0,03471 | -0,002363 | 9,79E-05 | -2,254E-06 | 2,2159E-08 | | 435267 | | 0,910961 |
| -0,0253 | 1,07696 | -1,71848 | 1,033016 | -0,318136 | 0,056895 | -0,006251 | 0,0004281 | -1,8E-05 | 4,123E-07 | -4,067E-09 | x | 7891261 | = | -0,1349 |
| 0,00243 | -0,11373 | 0,183988 | -0,111756 | 0,034709 | -0,00625 | 0,000691 | -4,76E-05 | 1,99E-06 | -4,617E-08 | 4,5706E-10 | | 1,5E+08 | | 0,012877 |
| -0,00015 | 0,00754 | -0,01234 | 0,007556 | -0,002363 | 0,000428 | -4,76E-05 | 3,288E-06 | -1,4E-07 | 3,215E-09 | -3,192E-11 | | 2,7E+09 | | -0,00079 |
| 5,7E-06 | -0,00031 | 0,000504 | -0,000311 | 9,79E-05 | -1,8E-05 | 1,99E-06 | -1,38E-07 | 5,81E-09 | -1,357E-10 | 1,3514E-12 | | 5E+10 | | 3,02E-05 |
| -1,2E-07 | 6,9E-06 | -1,1E-05 | 7,13E-06 | -2,25E-06 | 4,12E-07 | -4,62E-08 | 3,215E-09 | -1,4E-10 | 3,181E-12 | -3,174E-14 | | 9,5E+11 | | -6,5E-07 |
| 1,2E-09 | -6,7E-08 | 1,12E-07 | -6,98E-08 | 2,22E-08 | -4,1E-09 | 4,57E-10 | -3,19E-11 | 1,35E-12 | -3,174E-14 | 3,1743E-16 | | 1,8E+13 | | 6,08E-09 |

Por lo que la función de ajuste acaba siendo:

$$q_x = 6.78405 - 12.6336x + 9.6535x^2 - 3.86017x^3 + 0.910961x^4 - 0.1349x^5 + 0.012877x^6 -$$
$$- 0.00079x^7 + 3.02\times10^{-5}x^8 - 6.5\times10^{-7}x^9 + 6.08\times10^{-9}x^{10}$$

En el siguiente gráfico se muestran los datos originales y esta función de ajuste:




**Graduación por estimación nucleo ( o estimación Kernel).**

El objetivo es llegar a producir estimaciones de la verdadera tasa anual de mortalidad, $q^{\circ}_{x}$ , para cada edad que tengan propiedades de suavidad utilizando un procedimiento que no se base en ninguna hipótesis de modelo paramétrico. Es por lo tanto un método no paramétrico.

Suponemos que los datos de la tabla de mortalidad que pretendemos ajustar son un nube de puntos sobre los ejes coordenados en los que la abscisa es la edad y la ordenada la probabilidad anual de muerte a cada edad.

Suponemos igualmente que cada verdadera tasa de mortalidad puede verse como la suma de la tasa observada en cad edad más un efecto de error para cada edad de forma que siendo n el rango de edades considerado y $r_x$ el termino de error de la edad x tendríamos:

$$q^{\circ}{}_x = q_x + r_x \quad , x = 1,2,...,n$$

Y, finalmente utilizamos un método de suavizado que estima la tasa de cada edad considerando los valores de las tasas observadas en los años cercanos de manera ponderada por la cercanía según una de ponderación llamada Kernel y denotada como, $K_b(t)$, que actúa en la estimación de las tasas como:

$$\hat{q}_x = \frac{\sum_{z=1}^{n} q_z \cdot K_b(x-z)}{\sum_{z=1}^{n} K_b(x-z)}; \qquad x = 1,2,...,n$$

Con $K_b(t)=(1/b).\ K(t/b)$ y siendo K(t) una determinada función núcleo ( o kernel) considerada en cada caso, que debe cumplir: $\int_{-\infty}^{\infty} K(t)dt = 1$

Y siendo b el parámetro de alisamiento, ventana, ancho de banda, o ; en inglés, smoothing parameter o  bandwidth. El valor de este parámetro tiene una clara influencia en el grado de suavidad de la curva obtenida. Si el tamaño de la ventana es mayor la curva será más suave.

Entre las funciones kernel más utilizadas están la las gaussianas ( **núcleo gaussiano**) que utilizan como función K(t) la densidad de una normal tipificada: $\boxed{K(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}}$

De forma que una estimación Kernel con núcleo gaussian**o** y una ventana de tamaño 2 quedaría como:

$$\hat{q}_x = \frac{\sum_{z=1}^{n} \left( q_z \cdot \frac{e^{-\frac{\left(\frac{x-z}{2}\right)^2}{2}}}{2.\sqrt{2\pi}} \right)}{\sum_{z=1}^{n} \left( \frac{e^{-\frac{\left(\frac{x-z}{2}\right)^2}{2}}}{2.\sqrt{2\pi}} \right)}; \qquad x = 1,2,...,n$$

En otros casos ( menos frecuentes) se usará un **núcleo constante** :

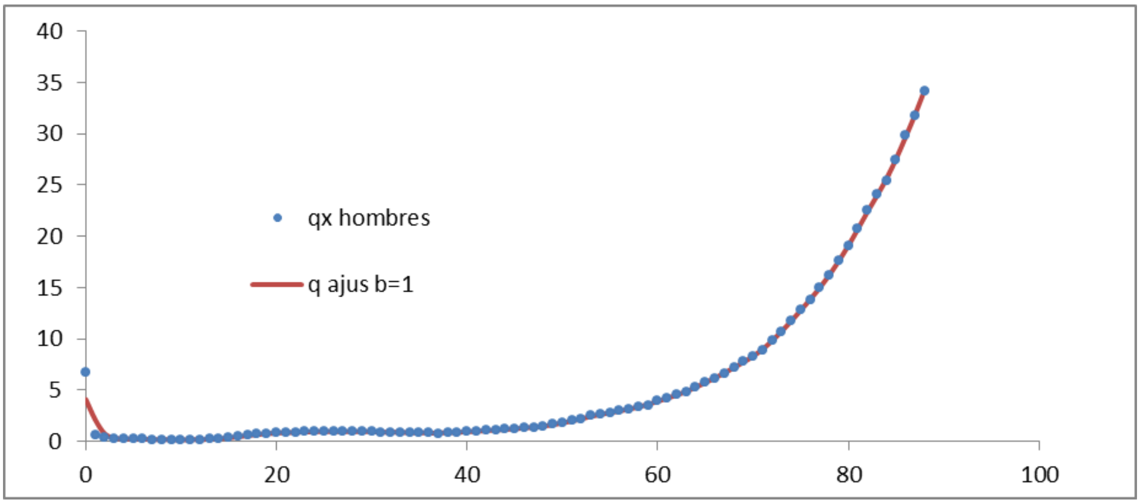
K(t)= ½   para |t|<1, y 0 en el resto de casos

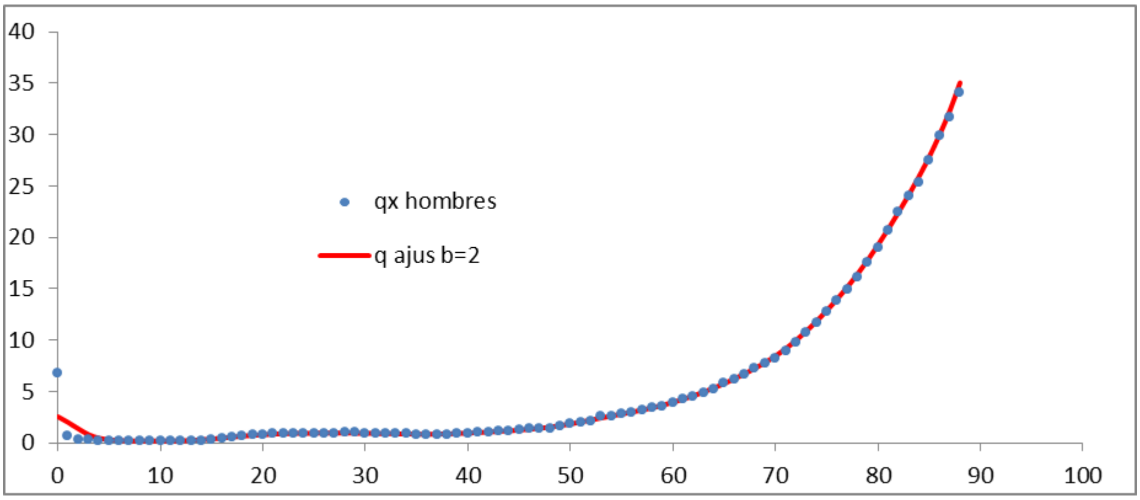
O bien un **núcleo de Epachenikov**:   K(t)= 3(1-t$^{2}$)  para |t|<1, y 0 en el resto de casos.

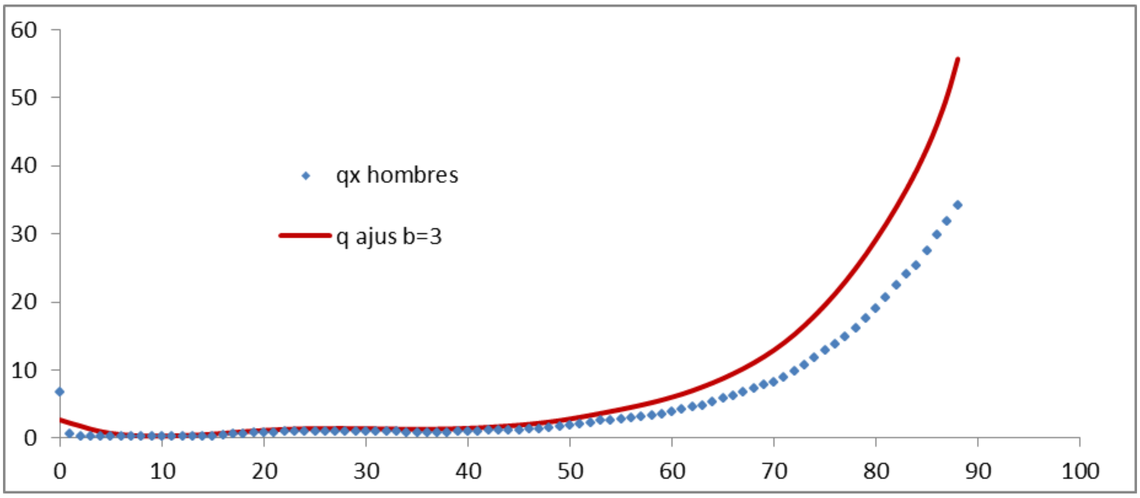
Ejemplo:Los datos de los tantos anuales de mortalidad en hombres (1989) se han ajustado con un kernel gaussiano de ventanas 1,2 y 3: esta tabla muestra los resultados:

| Edad | qx hombres | q ajus b=1 | q ajus b=2 | q ajus b=3 | | Edad | qx hombres | q ajus b=1 | q ajus b=2 | q ajus b=3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6,772075288 | 4,1179782 | 2,5624024 | 2,6815781 | | 54 | 2,65531713 | 2,6556225 | 2,629234 | 3,945696 |
| 1 | 0,656436347 | 2,1253994 | 2,0046754 | 2,2080037 | | 55 | 2,81425552 | 2,8148686 | 2,817265 | 4,244033 |
| 2 | 0,343361035 | 0,7520345 | 1,382577 | 1,7886217 | | 56 | 2,95921712 | 2,9821583 | 3,00683 | 4,554025 |
| 3 | 0,299914163 | 0,3425552 | 0,8148037 | 1,3285372 | | 57 | 3,16644972 | 3,1744246 | 3,208502 | 4,881956 |
| 4 | 0,249909887 | 0,2647883 | 0,4757365 | 0,9695344 | | 58 | 3,3940318 | 3,3846615 | 3,431602 | 5,234937 |
| 5 | 0,238529994 | 0,2368788 | 0,3115475 | 0,7101907 | | 59 | 3,55231796 | 3,6272355 | 3,681479 | 5,619442 |
| 6 | 0,213421062 | 0,217603 | 0,2409852 | 0,5309777 | | 60 | 3,94153487 | 3,9266314 | 3,958971 | 6,040589 |
| 7 | 0,20281078 | 0,2016538 | 0,2103839 | 0,4170568 | | 61 | 4,25791211 | 4,2402152 | 4,262871 | 6,502166 |
| 8 | 0,185146931 | 0,1879899 | 0,1949845 | 0,3530227 | | 62 | 4,53002582 | 4,5441623 | 4,594161 | 7,007009 |
| 9 | 0,176207725 | 0,1777504 | 0,1872021 | 0,3247372 | | 63 | 4,82059762 | 4,8841237 | 4,957014 | 7,557336 |
| 10 | 0,166478543 | 0,1738102 | 0,1865907 | 0,3225602 | | 64 | 5,2726625 | 5,2998545 | 5,354755 | 8,154984 |
| 11 | 0,178 | 0,1781682 | 0,1952883 | 0,3419773 | | 65 | 5,7965006 | 5,7538689 | 5,786443 | 8,801877 |
| 12 | 0,181260597 | 0,191959 | 0,2166667 | 0,3820046 | | 66 | 6,16465164 | 6,2074015 | 6,248722 | 9,500997 |
| 13 | 0,212527572 | 0,2213498 | 0,2546035 | 0,4428725 | | 67 | 6,66561048 | 6,6941699 | 6,740187 | 10,2577 |
| 14 | 0,255251328 | 0,2744472 | 0,3119515 | 0,5239975 | | 68 | 7,23194066 | 7,2195595 | 7,264547 | 11,08068 |
| 15 | 0,340918761 | 0,3592745 | 0,3882762 | 0,6227102 | | 69 | 7,75437423 | 7,7524681 | 7,832834 | 11,98182 |
| 16 | 0,469438204 | 0,4709735 | 0,478413 | 0,733939 | | 70 | 8,24520375 | 8,3203956 | 8,463351 | 12,97444 |
| 17 | 0,600452789 | 0,5869259 | 0,573481 | 0,8508244 | | 71 | 8,90997409 | 9,0039732 | 9,175619 | 14,07063 |
| 18 | 0,69685118 | 0,6871317 | 0,6640724 | 0,9659705 | | 72 | 9,79423357 | 9,8314829 | 9,980394 | 15,27875 |
| 19 | 0,7725077 | 0,7688651 | 0,7434102 | 1,0728234 | | 73 | 10,7235753 | 10,764109 | 10,87447 | 16,60263 |
| 20 | 0,85274673 | 0,8319065 | 0,8085726 | 1,1666771 | | 74 | 11,7474514 | 11,766157 | 11,84542 | 18,0429 |
| 21 | 0,870175764 | 0,8761608 | 0,8596791 | 1,2450498 | | 75 | 12,807767 | 12,80868 | 12,88228 | 19,59956 |
| 22 | 0,917420988 | 0,913161 | 0,8981636 | 1,3074798 | | 76 | 13,8512576 | 13,880124 | 13,98436 | 21,27431 |
| 23 | 0,951372771 | 0,9432933 | 0,9255779 | 1,3549747 | | 77 | 14,9529892 | 15,013246 | 15,16248 | 23,07098 |
| 24 | 0,972590566 | 0,9570773 | 0,9437239 | 1,3893484 | | 78 | 16,1747803 | 16,258042 | 16,43233 | 24,9942 |
| 25 | 0,948383568 | 0,9568162 | 0,9551917 | 1,4125976 | | 79 | 17,6017208 | 17,630786 | 17,80411 | 27,04747 |
| 26 | 0,952629849 | 0,9599438 | 0,9626065 | 1,4264248 | | 80 | 19,01811 | 19,130572 | 19,27455 | 29,23279 |
| 27 | 0,973058664 | 0,9723795 | 0,9668185 | 1,4320151 | | 81 | 20,737311 | 20,759279 | 20,82776 | 31,55312 |
| 28 | 0,992668034 | 0,9825113 | 0,9663827 | 1,4301303 | | 82 | 22,5045238 | 22,42005 | 22,44862 | 34,01783 |
| 29 | 0,990866584 | 0,9758165 | 0,9595036 | 1,4214488 | | 83 | 24,0545699 | 24,011403 | 24,14121 | 36,65008 |
| 30 | 0,951298032 | 0,9507069 | 0,9464491 | 1,4069482 | | 84 | 25,3932289 | 25,66069 | 25,93404 | 39,49651 |
| 31 | 0,908983957 | 0,9246712 | 0,9296622 | 1,3881447 | | 85 | 27,4539093 | 27,592797 | 27,86567 | 42,64099 |
| 32 | 0,913695671 | 0,9101594 | 0,9116441 | 1,3671535 | | 86 | 29,8537423 | 29,729829 | 29,97472 | 46,22464 |
| 33 | 0,902249285 | 0,8975836 | 0,8934521 | 1,3466657 | | 87 | 31,7567496 | 31,927605 | 32,32323 | 50,47152 |
| 34 | 0,88173434 | 0,8777559 | 0,875731 | 1,3298994 | | 88 | 34,1327034 | 34,331519 | 35,05583 | 55,71283 |
| 35 | 0,85256047 | 0,851685 | 0,8609542 | 1,3204303 | | 89 | 36,9470118 | 37,071142 | 38,46867 | 62,39868 |
| 36 | 0,81924882 | 0,8284497 | 0,8540658 | 1,3217615 | | 90 | 39,9295338 | 40,37225 | 43,03869 | 71,08873 |
| 37 | 0,800281226 | 0,8264021 | 0,8603483 | 1,3366566 | | 91 | 42,9533066 | 45,420439 | 49,35707 | 82,42367 |
| 38 | 0,847727527 | 0,8573284 | 0,8821964 | 1,3665126 | | 92 | 52,3931655 | 53,650292 | 57,98188 | 97,08979 |
| 39 | 0,913952126 | 0,907374 | 0,9177382 | 1,4111456 | | 93 | 63,6782719 | 64,96054 | 69,33746 | 115,7891 |
| 40 | 0,955362649 | 0,9592008 | 0,9624989 | 1,4691684 | | 94 | 77,6186877 | 78,926155 | 83,77333 | 139,21 |
| 41 | 1,011915877 | 1,0110849 | 1,0124191 | 1,5388111 | | 95 | 93,9452615 | 95,809783 | 101,7341 | 167,9718 |
| 42 | 1,066573409 | 1,0617558 | 1,0657959 | 1,6188191 | | 96 | 114,047576 | 116,4258 | 123,8729 | 202,5054 |
| 43 | 1,103909571 | 1,1123112 | 1,1232323 | 1,7091049 | | 97 | 138,865993 | 141,87662 | 150,9469 | 242,8682 |
| 44 | 1,164280433 | 1,1728406 | 1,1863139 | 1,8110302 | | 98 | 169,593261 | 173,54142 | 183,3851 | 288,5446 |
| 45 | 1,240623866 | 1,247639 | 1,2566709 | 1,9273457 | | 99 | 208,176123 | 213,25271 | 220,5852 | 338,3442 |
| 46 | 1,342830677 | 1,3249738 | 1,3367939 | 2,0618135 | | 100 | 256,305171 | 261,49213 | 260,4384 | 390,4879 |
| 47 | 1,389271834 | 1,3959373 | 1,4315381 | 2,2184779 | | 101 | 324,89 | 309,63879 | 299,8399 | 442,864 |
| 48 | 1,434606581 | 1,4933134 | 1,5472932 | 2,4006123 | | 102 | 347,57 | 345,45601 | 336,2099 | 493,2814 |
| 49 | 1,647941128 | 1,6467479 | 1,6883682 | 2,6095838 | | 103 | 371,835 | 372,46207 | 368,7811 | 539,4685 |
| 50 | 1,827864333 | 1,8279349 | 1,8542095 | 2,8440825 | | 104 | 397,793 | 398,69182 | 398,3467 | 578,6864 |
| 51 | 2,015785139 | 2,0147966 | 2,0397098 | 3,1001675 | | 105 | 425,563 | 426,48469 | 425,5029 | 607,1386 |
| 52 | 2,163104222 | 2,2282409 | 2,2366897 | 3,3723132 | | 106 | 455,272 | 455,65422 | 448,2301 | 619,7139 |
| 53 | 2,542060666 | 2,4626981 | 2,435597 | 3,6552108 | | 107 | 487,055 | 484,27109 | 459,5877 | 610,6952 |
| | | | | | | 108 | 510,801 | 508,11151 | 447,4697 | 575,6706 |
| | | | | | | 109 | 535,704 | 501,62991 | 400,0576 | 514,0388 |
| | | | | | | 110 | 561,821 | 383,55759 | 316,799 | 430,7414 |

Y en los siguientes gráficos se puede ver el creciente grado de suavizado al aumentar el parámetro b.



**Ajuste por el método de las sumas o de King y Hardy**

Este es un método clásico de ajuste de funciones biométricas que sean no lineales en sus parámetros. En ocasiones se usa combinadamente con el método de mínimos cuadrados como fase previa. El método no es único y, dependiendo de la función a ajustar, puede variar en el número de grupos que se sumen o en la forma de obtener los parámetros en función de las sumas. Básicamente consiste en sumar la función para una serie de casos con el objetivo de ir después eliminando parámetros operando con las sumas y, una vez suficientemente simplificado el problema, ir obteniendo sucesivamente la estimación de cada uno de los parámetros.

Veamos con un ejemplo cómo se llevaría a cabo:

Queremos ajustar el tanto instantáneo de mortalidad a la primera ley de Makeham esto es:

$$\mu_x = A + BC^x$$

Disponemos, para ello de datos de n edades distintas igualmente espaciadas con periodo k entre cada una con sus respectivas aproximaciones empíricas al tanto instantáneo de mortalidad:

$$(x_1,\mu_1);(x_2,\mu_2);\ldots;(x_n,\mu_n) \qquad \text{con} \quad x_2 = x_1 + k;\; x_3 = x_2 + k;\ldots;x_n = x_{n-1} + k$$

Ahora dividamos primero las n edades en tres grupos de h edades consecutivas y llamaremos $S_1$,$S_2$,y $S_3$ a las sucesivas sumas de la función ($\mu_x$) para los grupos 1,2,3

Tendremos:

$$S_1 = \sum_{i=0}^{h-1} \mu(x_1 + i.k) = hA + B\sum_{i=0}^{h-1} C^{(x_1+i.k)} = hA + B.(C^{x_1} + C^{x_1+k} + C^{x_1+2k} + \ldots + C^{x_1+(h-1)k}) =$$

$$= h.A + B.C^{x_1}(1 + C^k + C^{2k} + \ldots + C^{(h-1)k}) = h.A + B.C^{x_1}.\frac{C^{(h-1)k}.C^k - 1}{C^k - 1} = h.A + B.C^{x_1}.\frac{C^{hk} - 1}{C^k - 1}$$

Análogamente:

$$S_2 = \sum_{i=0}^{h-1} \mu((x_1 + hk) + i.k) = h.A + B.C^{x_1+hk}.\frac{C^{hk} - 1}{C^k - 1}$$

Y, también:

$$S_3 = \sum_{i=0}^{h-1} \mu((x_1 + 2hk) + i.k) = h.A + B.C^{x_1+2hk}.\frac{C^{hk} - 1}{C^k - 1}$$

Si obtenemos las primeras diferencias eliminamos el parámetro A:

$$\Delta S_1 = S_2 - S_1 = B.C^{x_1+hk}.\frac{C^{hk}-1}{C^k-1} - B\cdot C^{x_1}\cdot\frac{C^{hk}-1}{C^k-1} =$$

$$= B.\frac{C^{hk}-1}{C^k-1}(C^{x_1+hk} - C^{x_1}) = B\cdot C^{x_1}(C^{hk}-1)\cdot\frac{C^{hk}-1}{C^k-1}$$

Y

$$\Delta S_2 = S_3 - S_2 = B.C^{x_1+2hk}.\frac{C^{hk}-1}{C^k-1} - B\cdot C^{x_1+hk}\cdot\frac{C^{hk}-1}{C^k-1} =$$

$$= B.\frac{C^{hk}-1}{C^k-1}(C^{x_1+2hk} - C^{x_1+hk}) = B\cdot C^{x_1+hk}(C^{hk}-1)\cdot\frac{C^{hk}-1}{C^k-1}$$

De donde dividiendo las primeras diferencias entre sí obtendremos una estimación del parámetro C:

$$\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1} = \frac{B\cdot C^{x_1+hk}(C^{hk}-1)\cdot\dfrac{C^{hk}-1}{C^k-1}}{B\cdot C^{x_1}(C^{hk}-1)\cdot\dfrac{C^{hk}-1}{C^k-1}} = C^{hk} \qquad \Rightarrow \quad C = \sqrt[hk]{\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}}$$

Puede despejarse B de la primera o de la segunda diferencia:

$$B = \frac{\Delta S_1}{C^{x_1}(C^{hk}-1)\cdot\dfrac{C^{hk}-1}{C^k-1}} \qquad \text{o bien} \qquad B = \frac{\Delta S_2}{C^{x_1+hk}(C^{hk}-1)\cdot\dfrac{C^{hk}-1}{C^k-1}}$$

o incluso obtener como estimación un promedio de ambos valores despejados.

Volviendo a una cualquiera de las sumas despejaríamos A como:

$$A = \frac{S_1 - BC^{x_1}\dfrac{C^{hk}-1}{C^k-1}}{h}$$

*Por ejemplo*, supongamos que queremos ajustar los siguientes datos a la primera ley de Makeham

$$\mu_x = A + BC^x$$

| x | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1000.\mu_x$ | 8 | 12 | 25 | 50 | 100 | 205 |

Dividimos la serie de datos en 3 tramos de longitud 2 años ( periodos h=2 de duración entre dato y dato un año K=1):

Y tendremos que :

$S_1$=8+12=20 $S_2$=25+50=75 $S_3$=100+205=305

$\Delta_1$=75-20=55 $\Delta_2$=230

Y, por lo tanto:

$$C = \left(\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}\right)^{\frac{1}{hk}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{230}{55}} = C = 2.045$$

$$B = \frac{\Delta S_1}{C^{x_1}(C^{hk}-1)\cdot\dfrac{C^{hk}-1}{C^k-1}} = \frac{55}{(2.045)^{75}(2.045^2-1)\dfrac{2.045^2-1}{2.045-1}} = 2.8319\cdot 10^{-23}$$

$$A = \frac{S_1 - BC^{x_1}\dfrac{C^{hk}-1}{C^k-1}}{h} = \frac{55-\left(2.8319\cdot 10^{-23}.(2.045)^{75}\cdot\dfrac{2.045^2-1}{2.045-1}\right)}{2} = 17.2848$$

**Ajuste de las funciones biométricas para los principales modelos de supervivencia:**

**Primera ley de Dormoy:**

1.-La función de supervivencia de la cohorte es:

$$l_x = K.S^x \qquad (K>0; S<1)$$

Que es linealizable como

$$\ln l_x = \ln K + x \ln S$$

Como estrictamente K no es un parámetro sino el valor inicial de la cohorte $l_0$ deberíamos considerar el ajuste a la función:

$$z_x = s\cdot x$$

Con

$$z_x = \frac{l_x}{l_0} \qquad s = \ln S$$

Llevando a cabo este ajuste lineal ( sin término independiente) obtendríamos el paramétro S.

2.-La probabilidad de fallecimiento anual es la constante: 1-S:

$$q_x = 1 - S$$

Cuya solución de ajuste mínimo cuadrático será la media aritmética de las tasas anuales de mortalidad:

$$\hat{q}_x = 1 - S = \overline{q_x}$$

3.- El tanto instantáneo de mortalidad también es constante y su ajuste mínimo cuadrático también coincidirá con la media de los tantos instantáneos.

$$\hat{\mu}_x = -\ln S = \overline{\mu_x}$$

**Segunda ley de Dormoy.**

1.-La función de supervivientes de la cohorte es también linealizable tomando logaritmos:

$$l_x = KS_1{}^x S_2{}^{x^2}; \qquad (K > 0;\ S_1, S_2 < 1) \qquad \to\to \ln l_x = \ln K + x \ln S_1 + x^2 \ln S_2$$

Cuya solución mínimo cuadrática sería:

$$A = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$A = \begin{pmatrix} \ln K \\ \ln S_1 \\ \ln S_2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} \ln l_{x_1} \\ \ln l_{x_2} \\ .. \\ .. \\ \ln l_{x_n} \end{pmatrix}$$

También puede considerarse K=$l_0$ fijo y proceder como en la primera ley de Dormoy

2. -Las probabilidades anuales siguen también una función linealizable tomando logaritmos, tras una pequeña reordenación de los términos:

$$q_x = 1 - S_1 S_2^{2x+1} \qquad \to \ln(1 - q_x) = \ln S_1 + (2x+1)\ln S_2$$

3.- El tanto instantáneo de mortalidad es una función lineal fácilmente ajustable por MC:

$$\mu_x = -\ln S_1 - 2x \ln S_2$$

**Ley de Gompertz**

1.La función de supervivencia de la cohorte es :

$$l_x = Kg^{C^x} \qquad (K>0;\, 0<g<1;\, C>1) \quad \text{puede transformarse en :}$$
$$\ln\ l_x = \ln K + C^x \ln g$$

Y esta función podría ajustarse por el método de las sumas ( 3 grupos)

2.La probabilidad anual  puede también ajustarse por este método ( 3 grupos) tras tomar logaritmos:

$$q_x = 1 - g^{C^x(C-1)} \qquad \to\to \ln(1-q_x) = C^x\big((C-1)\ln g\big)$$

3.-El tanto instantáneo podría resolverse como ajuste lineal MC, tras tomar logaritmos:

$$\mu_x = -\ln g.\ln C.C^x \quad \to\to \ln \mu_x = A + Bx \quad ;;;A = \ln(-\ln g \ln C);;;B = \ln C$$

De B se obtiene C y con C y A obtenemos g.

**Primera ley de Makeham**

1.La función supervivencia de la cohorte :

$$l_x = KS^x g^{C^x} \quad ,,,K = \frac{l_0}{g} > 0;\, 0<g;\, S<1; \quad C>1$$

Puede obtenerse mediante dos procedimientos:

a) A partir de los datos de cohorte se obtienen las probabilidades de fallecimiento anual y tras su ajuste se utilizan los parámetros para estimarla.

b) Tomando logaritmos y empleando después el método de las sumas con cuatro grupos

2. Las probabilidades anuales:

$$q_x = 1 - Sg^{C^x(C-1)}$$

Puede ajustarse por el método de las sumas (3 grupos) tras tomar logaritmos:

$$\ln(1-q_x) = \ln S + (C-1)\ln gC^x$$

3.- En cuanto al tanto instantáneo se ajusta por el método de las sumas con tres grupos como ya se vio en el ejemplo más arriba.