Algunos conceptos de Combinatoria

1. Principio básico del conteo

Supongamos que se realizan dos experimentos. Si el primero puede tener m resultados diferentes y por cada resultado del primero hay n resultados del segundo, entonces hay $n \times m$ resultados posibles para los dos experimentos conjuntamente.

Este principio se puede generalizar para r experimentos, cada uno con n_i posibles resultados para cada resultado de los $i-1$ anteriores ($i = 1, \ldots r$), en este caso, el número total de resultados es $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$

Ejemplo 1 *¿Cuántas matrículas de automóvil distintas se tendrían si los 3 primeros lugares los ocuparan letras y los 4 últimos números? ¿Y si se prohíbe que se repitan letras y números?*

Respuesta.- $26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 175{,}760{,}000$ y
$26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 78{,}624{,}000$

2. Permutaciones

¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar las letras a,b,c? La respuesta es 6: abc, acb, bac, bca, cab y cba. Cada una de éstas ordenaciones es una permutación de las 3 letras.
Si se tienen n objetos distintos, existen $n \times (n-1) \times (n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1 = n!$ permutaciones de los n objetos.

Ejemplo 2 *Luis quiere poner 10 libros en una estantería. De los 10 libros, 4 son de matemáticas, 3 de química, 2 de historia y 1 de lengua. El chico quiere ordenarlos de forma que queden juntos los de la misma materia. ¿Cuántas ordenaciones diferentes son posibles?*

Respuesta.- $4! \times 4! \times 3! \times 2!$

2.1. Permutaciones con repetición

¿Cuántas palabras distintas pueden formarse con las letras PEPPER? Si pudiéramos distinguir todas las letras, entonces $P_1E_1P_2P_3E_2R$ no sería lo mismo que $P_2E_1P_1P_3E_2R$ y la respuesta sería que pueden formarse 6! palabras, sin embargo es evidente que todas estas dan lugar a la misma palabra:

$P_1E_1P_2P_3E_2R$	$P_1E_1P_3P_2E_2R$	$P_2E_1P_1P_3E_2R$
$P_2E_1P_3P_1E_2R$	$P_3E_1P_1P_2E_2R$	$P_3E_1P_2P_1E_2R$
$P_1E_2P_2P_3E_1R$	$P_1E_2P_3P_2E_1R$	$P_2E_2P_1P_3E_1R$
$P_2E_2P_3P_1E_1R$	$P_3E_2P_1P_2E_1R$	$P_3E_2P_2P_1E_1R$

Así pues hay $\frac{6!}{3!2!} = 60$ palabras distintas.

En general, si tenemos n objetos de los cuales n_1 son de un tipo, n_2 son de otro, ... y n_r son de otro, hay $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$ permutaciones distintas.

3. Combinaciones

En muchas ocasiones interesa saber el número de grupos diferentes de r objetos que pueden formarse si se dispone de n diferentes. Cuando el orden de selección es importante, ya sabemos que éste número es $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-r+1)$. Como de esta forma cada grupo de r items aparecería contado $r!$ veces, el número de grupos diferentes de r items elegidos entre n diferentes es

$$\frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Definición 1 *Definimos*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}, \text{ con } r \leq n$$

y decimos que representa el número de combinaciones posibles de n *objetos tomados de* r *en* r*, cuando el orden de selección no se considera importante.*

Ejemplo 3 *A partir de un grupo de 5 hombres y 7 mujeres ¿Cuántos comités que consten de 2 hombres y 3 mujeres se pueden formar? ¿Y si dos de las mujeres no quieren estar juntas en el mismo comité?*

Respuesta.- 350 y 300

Ejemplo 4 *Supongamos que tenemos* n *componentes electrónicas de las cuales* m *son defectuosas (D) y* $n-m$ *funcionan (F) correctamente. Las componentes son indistinguibles a simple vista, ¿de cuántas formas pueden ordenarse de forma que no haya dos defectuosas consecutivas?*

Si $m > n-m+1$ no hay ninguna porque en cualquier ordenación habría 2 defectuosas consecutivas necesariamente.

Supongamos que $m \leq n-m+1$. La siguiente notación nos ayudará a resolver el problema. Dada una ordenación, por ejemplo $DFDFDFFFF$ ($n=9,\ m=3,\ n-m=6$), le asociamos biunívocamente una serie en la que indicamos cuantas componentes que no funcionan hay entre dos que funcionan, en este caso $1F1F1F0F0F0F0$. Otro ejemplo, $FDDFDFFFF$, su representante es $0F2F1F0F0F0F0$.

Observa que, en general, serán series de $n-m+1$ números y $n-m$ $F's$. Lo que sucede es que, ahora, las F's estan fijas y realmente las podríamos eliminar y asociar a cada ordenación únicamente la serie de números que la caracteriza, en los casos anteriores 1110000 y 0210000.

Así que nos interesará contar las series de $n-m+1$ números en las que aparezcan m $1's$ (y, por tanto, $n+1$ $0's$). ¿Cuántas hay?
Respuesta.- $\binom{n-m+1}{m}$

4. Argumentos combinatorios para justificar propiedades

Demostrar la siguiente igualdad

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \text{ para } 1 \leq r \leq n.$$

Este resultado puede demostrarse analíticamente o mediante argumentos combinatorios.

Supongamos que tenemos n objetos y formamos grupos de r elementos, esto puede hacerse de $\binom{n}{r}$ maneras diferentes. Si nos fijamos en un objeto en particular, vemos que $\binom{n-1}{r-1}$ de los grupos lo contienen y $\binom{n-1}{r}$ no.

5. Coeficientes multinomiales

Consideremos un conjunto de n items distintos que tiene que dividirse en r grupos distintos de tamaños $n_1, n_2, \ldots, n_r$, de manera que $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$. ¿Cuántas divisiones diferentes son posibles?

La respuesta es

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\ldots-n_{r-1}}{n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$$

Definición 2 *Si* $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$, *llamamos* coeficientes multinomiales *a*

$$\binom{n}{n_1\ n_2 \ldots n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!},$$

que representan el número de posibles divisiones diferentes de n *objetos distintos en* r *grupos de tamaños* $n_1, n_2 \ldots n_r$.

Ejemplo 5 *Una comisaría de policía de un pueblo consta de 10 oficiales. Si 5 deben patrullar las calles, 2 se quedan trabajando en la comisaría y 3 están de reserva, ¿cuántas divisiones diferentes en 3 grupos pueden hacerse con los 10 policías?*

Respuesta.- $\frac{10!}{5!2!3!} = 2520$

6. Distribución de bolas en urnas

Es fácil ver que hay r^n posibles resultados cuando n bolas distinguibles se distribuyen en r urnas distinguibles, ya que, cada bola puede caer en cualquiera de las r urnas diferentes.

Vamos a suponer que las n bolas son indistinguibles, ¿cuántos resultados posibles hay en éste caso? Observa que cada resultado puede describirse mediante un vector de r componentes $(x_1, x_2, \ldots x_r)$ donde x_i denota el número de bolas en la urna i-ésima. Así que el problema se reduce a encontrar el número de vectores diferentes que hay con valores enteros no negativos y de forma que la suma de sus r componentes sea n.

Vamos a resolver primero un caso particular y después generalizaremos. Supongamos que $n = 8$ y $r = 3$, un vector de los que estamos buscando sería, por ejemplo, (2,4,2). Podríamos identificar este vector con la representación 00 | 0000 | 00. Otro vector podría ser (6,0,2) que se corresponde con 000000 | | 00. Observa que lo que diferencia una configuración de otra es *dónde se encuentran las barras* que indican la separación entre cajas. Las barras, en el primer caso, están en las posiciones {3, 8}, en el segundo, en las posiciones {7, 8}. Por tanto el problema se reduce a encontrar cuantas posiciones distintas pueden ocupar las 2 barras separadoras. La respuesta es que tantas como grupos de tamaño 2 podamos construir con los números {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10}, es decir, $\binom{10}{2}$.

En general si tenemos n bolas y r urnas, habrá $r-1$ barras separadoras y $n+r-1$ lugares donde podría aparecer una barra. Entonces la solución en el caso general es $\binom{n+r-1}{r-1}$

Ejemplo 6 *Un inversor tiene 20 mil euros para invertir en 4 activos. Él desea que cada inversión se haga en unidades de mil euros. Si quiere invertir los 20 mil, ¿de cuántas maneras diferentes puede hacerlo? ¿Y si no tiene que invertirlo todo?*

Respuesta.- $\binom{23}{3}$ y $\binom{24}{4}$