Notas sobre Fibrados diferenciables, Conexiones y Clases Características

Angel Montesinos-Amilibia

October 22, 2007

Contents

1 Complementos de variedades diferenciables y grupos de Lie [War] 2

1.1 Variedades diferenciables que son Hausdorff y paracompactas . 2

1.2 Grupos de Lie 4

2 Fibrados diferenciables 6

3 Clases características en fibrados principales 11

3.1 Notaciones. Campos vectoriales fundamentales. 11

3.2 Formas diferenciales con valores en $\mathfrak{g}$ 13

3.3 Connexiones en un fibrado principal 15

3.3.1 Levantamiento horizontal de vectores y campos vectoriales, de M a P 17

3.3.2 Levantamiento horizontal de curvas de M a P. Transporte paralelo 19

3.4 Clases características, cfr. [GHV], [KN, ch. XII] and [Dup, ch. 4] 20

3.4.1 Homomorfismo de Chern-Weil 24

3.4.2 $G = Gl(n;\mathbb{R})$, clases de Pontrjagin 25

3.4.3 $G = Gl(n;\mathbb{C})$, clases de Chern 26

3.4.4 SO(n). Clase de Euler 26

4 Characteristic classes in associated bundles 28

4.1 Associated bundles. Fundamental vector fields 28

4.2 Associated connections 29

4.3 Connections in a vector bundle 31

4.4 Linear connections 34

4.5 Characteristic classes in vector bundles 36

Resumen

Una exposición esquelética del concepto de fibrado diferenciable, conexiones en fibrados principales y en sus asociados (fibrados vectoriales en particular), homomorfismo de Chern-Weyl y expresión de las clases características de Chern, Pontrjagin y Euler como clases de la cohomología de de Rham.

Capítulo 1

Complementos de variedades diferenciables y grupos de Lie [War]

1.1 Variedades diferenciables que son Hausdorff y paracompactas

Definición 1. *Sea $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a\in A}$ un recubrimiento abierto de un espacio topológico X. Un* refinamiento abierto *de $\mathcal{U}$ es un recubrimiento abierto $\mathcal{V} = \{V_b\}_{b\in B}$ de X junto con una aplicación $f : B \to A$ tal que $V_b \subset U_{f(b)}$, para cualquier $b \in B$. Una colección de subconjuntos $\{U_a\}_{a\in A}$ de X es* localmente finita *si para cada $x \in X$, existe un recubrimiento abierto V de X tal que el conjunto $\{a \in A \ : \ V \cap U_a \neq \emptyset\}$ es finito. Un espacio topológico X es* paracompacto *si todo recubrimiento abierto de X tiene un refinamiento localmente finito.*

Una variedad diferenciable que sea Hausdorff es paracompacta si cada una de sus componentes conexas tiene una base numerable de su topología. En lo que sigue, se supondrá que todas las variedades diferenciables de partida son Hausdorff y paracompactas. Las variedades que se definan a partir de ellas también lo serán, aunque eso no será probado.

Definición 2. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Su* soporte*, denotado* $\mathrm{supp}(f)$ *es la clausura del subconjunto de X en el que f no se anula. Si M es una variedad diferenciable, una* partición de la unidad *en M es una familia $\{f_a : M \to \mathbb{R}\}_{a\in A}$ de funciones diferenciables en M tal que:*

a) La colección $\{\mathrm{supp}(f_a)\}_{a\in A}$ es localmente finita;

b) Para cada $m \in M$ y $a \in A$ se tiene $f_a(m) \geq 0$;

c) Para cada $m \in M$, se tiene $\sum_{a\in A} f_a(m) = 1$ (nótese que el primer miembro se puede reducir a una suma finita tomando solamente las funciones que no se anulan en m).

De una partición de la unidad $\{f_a\}_{a\in A}$ *se dice que está* subordinada *a un recubrimiento* $\{U_b\}_{b\in B}$ *si existe una aplicación* $j : A \to B$ *tal que* $\mathrm{supp}(f_a) \subset U_{j(a)}$, *para cada* $a \in A$. *Y se dice que está* subordinada *a un recubrimiento* $\{U_a\}_{a\in A}$ con el mismo índice *si* $\mathrm{supp}(f_a) \subset U_a$ *para cada* $a \in A$.

Teorema 1.1.1. *Sea* M *una variedad diferenciable y sea* $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a\in A}$ *un recubrimiento abierto de* M. *Entonces existe una partición numerable de la unidad* $\{f_i : i = 1, 2, 3 \dots\}$ *subordinada al recubrimiento* $\mathcal{U}$ *tal que* $\mathrm{supp}(f_i)$ *es compacto para cada* i. *Si no se requieren soportes compactos, entonces existe una partición de la unidad* $\{f_a\}_{a\in A}$ *subordinada a* $\mathcal{U}$ *con el mismo índice, en la que sólo una subcolección numerable de las* f_a *son funciones no idénticamente nulas.*

Corolario 1. *Sea* M *una variedad diferenciable,* $A \subset M$ *un abierto y* $C \subset M$ *un cerrado tales que* $C \subset A$. *Entonces existe una función diferenciable* $f : M \to \mathbb{R}$ *tal que*

a) $0 \le f(m) \le 1$ *para todo* $m \in M$;

b) $f(m) = 1$ *si* $m \in C$;

c) $\mathrm{supp}(f) \subset A$.

Sea K un campo tensorial diferencialbe de tipo (r, s) en M. Este campo define una aplicación $C^\infty(M, \mathbb{R})$-multilineal de $A^1(M)\times\cdots\times A^1(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)$ a $C^\infty(M, \mathbb{R})$ por medio de $K(\alpha^1, \dots, \alpha^r, X_1, \dots, X_s)$, donde las α^i pertenecen a $A^1(M)$, es decir son 1-formas diferenciales, y donde $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $i = 1, \dots, s$. Así

Proposición 1. *Sea*

$$\tilde{K} : A^1(M) \times \cdots \times A^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

una aplicación $C^\infty(M, \mathbb{R})$*-multilineal. Entonces, existe un único campo tensorial diferenciable de tipo* (r, s) *en* M *cuya aplicación* $C^\infty(M, \mathbb{R})$*-multilineal asociada coincide con* $\tilde{K}$.

Ahora mostramos dos importantes fórmulas para la derivada de Lie. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial cuyo flujo denotamos por $\phi_t : D_t \to D_{-t}$, $t \in \mathbb{R}$, y sea $m \in M$. Como $\cup_{t>0} D_t = \cup_{t<0} D_t = M$, existe $\epsilon > 0$ tal que $m \in D_t$ siempre que $|t| < \epsilon$. Por tanto, si $Y \in \mathfrak{X}(M)$, el vector $d\phi_{-t}(Y_{\phi_t(m)}) \in T_m M$ está bien definido cuando $|t| < \epsilon$. Se tiene así

$$(\mathcal{L}_X Y)_m = [X, Y]_m = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (d\phi_{-t}(Y_{\phi_t(m)})).$$

También, si ω es un campo tensorial covariante, por ejemplo una forma diferencial o una métrica pseudo-riemanniana, tenemos

$$(\mathcal{L}_X \omega)_m = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi_t^* \omega)_m.$$

1.2 Grupos de Lie

En lo que sigue, sea G un grupo de Lie con elemento neutro e y álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Denotamos por λ_g y ρ_g las traslaciones izquierda y derecha definidas por $g \in G$.

Proposición 2. *Sea $X \in \mathfrak{g}$. Entonces existe un único homomorfismo de grupos de Lie $\exp_X : \mathbb{R} \to G$ tal que $\exp'_X(0) = X$, y consiste en la curva integral maximal de X que pasa por e para $t = 0$. Denotemos por $\exp : \mathfrak{g} \to G$ la aplicación dada por $\exp(X) = \exp_X(1)$ (*aplicación exponencial*).*

1) *$\exp(0) = e$ y $\exp(tX) = \exp_X(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$;*

2) *$\exp((t_1 + t_2)X) = \exp(t_1X)\exp(t_2X)$ para cualesquiera $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Por tanto, $\exp(X)^{-1} = \exp(-X)$;*

3) *$\exp : \mathfrak{g} \to G$ es C^∞ y $d\exp : T_0\mathfrak{g} \to T_eG = \mathfrak{g}$ es la identidad bajo la identificación canónica $T_0\mathfrak{g}$ con $\mathfrak{g}$. Por tanto, existe un entorno abierto U de 0 en $\mathfrak{g}$ y un entorno abierto V de e en G tales que $\exp(U) = V$ y $\exp|_U : U \to V$ es un difeomorfismo;*

4) *Si $a \in G$ entonces $\lambda_a \circ \exp_X : \mathbb{R} \to G$ es la curva integral maximal de X que pasa por a para $t = 0$. Por ello, los campos vectoriales invariantes a la izquierda son completos. Además el flujo de X está dado por $\rho_{\exp(t)}$;*

5) *Sea $\phi : H \to G$ un homomorfismo de grupos de Lie, y sea $\mathfrak{h}$ el álgebra de Lie de H. Entonces el diagrama siguiente es conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\phi"] & G \\ \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp"'] \arrow[r, "d\phi"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

Sea $G = Gl(n;\mathbb{C})$ o $G = Gl(n;\mathbb{R})$. En ambos casos tenemos un grupo de Lie, cuya álgebra de Lie se puede identificar canónicamente con $gl(n;\mathbb{C})$ (resp. $gl(n;r)$), es decir con el álgebra de Lie de los endomorfismos de $\mathbb{C}n$ (resp. $\mathbb{R}^n$). Si A pertenece a una de esas dos álgebras, $\mathfrak{g}$, pongamos

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Esta serie converge uniformemente a un elemento de G en cualquier región acotada de esa álgebra y se tiene $\exp(A) = e^A$. Tenemos, además, para cualquier $B \in G$ and $A \in \mathfrak{g}$:

$$\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}, \quad Be^AB^{-1} = e^{BAB^{-1}}$$

y si ahora $A, B \in \mathfrak{g}$ son tales que $[A, B] = 0$, entonces $e^A\, e^B = e^{A+B}$.

Definición 3. *Una* acción a la izquierda *del grupo de Lie G en la variedadd diferenciable M es una aplicación diferenciable $\mu : G \times M \to M$ tal que para cualesquiera $m \in M$ y $a, b \in G$ se tiene*

$$\begin{aligned}
&\mu(e, m) = m, \\
&\mu(a, \mu(b, m)) = \mu(ab, m)
\end{aligned}$$

En tal caso, para cada $a \in G$ definimos la aplicación $\mu_a : M \to M$ mediante $\mu_a m = \mu(a, m)$. Una acción a la derecha *se define de modo similar como una aplicación diferenciable $\nu : M \times G \to M$ tal que $\nu(m, e) = m$, $\nu(\nu(m, a), b) = \nu(m, ab)$.*

Entonces cada μ_a, ν_a es un difeomorfismo. Tenemos $\mu_a \circ \mu_b = \mu_{ab}$ y $\nu_a \circ \nu_b = \nu_{ba}$.

Hay muchos tipos de acciones con propiedades especiales interesantes. Usaremos sólo tres tipos, aquellas que son *libres,* o *efectivas,* o *transitivas.* Una acción (a la izquierda o a la derecha) μ es *libre* si el hecho $\mu_a m = m$ para algún $m \in M$ implica $a = e$. Una acción es *efectiva* si el hecho $\mu_a = \mathrm{id}$ implica $a = e$. Finalmente, una acción es *transitiva* si dado un par cualquiera $m_1, m_2 \in M$, existe algún $a \in G$ tal que $\mu_a(m_1) = m_2$.

Definición 4. *Una* representación *de un grupo de Lie G en un espacio vectorial real or complejo V es un homomorfismo de grupos de Lie $\phi : G \to \mathrm{Aut}(V)$. Una* representación *de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en un espacio vectorial real or complejo V es un homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$. Una representación del grupo de Lie G en V se llama fiel* si es inyectiva.

Denotemos por $c_a : G \to G$ el automorfismo interno $c_a(b) = aba^{-1}$. Este automorfismo define una acción a la izquierda de G en G, concretamente aquella dada por $(a, b) \mapsto c_a(b)$. Esa acción tiene un punto fijo, el neutro e, es decir $c_a(e) = e$ para todo $a \in G$. Por tanto, dc_a aplica T_eG en T_eG y de hecho es un automorfismo de $T_eG = \mathfrak{g}$. Tenemos por tanto una aplicación $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ dada por $\mathrm{Ad}(a) = dc_a$. Como $c_a \circ c_b = c_{ab}$ tenemos $\mathrm{Ad}(ab) = dc_{ab} = dc_a \circ dc_b = \mathrm{Ad}(a) \circ \mathrm{Ad}(b)$. Por tanto, Ad es un homomorfismo de grupos de Lie, es decir una representación de G en $\mathfrak{g}$ llamada *representación adjunta* de G. Denotemos por $\mathrm{ad} = dA\big|_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to T_I(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) = \mathrm{End}(\mathfrak{g})$. Así ad es un homomorfismo de álgebras de Lie y por tanto es una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$ llamada *representación adjunta* de $\mathfrak{g}$.

Los dos diagramas siguientes son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "c_a"] & G \\
\mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\mathrm{Ad}(a)"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"] & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \\
\mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\mathrm{ad}"] & \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \arrow[u, "\exp"']
\end{tikzcd}$$

Tenemos también

$$\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y], \quad \text{for all } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Capítulo 2

Fibrados diferenciables

Los fibrados son una generalización del concepto de variedad. En lo que sigue trataremos solamente de los fibrados diferenciables, es decir aquellos en los que las variedades y aplicaciones que intervienen son diferenciables.

Definición 5. *Sea G un grupo de Lie y W una variedad diferenciable sobre la cual actúa G efectivamente por la izquierda mediante una acción que denotaremos $(g, x) \to gx$. Un* fibrado (diferenciable) *con fibra tipo W y grupo G es una aplicación diferenciable $\pi : E \to M$ entre dos variedades diferenciables junto con una familia de difeomorfismos $\{\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times W\}_{\alpha \in A}$, donde A es un conjunto de índices, la familia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un recubrimiento abierto de M, y los difeomorfismos ϕ_α, llamados* trivializaciones *satisfacen las siguientes propiedades:*

1) *Para cada $\alpha \in A$, $\pi_1 \circ \phi_\alpha = \pi|_{U_\alpha}$, donde $\pi_1 : U_\alpha \times W \to U_\alpha$ es la proyección natural. En otros términos, si $E_m = \pi^{-1}(m)$ denota la fibra sobre $m \in U_\alpha$, entonces ϕ_α envía E_m a $\{m\} \times W$. Como U_α es un difeomorfismo, esto define un difeomorfismo $\phi_{\alpha m} : E_m \to W$.*

2) *Sean $\alpha, \beta \in A$. Si $m \in U_\alpha \cap U_\beta$, existe una aplicación, denotada $\phi_{\alpha\beta m} : W \to W$, definida por $\phi_{\beta m} \circ \phi_{\alpha m}^{-1}$. Se requiere que exista un elemento, denotado $\phi_{\alpha\beta}(m) \in G$ tal que $\phi_{\alpha\beta}(m)x = (\phi_{\beta m} \circ \phi_{\alpha m}^{-1})(x)$, para todo $x \in W$. Puesto que λ es efectiva, ese elemento $\phi_{\alpha\beta}(m) \in G$ es único, y esto define una aplicación $\phi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to G$. Pues bien, se requiere que esa aplicación sea diferenciable. A esta condición se le llama* compatibilidad de las dos trivializaciones.

Ha de entenderse todo esto cuando decimos que (E, π, M, G, W) es un fibrado. E recibe el nombre de espacio total*, M el de* base *o* espacio base*, W el de* fibra tipo*, G el de* grupo estructural *y las aplicaciones $\phi_{\alpha\beta}$ el de* funciones de transición.

Es claro que si $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times W$ es una trivialización del fibrado y $V \subset U$ es abierto, entonces la aplicación $\phi|_{\pi^{-1}(V)} : \pi^{-1}(V) \to V \times W$ es una trivialización compatible con todas las demás trivializaciones y se puede añadir a ellas. También es posible que "sobren" trivializaciones, en el sentido de que para cierto subconjunto $B \subset A$ la familia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in B}$ recubra también M. Sea H un subgrupo cerrado de G y supongamos que para todo par de trivializaciones ϕ_α, ϕ_β, siendo $\alpha, \beta \in B$, la función de transición $\phi_{\alpha\beta}$ tome sus valores en H. Entonces podemos describir el mismo fibrado como (E, π, M, H, W), y a la nueva subfamilia de trivializaciones se le llama *reducción del grupo estructural* del fibrado. El caso extremo sería aquel en el que pudiéramos reducir G al grupo consistente en su elemento neutro. En tal caso, la familia de trivializaciones podría consistir en un solo elemento, y el fibrado recibiría el nombre de *trivial.*

Llamemos ahora, para abreviar, $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, $U_{\alpha\beta\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Si $\phi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to G$, $\alpha, \beta \in A$, son las funciones de transición de un fibrado, tenemos $\phi_{\alpha\alpha}(m) = e$ para todo $m \in U_{\alpha\beta}$, y también $\phi_{\alpha\beta}(m)\phi_{\beta\gamma}(m) = \phi_{\alpha\gamma}(m)$ para todo $m \in U_{\alpha\beta\gamma}$. Estas son las llamadas condiciones de *cociclos.*

Una vez definido el concepto de fibrado, hemos de tratar de las aplicaciones de fibrados, también llamadas morfismos.

Definición 6. *Sean* (E_i, π_i, M_i, G, W), $i = 1, 2$, *dos fibrados con el mismo grupo estructural y la misma fibra tipo. Una* aplicación *o* morfismo *entre los dos es un par de aplicaciones* $\Psi : E_1 \to E_2$, $\psi : M_1 \to M_2$ *tales que* $\pi_2 \circ \Psi = \psi \circ \pi_1$. *En tal caso, para cada trivialización* $\phi_1 : \pi_1^{-1}(U_1) \to U_1 \times W$ *del primer fibrado y cada trivialización* $\phi_2 : \pi_2^{-1}(U_2) \to U_2 \times W$ *del segundo, la aplicación* $\phi_2 \circ \Psi \circ \phi_1^{-1} : (U_1 \cap \psi^{-1}(U_2)) \times W \to U_2 \times W$, *vendrá dada en la forma* $(\phi_2 \circ \Psi \circ \phi_1^{-1})(m_1, x) = (\psi(m_1), g(m_1, x))$. *Pues bien, se exige que la aplicación* $x \in W \mapsto g(m_1, x) \in W$ *sea igual a* $x \mapsto g(m_1)x$ *para cierto elemento (que será único)* $g(m_1) \in G$, *y que la aplicación así definida* $m_1 \in U_1 \cap \psi^{-1}(U_2) \mapsto g(m_1) \in G$ *sea diferenciable.*

Un morfismo de fibrados se llama isomorfismo *si* Ψ *y* ψ *son difeomorfismos.*

Veamos ahora que las funciones de transición determinan el fibrado.

Proposición 3. *Sea* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *un recubrimiento abierto de la variedad diferenciable* M, *sea* G *un grupo de Lie, y, para cada par* $\alpha, \beta \in A$, *sea* $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to G$ *una aplicación diferenciable de manera que la familia de estas aplicaciones* $g_{\alpha\beta}$ *cumpla las condiciones de cociclos. Sea* $(g, x) \in G \times W \mapsto gx \in W$ *una acción efectiva a la izquierda. Entonces, existe un único fibrado* (E, π, M, G, W) *que tiene a las* $g_{\alpha\beta}$ *como funciones de transición (la unicidad se entiende salvo isomorfismos de fibrados).*

Demostración. Consideramos el conjunto $C = \{(\alpha, m, x) \in A \times M \times W : m \in U_\alpha\}$. Consideramos en C la siguiente relación: $(\alpha, p, x) \approx (\beta, q, y)$ sii $p = q$ y $x = g_{\alpha\beta}(p)y$. Mediante las condiciones de cociclos se comprueba fácilmente que se trata de una relación de equivalencia. Denotamos por $[\alpha, p, x]$ la clase de (α, p, x). Ponemos $E = C/\approx$ y $\pi[\alpha, p, x] = p$. Para cada $\alpha \in A$ definimos la aplicación $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times W$ poniendo $\phi_\alpha[\beta, m, x] = (m, g_{\alpha\beta}(m)x)$. Si $[\gamma, m, y] = [\beta, m, x]$, tendremos $m \in U_{\alpha\beta\gamma}$, $g_{\alpha\gamma}(m) = g_{\alpha\beta}(m)g_{\beta\gamma}(m)$ y $y = g_{\gamma\beta}x$. Por consiguiente

$$(m, g_{\alpha\gamma}(m)y) = (m, g_{\alpha\beta}(m)g_{\beta\gamma}(m)g_{\gamma\beta}(m)x) = (m, g_{\alpha\beta}(m)x) = \phi_\alpha[\beta, m, x],$$

lo que demuestra la consistencia de la definición. La aplicación ϕ_α es biyectiva y claramente cumple $\pi_1 \circ \phi_\alpha = \pi|_{U_\alpha}$. Utilizando ahora un atlas para M y otro para W, se comprueba que se puede proporcionar a E una única estructura de variedad diferenciable que haga de las ϕ_α difeomorfismos. Tenemos $(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})(m,x) = \phi_\alpha[\beta, m, x] = (m, g_{\alpha\beta}(m)x)$; es decir, las funciones de transición son las $g_{\alpha\beta}$, como queríamos. La demostración de la unicidad salvo isomorfismos se deja como ejercicio. □

Vamos a describir dos tipos especiales de fibrado que serán el objetivo principal de lo que sigue. Se trata de los fibrados vectoriales y de los fibrados principales.

Un *fibrado vectorial* es un fibrado (E, π, M, G, W), en el que W es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita (con $\mathbb{K}$ igual a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y la acción de G en W es una representación *fiel* (el nombre que se utiliza para representaciones en lugar de "efectiva"). En otras palabras, para $a \in G$, la aplicación $x \to ax$ es un automorfismo lineal que es la identidad sii $a = e$.

Esta estructura de fibrado define una estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial en cada fibra de E. Sea $m \in M$ y supongamos $m \in U_\alpha$. Si $X, Y \in E_m$ y $k \in \mathbb{K}$, ponemos

$$X + Y = \phi_\alpha^{-1}(m, \phi_{\alpha m}(X) + \phi_{\alpha m}(Y)), \quad kX = \phi_\alpha^{-1}(m, k\phi_{\alpha m}(X)),$$

esto es, $\phi_{\alpha m}$ se convierte en un isomorfismo vectorial. Se comprueba fácilmente que la definición no depende de la elección de la trivialización a cuya base U_α pertenezca m.

El ejemplo más importante de un fibrado vectorial es la aplicación canónica $\pi : TM \to M$ de la variedad tangente de una variedad M sobre M. Si $\phi : U \to A \subset A$ es una carta de M, podemos definir la trivialización $\tilde{\phi} : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ poniendo

$$\tilde{\phi}(X) = (\pi(X), X^1, \dots, X^n), \quad \text{si} \quad X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial \phi^i}\Big|_{\pi(X)}.$$

Un *fibrado principal* es un fibrado (P, π, M, G, G) o brevemente (P, π, M, G), donde G es un grupo de Lie que actúa sobre sí mismo por mediante traslaciones a la izquierda. Contra lo que se podría imaginar a primera vista, no vamos a poder dar a cada fibra E_m estructura de grupo de Lie. En lugar de eso, obtendremos una acción libre por la derecha de G en P que conserva las fibras. En efecto, sea $a \in G$ y $m \in M$. Si $u \in P_m$ y $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ es una trivialización alrededor de u, ponemos $R_a u = \phi_{\alpha m}^{-1}(\rho_a \phi_{\alpha m}(u)) = \phi_{\alpha m}^{-1}(\phi_{\alpha m}(u)a)$, donde ρ_a denota la traslación a la derecha en G definida por a. Tendremos así $\phi_{\alpha m} \circ R_a = \rho_a \circ \phi_{\alpha m}$ on P_m. La definición de R_a es consistente, porque si $m \in U_\beta$, tendremos

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha m} \circ R_a &= \rho_a \circ \lambda_{\phi_{\alpha\beta m}} \circ \phi_{\beta m} = \lambda_{\phi_{\alpha\beta m}} \circ \rho_a \circ \phi_{\beta m} \\ &= \phi_{\alpha m} \circ \phi_{\beta m}^{-1} \circ \rho_a \circ \phi_{\beta m},\end{aligned}$$

donde λ_a denota la traslación a la izquierda en G definida por a. Así

$$R_a = \phi_{\beta m}^{-1} \circ \rho_a \circ \phi_{\beta m},$$

en P_m, como queríamos. La acción R_a es diferenciable y libre, como se demuestra fácilmente.

Hemos visto antes que dado un recubrimiento abierto de una variedad diferenciable M y una familia de aplicaciones diferenciables definidas, cada una, en uno de los abiertos de ese recubrimiento, con valores en G, y que cumplan la condición de cociclos, esa familia da origen a un único fibrado una vez se ha elegido una fibra tipo W sobre la cual G actúe efectivamente por la izquierda. Esto quizás sirva para justificar el nombre de "principal". En efecto, la acción de G en G por traslaciones a la izquierda es siempre efectiva, de modo que, en el supuesto de que tengamos definido un fibrado (E, π_E, M, G, W), este fibrado tendrá unas funciones de transición que cumplen las condiciones de cociclos, y por consiguiente queda definido automáticamente un único fibrado principal (P, π_P, M, G) que tiene las mismas funciones de transición que el anterior. Se dice entonces que esos dos fibrados son asociados. Ahora bien, a un fibrado principal podemos asociarle todos los fibrados que se obtienen por este procedimiento: corresponden a todas las posibles diferentes acciones efectivas a la izquierda de G sobre cualesquiera variedades W. Por ello, se considera a (P, π_P, M, G) como principal, en el sentido de que los demás, sus asociados, dependen de él.

Por ejemplo, si tenemos un fibrado vectorial (E, π, M, G, W), podemos considerar el espacio dual W^* de W. Sobre él actúa a la izquierda G mediante $(g\alpha)(x) = \alpha(g^{-1}x),\ \alpha \in W^*,\ x \in W$. Esa acción es efectiva porque si $g\alpha = \alpha$ para todo $\alpha \in W^*$, tendremos $\alpha g^{-1} = \alpha$, para todo $\alpha \in W^*$, lo que implica $g^{-1}x = x$, para todo $x \in W$ es decir $g = e$. Por tanto, a un fibrado vectorial viene asociado su dual, que tiene como fibra tipo W^*. En general, la acción a la izquierda de G sobre $\otimes^{(r,s)}W$ viene dada por

$$g(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \otimes \alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^s) = gx_1 \otimes \cdots \otimes gx_r \otimes \alpha^1 g^{-1} \otimes \cdots \otimes \alpha^s g^{-1},$$

y esa acción es efectiva. Por ello, dado un fibrado vectorial $\xi = (E, \pi, M, G, W)$, se tiene automáticamente definido el fibrado $\otimes^{(r,s)}\xi$, *producto tensorial de tipo* (r, s) de ξ, como el asociado mediante la acción que se acaba de describir.

De manera parecida, si tenemos dos fibrados vectoriales $\xi_i = (E_i, \pi_i, M, G_i, F_i),\ i = 1, 2$, sobre la misma base, se puede definir su suma directa $\xi_1 \oplus \xi_2$ y su producto tensorial $\xi_1 \otimes \xi_2$, pero esas definiciones se dejan como ejercicio.

En el caso de un fibrado vectorial, hay un modo más sencillo de construir y presentar su fibrado principal asociado. Supongamos que $\xi = (E, \pi, M, G, W)$ es un fibrado vectorial, de modo que las fibras E_m tienen definida ya una estructura de espacio vectorial. Fijamos una base cualquiera $b = (b_1, \ldots, b_k)$ de W, siendo k la dimensión de W. La órbita B de la base b por el grupo G es el conjunto de bases $B = \{gb = (gb_1, \ldots, gb_k)\ :\ g \in G\}$. Si ϕ_α es una trivialización of ξ alrededor de m ponemos

$$P_m = \phi_{\alpha m}^{-1}(B) = \{\phi_{\alpha m}^{-1}(c) := (\phi_{\alpha m}^{-1}(c_1), \ldots, \phi_{\alpha m}^{-1}(c_k))\ :\ (c_1, \ldots, c_k) \in B\}.$$

Como $\phi_{\alpha m}$ es un isomorfismo, P_m es un subconjunto de las bases del espacio vectorial E_m. En primer lugar, veamos que P_m no depende de la trivialización elegida. Si $m \in U_\beta$, tendremos que si $c = gb \in B$ entonces

$$\phi_{\beta m}^{-1}(c) = \phi_{\alpha m}^{-1}(\phi_{\alpha\beta m}c) = \phi_{\alpha m}^{-1}(\phi_{\alpha\beta m}gb) \in P_m,$$

porque $\phi_{\alpha\beta m} g \in G$ y así $\phi_{\alpha\beta m} gc \in B$. El espacio total del fibrado principal que estamos definiendo es $P = \cup_{m\in M} P_m$ y la proyección $\pi_P : P \to M$ envía P_m a m. Ahora definimos las trivializaciones de P, $\psi_\alpha : \pi_P^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$. Si $m \in U_\alpha$ and $u \in P_m$, $\psi_\alpha(u) = (m, \psi_{\alpha m}(u))$, donde

$$\psi_{\alpha m}(u) = g, \quad \text{si} \quad u = \phi_{\alpha m}^{-1}(gb).$$

Así, $\psi_{\alpha m}^{-1}(g) = \phi_{\alpha m}^{-1}(gb)$. Por consiguiente

$$(\psi_{\beta m} \circ \psi_{\alpha m}^{-1})(g) = \psi_{\beta m}(\phi_{\alpha m}^{-1}(gb)) = \psi_{\beta m}(\phi_{\beta m}^{-1}(\phi_{\beta\alpha m} gb)) = \phi_{\beta\alpha m} g.$$

Esto demuestra que $\psi_{\beta\alpha m} = \phi_{\beta\alpha m}$, es decir P tiene las mismas funciones de transición que E. Esta construcción es, pues, equivalente a la de la Proposición 3.

Hay también otro modo de construir y representar un fibrado asociado a un fibrado principal $\xi = (P, \pi, M, G)$, o sea un fibrado con la misma base y funciones de transición que las de ξ pero con una fibra tipo W, sobre la cual actúa efectivamente por la izquierda el grupo G. Para ello, definimos en $P \times W$ la relación de equivalencia por la cual (u, w) es equivalente a $(R_a u, a^{-1} w)$. Denotamos por $u \cdot w$ la clase de equivalencia de (u, w). Pues bien, ponemos E para denotar el conjunto de todas esas clases de equivalencia, que será el espacio total del fibrado asociado a ξ. Su proyección vendrá dada por $\pi_E(u \cdot w) = \pi(u)$. Si $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ es una trivialización de ξ, definimos $\psi_\alpha : \pi_E^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times W$ mediante $\psi_\alpha(u \cdot w) = (m, \phi_{\alpha m}(u) w)$, si $u \in P_m$. Puesto que $\phi_{\alpha m}(R_a u) w) = \phi_{\alpha m}(u) u w)$, la definición de ψ_α es consistente. Tenemos así $\psi_{\alpha m}(u \cdot w) = \phi_{\alpha m}(u) w$, con lo cual $\psi_{\alpha m}^{-1}(w) = \phi_{\alpha m}^{-1}(e) \cdot w$. Veamos ahora las funciones de transición. Sean $m \in U_{\alpha\beta}$ y $w \in W$. Tendremos

$$\begin{aligned}(\psi_{\beta m} \circ \psi_{\alpha m}^{-1})(w) &= \psi_{\beta m}(\phi_{\alpha m}^{-1}(e) \cdot w) = (\phi_{\beta m} \circ \phi_{\alpha m}^{-1})(e) w \\ &= \phi_{\alpha\beta}(m) e w = \phi_{\alpha\beta}(m) w.\end{aligned}$$

y así las funciones de transición son exactamente las mismas que las de ξ. Por ello, el fibrado que acabamos de construir es equivalente al que corresponde a la Proposición 3. La ventaja operativa de esta construcción es que en ella no se emplean explícitamente las cartas para definir el espacio total.

Sea $\xi = (E, \pi, M, G, W)$ un fibrado, N una variedad diferenciable, y $f : N \to M$ una aplicación diferenciable. Estos datos nos van a permitir definir un nuevo fibrado denotado $f^*\xi = (f^*E, \tilde{\pi}, N, G, F)$, que recibe el nombre de *fibrado inducido por* f. Para ello, en primer lugar tomamos

$$f^*E = \{(n, u) \in N \times E \ : \ f(n) = \pi(u)\}, \quad \tilde{\pi}(n, u) = n.$$

Para cada trivialización $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times W$ de ξ ponemos $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ y definimos la aplicación $\psi_\alpha : \tilde{\pi}^{-1}(V_\alpha) \to V_\alpha \times W$ mediante

$$\psi_\alpha(n, w) = (n, \pi_2(\phi_\alpha(u))) = (n, \phi_{\alpha f(n)}(u)),$$

donde $\pi_2 : U_\alpha \times W \to W$ es la proyección natural. Entonces, $\psi_\alpha^{-1}(n, w) = (n, \phi_{\alpha f(n)}^{-1}(w))$. Por tanto las nuevas funciones de transición vienen dadas por $\psi_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\beta} \circ f$. A partir de aquí es fácil ver que si E es un fibrado vectorial (resp. fibrado principal) entonces f^*E también lo es.

Capítulo 3

Clases características en fibrados principales

3.1 Notaciones. Campos vectoriales fundamentales.

Usaremos los siguientes conceptos y notaciones, ya introducidos en lo que precede.

G, un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y elemento neutro e. A lo largo de estas notas supondremos que se ha fijado una base $(e_1, \ldots, e_{\dim G})$ de $\mathfrak{g}$. Las traslaciones derecha e izquierda y la conjugación definida por $a \in G$ se escriben ρ_a, λ_a, $c_a : G \to G$, respectivamente. Así $\rho_a(b) = ba$, $\lambda_a(b) = ab$, $c_a(b) = aba^{-1}$.

Sea $a \in G$. Denotamos por $\mathrm{Ad}(a) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ la aplicación lineal $(dc_a)_e : T_eG \to T_eG$. Tenemos así un homomorfismo de grupos de Lie $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, que induce un homomorfismo de álgebras de Lie $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$. Tenemos $\mathrm{ad}(A)B = [A, B]$ para cualesquiera $A, B \in \mathfrak{g}$. Recordamos también que $\mathrm{Ad} \circ \exp = \exp \circ \mathrm{ad}$ y que para cualquier $a \in G$ se tiene $c_a \circ \exp = \exp \circ \mathrm{Ad}(a)$.

(E, π_E, M, G, W), fibrado con espacio total E, proyección π_E, espacio base M, grupo de Lie G y fibra tipo W. Si $u \in E$, el subespacio $V_uE = \{X \in T_uE \;:\; d\pi_E(X) = 0\}$ recibe el nombre de *subespacio vertical* de T_uE. La dimensión de V_uE es claramente igual a la dimensión de las fibras de E y por tanto igual a la de W. El subfibrado de vectores verticales de TE se denota por VE. Si $m \in M$, E_m será la fibra de π_E sobre m, esto es $E_m = \pi_E^{-1}(\{m\})$. Finalmente, denotaremos por $\Gamma(E)$ el conjunto de las secciones diferenciables globales de π_E.

(P, π, M, G), fibrado principal con proyección $\pi : P \to M$ y grupo de Lie G. La acción a la derecha de G en P se denota por $R_a : P \to P$, $a \in G$.

Un elemento de $A \in \mathfrak{g}$ da lugar a un campo vectorial $A^* \in \mathfrak{X}(P)$, llamado *campo vectorial fundamental* definido por A; veamos cómo. Cada $u \in P$ define una aplicación diferenciable $l_u : G \to P$ dada por $l_u(a) = R_a u$; si

$m = \pi(u)$, la imagen de l_u es P_m y $l_u : G \to P_m$ es un difeomorfismo. Definimos A^* poniendo $A^*_u = dl_u(A_e) \in T_uP$. Puesto que $\pi \circ l_u = m$, claramente A^* es una sección de VP. Sabemos que $\exp_A : \mathbb{R} \to G$ es la curva integral maximal de $A \in \mathfrak{X}(G)$ que pasa por e para $t = 0$. Consideremos la curva $\sigma(t) = l_u(\exp_A(t)) = R_{\exp(tA)}u$. Se tiene

$$\sigma'(t) = dl_u(A_{\exp_A(t)}) = dl_u(d\lambda_{\exp(tA)}A_e) = d(l_u \circ \lambda_{\exp(tA)})(A_e).$$

Ahora

$$(l_u \circ \lambda_{\exp(tA)})(b) = l_u(\exp(tA)b) = R_{\exp(tA)b}u = R_b(R_{\exp(tA)}u) = l_{R_{\exp(tA)}u}b.$$

Por tanto $l_u \circ \lambda_{\exp(tA)} = l_{R_{\exp(tA)}u}$, de donde

$$\sigma'(t) = A^*_{R_{\exp(tA)}u} = A^*_{l_u(\exp(tA))} = A^*_{\sigma(t)}.$$

En otros términos, σ es la curva integral maximal de A^* que pasa por u para $t = 0$. Por eso, el flujo de A^* es $R_{\exp(tA)}$. Supongamos que para algún $u \in P$ se tenga $A^*_u = dl_u(A_e) = 0$. Entonces, la curva integral maximal de A^* que pasa por u para $t = 0$ debe ser constante, de donde concluimos $R_{\exp(tA)}u = u$. Como la acción de G en P es libre, concluimos que $\exp(tA) = e$ para todo t y esto implica $A = 0$. Como la dimensión de V_uP es igual a la de $\mathfrak{g}$, deducimos que si $X \in V_uP$, existe un único campo vectorial fundamental que coincide con X en u.

Proposition 1. *Sean $a \in G$, $A, B \in \mathfrak{g}$. Entonces*

a) $(A + B)^* = A^* + B^*$, y si $k \in \mathbb{R}$ tenemos $(kA)^* = kA^*$.

b) Pongamos $\tilde{A}^* = dR_a \circ A^* \circ R_{a^{-1}} \in \mathfrak{X}(P)$. Entonces $\tilde{A}^* = (Ad(a^{-1})A)^*$.

c) $[A^*, B^*] = [A, B]^*$.

Demostración. a) Inmediato.

b) Como es bien sabido, siendo $R_{\exp(tA)}$ el flujo de A^*, el de $\tilde{A}^*$ viene dado por

$$R_a \circ R_{\exp(tA)} \circ R_{a^{-1}} = R_{a^{-1}\exp(tA)a} = R_{c_{a^{-1}}(\exp(tA))},$$

y puesto que $c_{a^{-1}}(\exp(tA)) = \exp(\mathrm{Ad}(a^{-1})tA)$, se concluye que

$$\tilde{A}^* = (\mathrm{Ad}(a^{-1})A)^*.$$

c) Tenemos

$$[A^*, B^*]_u = \big((dR_{\exp(-tA)} \circ B^* \circ R_{\exp(tA)})_u\big)'(0) = \big((\mathrm{Ad}(\exp(tA))B)^*_u\big)'(0).$$

Ahora, $(\mathrm{Ad}(\exp(tA))B)^*_u = dl_u\big(\mathrm{Ad}(\exp(tA))B\big)$. De aquí,

$$[A^*, B^*]_u = dl_u((\mathrm{Ad}(\exp(tA))'(0)B) = dl_u(\mathrm{ad}(A)B) = dl_u([A, B]) = [A, B]^*_u,$$

como afirmábamos.

□

3.2 Formas diferenciales con valores en $\mathfrak{g}$

Denotaremos por $\Lambda^p(P,\mathfrak{g})$ el $C^\infty(P)$-modulo de p-formas diferenciales en P con valores en $\mathfrak{g}$. Si $\alpha \in \Lambda^p(P,\mathfrak{g})$ y $\beta \in \Lambda^q(P,\mathfrak{g})$, definimos $[\alpha,\beta] \in \Lambda^{p+q}(P,\mathfrak{g})$ mediante

$$[\alpha,\beta](X_1,\dots,X_{p+q}) = \sum_{\pi\in\sigma(p,q)} \mathrm{sg}(\sigma)[\alpha(X_{\pi 1},\dots,X_{\pi p}),\beta(X_{\pi(p+1)},\dots,X_{\pi(p+q)})],$$

donde $\sigma(p,q)$ significa el conjunto de permutaciones de barajar de tipo (p,q). Usando el convenio de Einstein podemos escribir de modo único $\alpha = e_i\alpha^i$, $\beta = e_i\beta^i$, donde las α^i (resp. β^i) son p-formas (resp. q-formas) ordinarias en P. Then $[\alpha,\beta] = [e_i,e_j]\alpha^i\wedge\beta^j$. Podemos definir $d\alpha$ como $e_i d\alpha^i$, que claramente no depende de la elección de la base (e_i) de $\mathfrak{g}$. Con esto es fácil probar las siguientes propiedades

1. $[\alpha,\beta] = (-1)^{pq+1}[\beta,\alpha]$.
2. $d[\alpha,\beta] = [d\alpha,\beta] + (-1)^p[\alpha,d\beta]$.
3. $(-1)^{pr}[\alpha,[\beta,\gamma]] + (-1)^{qp}[\beta,[\gamma,\alpha]] + (-1)^{rq}[\gamma,[\alpha,\beta]] = 0$,

donde, en la última fórmula, $\gamma \in \Lambda^r(P,\mathfrak{g})$.

Sea ahora $\alpha \in \Lambda^1(P,\mathfrak{g})$. Definimos el operador $D_\alpha : \Lambda^q(P,\mathfrak{g}) \to \Lambda^{q+1}(P,\mathfrak{g})$ mediante

$$D_\alpha\beta = d\beta + [\alpha,\beta]$$

y ponemos

$$\Omega_\alpha = d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha,\alpha].$$

Nótese que Ω_α es, en general, diferente de $D_\alpha\alpha$.

Proposición 4. *Con las notaciones anteriores tenemos*

a) $D_\alpha^2\beta = [\Omega_\alpha,\beta]$.

b) $D_\alpha\Omega_\alpha = 0$.

c) If $\gamma \in \Lambda^r(P,\mathfrak{g})$, *entonces* $D_\alpha[\beta,\gamma] = [D_\alpha\beta,\gamma] + (-1)^q[\beta,D_\alpha\gamma]$.

Demostración. a) Tenemos

$$\begin{aligned} D_\alpha^2\beta &= dD_\alpha\beta + [\alpha,D_\alpha\beta] = d[\alpha,\beta] + [\alpha,d\beta+[\alpha,\beta]] \\ &= [d\alpha,\beta] - [\alpha,d\beta] + [\alpha,d\beta] + [\alpha,[\alpha,\beta]] \\ &= [d\alpha,\beta] + [\alpha,[\alpha,\beta]]. \end{aligned}$$

Ahora, por la propiedad 3., tenemos

$$\begin{aligned} &(-1)^q[\alpha,[\alpha,\beta]] + (-1)^1[\alpha,[\beta,\alpha]] + (-1)^q[\beta,[\alpha,\alpha]] \\ &\quad = (-1)^q(2[\alpha,[\alpha,\beta]] + [\beta,[\alpha,\alpha]]) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto $[\alpha,[\alpha,\beta]] = \frac{1}{2}[[\alpha,\alpha],\beta]$, y obtenemos finalmente

$$D^2_\alpha\beta = [d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha,\alpha],\beta] = [\Omega_\alpha,\beta],$$

como queríamos. En cuanto a b), we have

$$D_\alpha\Omega_\alpha = d\Omega_\alpha + [\alpha,\Omega_\alpha] = \frac{1}{2}([d\alpha,\alpha] - [\alpha,d\alpha]) + [\alpha,d\alpha] + \frac{1}{2}[\alpha,[\alpha,\alpha]] = 0,$$

por las propiedades 1. y 3.

c) La propiedad 3. anterior se puede escribir como

$$[\alpha,[\beta,\gamma]] = [[\alpha,\beta],\gamma] + (-1)^{pq}[\beta,[\alpha,\gamma]]$$

El resultado anunciado se obtiene ahora añadiendo esto a la expresión de $d[\alpha,\beta]$ en la propiedad anterior 2., teniendo presente que ahora $p=1$. $\square$

Una forma $\beta \in \Lambda^q(P,\mathfrak{g})$ recibe el nombre de *equivariante* o *pseudotensorial* si $R^*_a\beta = \mathrm{Ad}(a^{-1}) \circ \beta$, es decir si

$$(R^*_a\beta)_u(X_1,\dots,X_q) = \mathrm{Ad}(a^{-1})\big(\beta_u(X_1,\dots,X_q)\big)$$

para cualesquiera $a \in G,\ u \in P,\ X_1,\dots,X_q \in T_uP$. Denotamos por $Eq^q(P,\mathfrak{g})$ el $C^\infty(M)$-módulo de q-formas diferenciales equivariantes en P con valores en $\mathfrak{g}$. Si β es equivariante, se dice que es *tensorial* si es horizontal, es decir si $i_X\beta_u = 0$ para cualesquiera $u \in P$ y $X \in V_uP$. Se deja como ejercicio probar que si α y β son equivariantes o tensoriales, entonces $[\alpha,\beta]$ también lo es. Tenemos

Lema 1. *Sea $\beta \in \Lambda^q(P,\mathfrak{g})$ tensorial. Sean $\alpha \in \Lambda^1(P,\mathfrak{g}),\ u \in P$ y $X_0,\dots,X_q \in T_uP$. Entonces*

$$(D_\alpha\beta)_u(X_0,\dots,X_q) = (d\beta)_u(X_0 - \alpha_u(X_0)^*_u,\dots,X_q - \alpha_u(X_q)^*_u)$$

donde $\alpha_u(X_i)^*_u$ es el valor en u del campo vectorial fundamental definido en P por $\alpha_u(X_i) \in \mathfrak{g}$.

Demostración. Denotemos por A^*_i los campos vectoriales fundamentales tales que $A_{iu} = \alpha_u(X_i)^*_u$. Como β es horizontal, y los corchetes de Lie $[A^*_i, A^*_j]$ son verticales, tenemos

$$\begin{aligned}&(d\beta)_u(X_0 - (\alpha_u(X_0)^*)_u,\dots,X_q - (\alpha_u(X_q)^*)_u)\\ &\quad=(d\beta)_u(X_0,\dots,X_q) - \sum_i (-1)^i (d\beta)_u\big(A^*_{i\,u}, X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_q\big).\end{aligned}$$

Ahora, $\mathcal{L}_{A^*_i}\beta = i_{A^*_i}d\beta + d\big(i_{A^*_i}\beta\big) = i_{A^*_i}d\beta$. Pero si $A \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{A^*}\beta =&(R^*_{\exp(tA)}\beta)'(0) = (\mathrm{Ad}(\exp(-tA)) \circ \beta)'(0) = (\mathrm{Ad}(\exp(-tA))e_j)'(0)\beta^j\\ =&(\mathrm{ad}(-A)e_j)\beta^j = -[A,e_j]\beta^j = -[A,\beta],\end{aligned}$$

donde $\beta = e_j\beta^j$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&(d\beta)_u(X_0 - \alpha_u(X_0)^*_u, \ldots, X_q - \alpha_u(X_q)^*_u) \\
&\quad=(d\beta)_u(X_0, \ldots, X_q) + \sum_i (-1)^i [\alpha_u(X_i), \beta_u](X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_q]) \\
&\quad=(d\beta + [\alpha, \beta])_u(X_0, \ldots, X_q) \\
&\quad=(D_\alpha\beta)_u(X_0, \ldots, X_q),
\end{aligned}$$

como decíamos. □

Nota 1. *La 1-forma $\alpha \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ define dos homomorfismos del fibrado tangente $TP \to P$ o, equivalentemente, dos campos tensoriales diferenciables de tipo $(1,1)$. El primero de ellos mediante $v_\alpha(X) = \alpha_u(X)^*_u \in V_uP$. El otro es $h_\alpha(X) = X - v_\alpha(X) = X - \alpha_u(X)^*_u$, para $X \in T_uP$. Supongamos que α es tal que $h_\alpha(X) = 0$ si $d\pi(X) = 0$, es decir si X es vertical. Esto significa que si X es vertical tenemos $X = \alpha_u(X)^*_u$, o en otras palabras, que para todo $A \in \mathfrak{g}$ tendríamos $A^*_u = \alpha_u(A^*)^*_u$, es decir $\alpha(A^*) = A$. En tal caso, si $\beta \in \Lambda^q(P, \mathfrak{g})$ fuera tensorial tendríamos que $D_\alpha\beta$ sería también tensorial coomo consecuencia del Lema.*

3.3 Connexiones en un fibrado principal

Una *forma de conexión* en P es una 1-forma equivariante $\omega \in Eq^1(P, \mathfrak{g})$ tal que $h_\omega(X) = 0$ para todo $X \in VP$. Entonces, $\omega(A^*) = A$, para todo $A \in \mathfrak{g}$. También, $\omega([A^*, B^*]) = \omega([A, B]^*) = [A, B]$. La forma ω define los proyectores *vertical* y *horizontal* $v = v_\omega$, $h = h_\omega$.

Así, para todo $X \in T_uP$ tenemos $h(h(X)) = h(X - \omega_u(X)^*_u) = h(X)$, porque $(\omega_u(X)^*)_u$ es vertical, de modo que h es un proyector. La aplicación v definida por $X \mapsto \omega_u(X)^*_u$ es también un proyector y tenemos $h + v = \mathrm{id}$, $h \circ v = v \circ h = 0$. La aplicación lineal $\omega_u : T_uP \to \mathfrak{g}$ es sobreyectiva por lo que su rango es la dimensión de G, y como consecuencia, el rango de v es también la dimensión de G. Concluimos que el rango de $h_u : T_uP \to T_uP$ es igual a la dimensión de M. Así, el subespacio $Q_u = h_u(T_uP)$, llamado *subespacio horizontal* es un complemento de V_uP, es decir $Q_u \oplus V_uP = T_uP$. Como $(d\pi)_u : T_uP \to T_mM$, donde $m = \pi(u)$, tiene rango igual a la dimensión de M y su núcleo es V_uP concluimos que $(d\pi)_u\big|_{Q_u} : Q_u \to T_mM$ es un isomorfismo. Tenemos también

$$Q_u = \ker \omega_u = \{X \in T_uP \ : \ \omega_u(X) = 0\}.$$

Proposición 5. *Para todo $a \in G$ tenemos $h \circ dR_a = dR_a \circ h$. Como consecuencia $(dR_a)(Q_u) = Q_{R_au}$, es decir la distribución Q en P es invariante bajo traslaciones a la derecha.*

Demostración. Sean $u \in P$, $X \in T_uP$. Entonces

$$\begin{aligned}
(h \circ dR_a)(X) &= h_{R_au}((dR_a)X) = (dR_a)X - \omega_{R_au}((dR_a)X)^*_{R_au} \\
&= (dR_a)X - (R_a^*\omega)(X)^*_{R_au} = (dR_a)X - \mathrm{Ad}(a^{-1})\omega_u(X)^*_{R_au}.
\end{aligned}$$

Recordamos ahora que por la Proposición 1.b), el campo vectorial $dR_a \circ \omega_u(X)^* \circ R_{a^{-1}}$ es igual a $\mathrm{Ad}(a^{-1})\omega_u(X)^*$. Por tanto

$$(h \circ dR_a)(X) = (dR_a)X - (dR_a)\big(\omega_u(X)^*_u\big) = (dR_a)(h_u(X)).$$

Así la afirmación se sigue. $\square$

Recíprocamente, supongamos que se nos da una distribución diferenciable Q en P, invariante bajo traslaciones a la derecha y tal que para todo $u \in P$ se tenga $Q_u \oplus V_u P = T_u P$. Entonces, esa distribución define una forma de conexión ω poniendo $\omega_u(X) = A$, donde $A \in \mathfrak{g}$ is the unique vector such that $A^*_u = v_u(X)$, where $v_u(X) + h_u(X) = X$, con $v_u(X) \in V_u P$, $h_u(X) \in Q_u$. La prueba se deja al lector. se define comois defined by

$$\Omega = \Omega_\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega].$$

La *diferencial covariante* de esa conexión es el operador D definido como en la sección 2 por

$$D\beta = D_\omega\beta = d\beta + [\omega, \beta].$$

Tenemos entonces las siguientes propiedades

$$D^2\beta = [\Omega, \beta],$$
$$D\Omega = 0.$$

La segunda propiedad se conoce como *identidad de Bianchi.*

Proposition 2. *a) Para toda $\beta \in \Lambda^q(P, \mathfrak{g})$ pongamos $\beta \circ h \in \Lambda^q(P, \mathfrak{g})$ para denotar la forma definida por*

$$(\beta \circ h)_u(X_1, \ldots, X_q) = \beta_u(h_u(X_1), \ldots, h_u(X_q)),$$

para cualesquiera $u \in P$, $X_1, \ldots, X_q \in T_u P$. Entonces, si β es equivariante, $\beta \circ h$ es tensorial.

b) $D\beta = (d\beta) \circ h$.

c) Sea $\beta \in Eq^q(P, \mathfrak{g})$. Entonces $d\beta \in Eq^{q+1}(P, \mathfrak{g})$. Por tanto $D\beta$ es tensorial;

Demostración. a) Sean $a \in G$, $u \in P, X_1, \ldots, X_q \in T_u P$. Entonces

$$\begin{aligned}(R^*_a(\beta \circ h))_u(X_1, \ldots, X_q) &= (\beta \circ h)_{R_a u}(dR_a(X_1), \ldots, dR_a(X_q)) \\ &= \beta_{R_a u}((h \circ dR_a)(X_1), \ldots, (h \circ dR_a)(X_q)) \\ &= \beta_{R_a u}((dR_a(h_u(X_1)), \ldots, (dR_a(h_u(X_1 q)) \\ &= ((R^*_a\beta) \circ h)(X_1, \ldots, X_q) = (\mathrm{Ad}(a^{-1}) \circ \beta \circ h)(X_1, \ldots, X_q).\end{aligned}$$

Por tanto, $\beta \circ h$ es equivariante, con lo cual es obviamente tensorial.

b) Es consecuencia inmediata del Lema 1.

c) Tenemos

$$R_a^*(d\beta) = d(R_a^*\beta) = d(\mathrm{Ad}(a^{-1}) \circ \beta) = d((\mathrm{Ad}(a^{-1})e_i)\beta^i)$$
$$= (\mathrm{Ad}(a^{-1})e_i)d\beta^i = \mathrm{Ad}(a^{-1}) \circ d\beta.$$

Así, $d\beta$ es equivariante. Al ser $D\beta = (d\beta)\circ h$, concluimos que $D\beta$ es tensorial.

□

Sea N otra variedad diferenciable, $f : N \to M$ una aplicación diferenciable y (f^*P, π_N, N, G) el fibrado inducido, que es también un fibrado principal con grupo G. Recordemos que

$$f^*P = \{(x, u) \in N \times P \ : \ f(x) = \pi(u)\}.$$

Sea $W : f^*P \to P$ la aplicación de fibrados principales dada por $F(x, u) = u$.

Proposición 6. *Sea ω una conexión en P. Entonces $F^*\omega$ es una conexión en f^*P y su curvatura es $F^*\Omega$.*

Demostración. En efecto, sea $a \in G$, $(x, u) \in f^*P$ y $X \in T_{(x,u)}f^*P$. Entonces

$$(R_a^*(F^*\omega))_{(x,u)}(X) = \omega_{R_a u}(d(R_a \circ F)(X)) = \mathrm{Ad}(a^{-1})(\omega_u(dF(X)))$$
$$= \mathrm{Ad}(a^{-1})(F^*\omega)_{(x,u)}(X).$$

Además, si $A \in \mathfrak{g}$, se tiene

$$(F^*\omega)_{(x,u)}(A^*_{(x,u)}) = (F^*\omega)_{(x,u)}(dl_{(x,u)}A) = \omega_u(d(F \circ l_{(x,u)})A).$$

Pero si $a \in G$, entonces

$$(F \circ l_{(x,u)})(a) = F(x, R_a u) = R_a u.$$

Por consiguiente, $(F^*\omega)_{(x,u)}(A^*_{(x,u)}) = A$. Así, $F^*\omega$ es una connexión. Su curvatura vendrá dada por

$$d(F^*\omega) + \frac{1}{2}[F^*\omega, F^*\omega] = F^d * \omega + F^*\frac{1}{2}[\omega, \omega] = F^*\Omega.$$

□

3.3.1 Levantamiento horizontal de vectores y campos vectoriales, de M a P

Sean $u \in P_m$ y $X \in T_mM$. El *levantamiento horizontal* de X a u se define como $X_u^h = (d\pi|_{Q_u})^{-1}(X) \in Q_u \subset T_uP$. El *levantamiento horizontal de un campo vectorial* $X \in \mathfrak{X}(M)$, denotado X^h, se define mediante $X_u^h = (X_{\pi(u)})_u^h$. Por tanto, tenemos $d\pi \circ X^h = X \circ \pi$.

Proposición 7. *Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces*

a) X^h es R_a-invariante para todo $a \in G$.

b) $X^h + Y^h = (X+Y)^h$. *Si* $f \in C^\infty(M)$ *entonces* $(fX)^h = (f\circ\pi)X^h$. *Además* $h[X^h, Y^h] = [X,Y]^h$.

c) *Sean* $\omega^1, \ldots, \omega^N$ *conexiones en* P *y* $\omega = \sum_{i=1}^N (t_i \circ \pi)\omega^i$ *una suma convexa, es decir* $\sum_{i=1}^N t_i = 1$, *donde las* $t_i : M \to \mathbb{R}$ *son funciones diferenciables. Entonces* ω *es una conexión. También, si* X^h, X^{h_i}, $i = 1, \ldots, N$, *denotan los levantamientos horizontales de* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *a* P *con respecto a las conexiones* $\omega, \omega^1, \ldots, \omega^N$, *respectivamente, entonces* $X^h = \sum_{i=1}^N (t_i\circ\pi)X^{h_i}$.

d) $\omega([X^h, Y^h]) = -\Omega(X^h, Y^h)$. *Por tanto, si* $\tilde{X}, \tilde{Y}$ *son vectores (o campos vectoriales) horizontales de* P, *tenemos* $\omega([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = -\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y})$.

e) Ω *es tensorial.*

Demostración. Sea $u \in P_m$: a) Tenemos $dR_a(X^h_{R_{a^{-1}}u}) \in Q_{R_{a^{-1}}u}$ porque Q es invariante bajo traslaciones a la derecha. Como

$$d\pi(dR_a(X^h_{R_{a^{-1}}u})) = d\pi(X^h_{R_{a^{-1}}u}) = X_m$$

concluimos que $dR_a \circ X^h \circ R_{a^{-1}} = X^h$, como queríamos.

b) Las dos primeras afirmaciones son inmediatas. En cuanto a la tercera, tenemos $d\pi \circ [X^h, Y^h] = [X,Y]\circ\pi$. De aquí, $d\pi(h([X^h, Y^h]_u) = [X,Y]_m$ y esto significa que $[X,Y]^h_u = h([X^h, Y^h]_u)$.

c) Sean $u \in P_m$ y $A \in \mathfrak{g}$. Entonces

$$\omega_u(A^*_u) = \sum_i t_i(m)\omega^i(A^*_u) = \sum_i t_i(m)A = A.$$

También,

$$\begin{aligned} R_a^*\omega &= \sum_i (t_i\circ\pi\circ R_a)R_a^*\omega^i = \sum_i (t_i\circ\pi)\mathrm{Ad}(a^{-1})\omega^i \\ &= \mathrm{Ad}(a^{-1})\sum_i (t_i\circ\pi)\omega^i = \mathrm{Ad}(a^{-1})\omega. \end{aligned}$$

Por consiguiente, ω es una conexión. Tenemos

$$d\pi(\sum_{i=1}^N (t_i\circ\pi)X^{h_i})_u = \sum_{i=1}^N t_i(m)X_m = X_m.$$

Ahora, por brevedad ponemos $t_i = t_i \circ \pi$. Así

$$\begin{aligned} \omega(\sum_{i=1}^N t_i X^{h_i}) &= \sum_{i,j=1}^N t_i t_j \omega^j(X^{h_i}) = \sum_{i<j=2}^N t_i t_j(\omega^j(X^{h_i}) + \omega^i(X^{h_j})) \\ &= \sum_{i<j=2}^N t_i t_j(\omega^j(X^{h_i} - X^{h_j}) + \omega^i(X^{h_j} - X^{h_i})) \\ &= \sum_{i<j=2}^N t_i t_j(\omega^j(X^{h_i} - X^{h_j}) - \omega^i(X^{h_i} - X^{h_j})) = 0 \end{aligned}$$

porque $X^{h_i} - X^{h_j}$ es vertical. Por tanto $\sum_{i=1}^{N} t_i X^{h_i}$ es ω-horizontal y debe ser igual a X^h porque X^h es también π-relacionado con X.

d) Tenemos

$$\begin{aligned}\Omega(X^h, Y^h) &= d\omega(X^h, Y^h) + \frac{1}{2}[\omega, \omega](X^h, Y^h)\\ &= X^h(\omega(Y^h)) - Y^h(\omega(X^h)) - \omega([X^h, Y^h])\\ &= -\omega([X^h, Y^h]).\end{aligned}$$

e) Sean $A, B \in \mathfrak{g}$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces

$$\begin{aligned}\Omega(A^*, B^*) &= (d\omega)(A^*, B^*) + \frac{1}{2}[\omega, \omega](A^*, B^*)\\ &= A^*(\omega(B^*)) - B^*(\omega(A^*)) - \omega([A, B]^*)\\ &+ \frac{1}{2}([\omega(A^*), \omega(B^*)] - [\omega(B^*), \omega(A^*)])\\ &= A^*(B) - B^*(A) - [A, B] + \frac{1}{2}([A, B] - [B, A]) = 0.\end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}\Omega(A^*, X^h) &= (d\omega)(A^*, X^h) + \frac{1}{2}[\omega, \omega](A^*, X^h)\\ &= A^*(\omega(X^h)) - X^h(\omega(A^*)) - \omega([A^*, X^h]) + [\omega(A^*), \omega(X^h)]\\ &= -\omega([A^*, X^h])\end{aligned}$$

Pero si $u \in P$, tenemos $[A^*, X^h]_u = ((dR_{\exp(tA)} \circ X^h \circ R_{\exp(-tA)})_u)'(0) = (X^h_u)'(0) = 0$ porque X^h es invariante bajo traslaciones a la derecha. $\square$

El resultado d) de la proposición anterior ofrece una interpretación de la curvatura. Como esencialmente $\omega([X^h, Y^h])$ mide la parte vertical de $[X^h, Y^h]$, podemos interpretar la curvatura como una medida de la falta de integrabilidad de la distribución horizontal Q.

3.3.2 Levantamiento horizontal de curvas de M a P. Transporte paralelo

Sea $\alpha : I \to M$, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$, una curva diferenciable. De una curva $\tilde{\alpha} : I \to P$ se dice que es un *levantamiento horizontal* de α si $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ y $\tilde{\alpha}'(t) \in Q_{\tilde{\alpha}(t)}$ para todo $t \in I$. Nótese que si $\tilde{\alpha}$ es un levantamiento horizontal de α y $a \in G$, entonces $R_a \circ \tilde{\alpha}$ es otro levantamiento horizontal de α.

Teorema 3.3.1. *Sea ω una conexión en P, $\alpha : I \to M$ una curva diferenciable, $t_0 \in I$ y $u_0 \in P_{\alpha(t_0)}$. Entonces, existe un único levantamiento horizontal de α, $t \in I \mapsto u(t) \in P$ tal que $u(t_0) = u_0$.*

Demostración. Sea $(\alpha^* P, \pi_I, I, G)$ el fibrado principal inducido sobre I por α. La conexión ω induce una conexión en $\alpha^* P$. Sea $\theta \in \mathfrak{X}(I)$ el campo vectorial canónico (es decir $\theta(f) = f'$ para cualquier $f \in C^\infty(I)$). Sea θ^h

su levantamiento horizontal a α^*P. Sea $t \in]a,b[\mapsto (f(t), u(t)) \in \alpha^*P$ una curva integral de θ^h tal que $t_0 \in]a,b[\subset I$ y $(f(t_0), u(t_0)) = (t_0, u_0)$. Como $d\pi_I \circ \theta = \theta \circ \pi$, tendremos $f' = 1$, por lo cual podemos suponer $f(t) = t$. Supongamos que la curva integral $(t, u(t))$, definida en $]a,b[$, es maximal. Queremos probar que $]a,b[= I$. En efecto, supongamos que $b \in I$. Tomemos entonces un punto cualquiera $v_b \in P_{\alpha(b)}$ y sea $t \in]c,d[\mapsto (t, v(t)) \in \alpha^*P$ una curva integral de θ^h tal que $b \in]c,d[$ y $v(b) = v_b$. Sea $t_1 \in]a,b[\cap]c,d[$ y sea $g \in G$ tal que $R_g v(t_1) = u(t_1))$. Entonces $(t, R_g v(t))$ es una curva integral de θ^h, definida en $]c,d[$, tal que $(t_1, R_g v(t_1)) = (t_1, u(t_1))$. Ambas curvas deben ser iguales en el dominio común, y así hemos sido capaces de extender el intervalo $]a,b[$ por la derecha y esto es absurdo. Lo mismo ocurre con a. Entonces $]a,b[= I$. La curva $t \in I \mapsto u(t)$ es la imagen, por la aplicación de fibrados principales $\alpha^*P \to P$, de la curva $(t, u(t))$. Por tanto, es horizontal, $u(t_0) = u_0$, y $(t, u(t)) \in \alpha^*P$ implica $\pi(u(t)) = \alpha(t)$. Concluimos que $u(t)$ es el levantamiento horizontal de α que buscábamos.

La unicidad se deduce del hecho de que si $u : J \to P$ es un levantamiento horizontal de α, entonces la curva $v(t) := (t, u(t))$ es una curva en α^*P, que es horizontal y cumple $d\pi_1 \circ v' = \theta$. □

Sea $[a,b]$ un intervalo cerrado y $\alpha : [a,b] \to M$ una curva diferenciable. Definimos el *transporte paralelo* a lo largo de α como la aplicación $\tau : P_{\alpha(a)} \to P_{\alpha(b)}$ tal que $\tau(u)$, $u \in P_{\alpha(a)}$, es el valor en $t = b$ del levantamiento horizontal de α que pasa por u para $t = a$.

Proposición 8. *Sea $\alpha : [a,b] \to M$ una curva diferenciable. El transporte paralelo $\tau : P_{\alpha(a)} \to P_{\alpha(b)}$ es un difeomorfismo y $\tau \circ R_g = R_g \circ \tau$, para todo $g \in G$.*

Demostración. Sea $u_a \in P_{\alpha(a)}$, y sea $t \in [a,b] \mapsto u(t) \in P$ el levantamiento horizontal de α tal que $u(a) = u_a$. Entonces $\tau(u_a) = u(b)$. La curva $R_g(u(t))$ es el levantamiento horizontal de α cuyo valor en $t = a$ es $R_g u_a$. Entonces $\tau(R_g u_a) = R_g(u(b)) = R_g(\tau(u_a))$, y esto prueba nuestra afirmación. Utilizando la dependencia diferenciable de las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria respecto a las condiciones iniciales, se comprueba que τ es diferenciable. Sea $\beta : [a,b] \to P$ dada como $\beta(t) = \alpha(a + b - t)$. Entonces, $v(t) = u(a + b - t)$ es horizontal porque $v'(t) = -u'(a + b - t)$ y $\pi(v(t)) = \alpha(a + b - t) = \beta(t)$. Por tanto v es el levantamiento horizontal de β y $\beta(a) = \alpha(b)$, $\beta(b) = \alpha(a)$, $v(a) = u(b)$, $v(b) = u(a)$. Por eso, si $\sigma : P_{\alpha(b)} \to P_{\alpha(a)}$ es el transporte paralelo a lo largo de β, tendremos $\sigma \circ \tau = \mathrm{id}$, $\tau \circ \sigma = \mathrm{id}$. Se concluye que σ y τ son difeomorfismos. □

3.4 Clases características, cfr. [GHV], [KN, ch. XII] and [Dup, ch. 4]

Denotemos por $\mathbb{K}$ el cuerpo $\mathbb{R}$ o el $\mathbb{C}$ y sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial n-dimensional. Sea $S^p(V^*)$ el $\mathbb{K}$-espacio vectorial de las aplicaciones p-lineales simétricas de $V \times \cdots \times V$ en $\mathbb{K}$. Si $\Phi \in S^p(V^*)$, $\Psi \in S^q(V^*)$ definimos $\Phi\Psi \in S^{p+q}(V^*)$ poniendo

$$(\Phi\Psi)(A_1, \ldots, A_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\pi \in \sigma(p+q)} \Phi(A_{\pi 1}, \ldots, A_{\pi p})\Psi(A_{\pi(p+1)}, \ldots, A_{\pi(p+q)}).$$

Nótese que aquí no usamos permutaciones de barajar sino la definición "natural" del producto de tensores simétricos.

Con este producto $S(V^*) = \bigoplus_{p \geq 0} S^p(V^*)$ resulta ser una $\mathbb{K}$-álgebra graduada asociativa. Sea $(v_1, \ldots, v_n)$ una base de V. Sea $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]^k$ el conjunto de los polinomios homogéneos de grado k con coeficientes en $\mathbb{K}$ en ciertas variables $x_1, \ldots, x_n$. Podemos definir una aplicación que envía un elemento cualquiera $\Phi \in S^p(V^*)$ a un elemento $\tilde{\Phi} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]^k$, mediante

$$\tilde{\Phi}(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(x, \ldots, x),$$

donde $x := \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Esta apllicación es un isomorfismo, y la aplicación inducida de $S(V^*)$ a $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ es un isomorfismo de álgebras, aunque no probaremos esto.

El caso complejo sólo ocurrirá aquí cuando G es un subgrupo cerrado de $GL(n; \mathbb{C})$, de modo que $\mathfrak{g}$ será una subálgebra compleja del álgebra de matrices complejas $n \times n$. Por motivos de concreción y brevedad trabajaremos a partir de ahora sólo con el cuerpo $\mathbb{R}$, sobreentendiéndose que todo lo que sigue se puede hacer de modo análogo cuando aquellas aplicaciones simétricas toman valores complejos.

Denotemos por $I^p(G)$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de aplicaciones $\Phi \in S^p(\mathfrak{g}^*)$ que son "invariantes", es decir

$$\Phi(\mathrm{Ad}(a)A_1, \ldots, \mathrm{Ad}(a)A_p) = \Phi(A_1, \ldots, A_p), \quad A_1, \ldots, A_p \in \mathfrak{g},$$

para todo $a \in G$. El producto de dos de esas aplicaciones invariantes es también invariante, de modo que tenemos así una subálgebra

$$I(G) = \bigoplus_{p \geq 0} I^p(G) \subset S(\mathfrak{g}*).$$

Lema 2. *Sean $\Phi \in I^p(G)$ y $B, A_1, A_2, \ldots, A_p \in \mathfrak{g}$. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{p} \Phi(A_1, \ldots, A_{i-1}, [B, A_i], A_{i+1}, \ldots, A_p) = 0.$$

Demostración. Sea $t \mapsto b(t) \in G$ una curva diferenciable cualquiera tal que $b(0) = e$, $b'(0) = B$. Entonces la función $f(t)$ dada por

$$f(t) = \Phi(\mathrm{Ad}(b(t))A_1, \ldots, \mathrm{Ad}(b(t))A_p)$$

es constante. Como

$$(\mathrm{Ad}(b(t))A_i)'(0) = \mathrm{Ad}(b(t))'(0)A_i = (d\mathrm{Ad})(b'(0))A_i = \mathrm{ad}(B)A_i = [B, A_i],$$

la afirmación se cumple. □

Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \Lambda(P, \mathfrak{g})$ de grados respectivos $m_1, \dots, m_p$. Si $\Phi \in S^p(\mathfrak{g}^*)$ definimos la forma ordinaria $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \Lambda^{m_1+\dots+m_p} P$ por medio de

$$\begin{aligned}
&\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_p)(X_1, \dots, X_{m_1+\dots+m_p)}) \\
&= \sum_{\pi \in \sigma(m_1,\dots,m_p)} \operatorname{sg}(\pi) \Phi(\alpha_1(X_{\pi 1}, \dots, X_{\pi(m_1)}), \dots).
\end{aligned}$$

Si $\alpha_i = e_j \alpha_i^j$, donde las α_i^j son m_i-formas diferenciales ordinarias en P, tenemos

$$\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = \Phi(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) \alpha_1^{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_p^{j_p}. \tag{3.4.1}$$

Entonces se puede verificar fácilmente que

$$d\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^{k_i} \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, d\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p), \tag{3.4.2}$$

donde $k_1 = 0$ y $k_i = m_1 + \dots + m_{i-1}$, para $i = 2, \dots, p$.

Proposición 9. *Sean* $\Phi \in I^p(G)$, $\mu \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ *y* $\alpha_i \in \Lambda^{m_i}(P, \mathfrak{g})$, $i = 1, \dots, p$. *Entonces*

$$d\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^{k_i} \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, D_\mu \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p),$$

donde $k_1 = 0$ *y* $k_i = m_1 + \dots + m_{i-1}$, *para* $i = 2, \dots, p$.

Demostración. Pongamos $\mu = e_a \mu^a$. Aplicando el Lema 2 a la fórmula (3.4.1) obtenemos para cada $a = 1, \dots, \dim G$:

$$0 = \sum_{i=1}^p \Phi(e_{j_1}, \dots, e_{j_{i-1}}, [e_a, e_{j_i}], e_{j_{i+1}}, \dots, e_{j_p}) \alpha_1^{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_p^{j_p}.$$

Multiplicando esto por μ^a y sumando para $a = 1, \dots, \dim G$ tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^p \Phi(e_{j_1}, \dots, e_{j_{i-1}}, [e_a, e_{j_i}], e_{j_{i+1}}, \dots, e_{j_p}) \mu^a \wedge \alpha_1^{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_p^{j_p} \\
&= \sum_{i=1}^p (-1)^{k_i} \Phi(e_{j_1}, \dots, [e_a, e_{j_i}], \dots, e_{j_p}) \alpha_1^{j_1} \wedge \dots \wedge \mu^a \wedge \alpha_i^{j_i} \wedge \dots \alpha_p^{j_p} \\
&= \sum_{i=1}^p (-1)^{k_i} \Phi(\alpha_1, \dots, [\mu, \alpha_i], \dots, \alpha_p).
\end{aligned}$$

Como $D_\mu \alpha_i = d\alpha_i + [\mu, \alpha_i]$ obtenemos lo que buscábamos sumando la última igualdad a la fórmula (3.4.2). $\square$

Proposición 10. *Sea* $\Phi \in I^p(G)$, *y sean* $\alpha_i \in \Lambda^{m_i}(P, \mathfrak{g})$, $i = 1, \dots, p$, *formas tensoriales. Entonces, existe una única forma* $\gamma \in \Lambda^k M$, *donde* $k = m_1 + \dots + m_p$, *tal que* $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = \pi^* \gamma$.

Demostración. Podemos escribir $\alpha_i = e_{j_i}\alpha_i^{j_i}$. Si $a \in G$, tendremos

$$R_a^*\alpha_i = e_{j_i}R_a^*\alpha_i^{j_i} = \mathrm{Ad}(a^{-1})\alpha_i = \mathrm{Ad}(a^{-1})(e_{j_i})\alpha_i^{j_i}.$$

Ahora observemos que para $u \in P$ el valor de $\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)_u$ está determinado por su acción sobre vectores horizontales de Q_u poque las α_i son tensoriales. Sean $X_1^h, \ldots, X_k^h$ los respectivos levantamientos horizontales de $X_1, \ldots, X_k \in T_mM$ a T_uP. Si tal forma γ existe, deberíamos tener

$$(\pi^*\gamma)_u(X_1^h, \ldots, X_k^h) = \gamma_m(X_1, \ldots, X_k) = \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)_u(X_1^h, \ldots, X_k^h).$$

La última igualdad define γ_m de modo único y lo que nos falta por probar es que el valor del segundo miembro no depende de la elección de $u \in P_m$. Así pues, sea $a \in G$. Entonces $dR_aX_i^h$ es el levantamiento horizontal de X_i a R_au, para $i = 1, \ldots, k$. Calculamos el valor de $\gamma_m(X_1, \ldots, X_k)$ usando ahora el nuevo punto $R_au \in P_m$.

$$\begin{aligned}
&\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)_{R_au}(dR_aX_1^h, \ldots, dR_aX_k^h) \\
&\quad = \Phi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p})(\alpha_1^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_p^{j_p})_{R_au}(dR_aX_1^h, \ldots, dR_aX_k^h) \\
&\quad = \Phi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p})(R_a^*\alpha_1^{j_1} \wedge \cdots \wedge R_a^*\alpha_p^{j_p})_u(X_1^h, \ldots, X_k^h) \\
&\quad = \Phi(\mathrm{Ad}(a^{-1})e_{j_1}, \ldots, \mathrm{Ad}(a^{-1})e_{j_p})(\alpha_1^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_p^{j_p})_u(X_1^h, \ldots, X_k^h) \\
&\quad = \Phi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p})(\alpha_1^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_p^{j_p})_u(X_1^h, \ldots, X_k^h) \\
&\quad = \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)_u(X_1^h, \ldots, X_k^h).
\end{aligned}$$

Así, la definición de γ es consistente y la proposición queda probada. □

Lema 3. *Sean $\mu_0,\ \mu_1 \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ y $\Phi \in I^p(G)$. Pongamos, por brevedad, $\Phi(\Omega) = \Phi(\Omega, \ldots, \Omega)$ y $\Phi(\alpha, \Omega) = \Phi(\alpha, \Omega, \ldots, \Omega)$. Entonces, si $\mu_t = \mu_0 + t(\mu_1 - \mu_0)$ and $\alpha = \mu_1 - \mu_0$ tenemos*

$$\Phi(\Omega_{\mu_1}) - \Phi(\Omega_{\mu_0}) = p\, d \int_0^1 \Phi(\alpha, \Omega_{\mu_t})dt.$$

Demostración. Tenemos

$$\Omega_{\mu_t} = d\mu_t + \frac{1}{2}[\mu_t, \mu_t] = d\mu_0 + td\alpha + \frac{1}{2}[\mu_0, \mu_0] + t[\mu_0, \alpha] + \frac{1}{2}t^2[\alpha, \alpha].$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\Phi(\Omega_{\mu_t}) &= \Phi(d\alpha + [\mu_0 + t\alpha, \alpha], \Omega_{\mu_t}) \\
&= \Phi(D_{\mu_t}\alpha, \Omega_{\mu_t}) = d\Phi(\alpha, \Omega_{\mu_t}).
\end{aligned}$$

y la afirmación se sigue. □

Corolario 2. *Sea $\mu \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$. Entonces,*

$$\Phi(\Omega_\mu) = p\, d \int_0^1 \Phi(\mu, \Omega_{t\mu})$$

Demostración. Es suficiente tomar $\mu_0 = 0,\ \mu_1 = \mu$. □

3.4.1 Homomorfismo de Chern-Weil

Sean $\omega_0, \omega_1 \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ dos conexiones. Como sabemos, cualquier suma convexa de ambas es otra conexión. Además $\omega_1 - \omega_0$ es tensorial porque para cualquier $A \in \mathfrak{g}$ tenemos $(\omega_1 - \omega_0)(A^*) = A - A = 0$.

Como consecuencia del Corolario 2 vemos que si $\Phi \in I^p(G)$ entonces $\Phi(\Omega, \dots, \Omega)$ es una forma exacta. Denotemos por $\hat{\Phi}(\Omega) \in \Lambda^{2p}M$ la única $2p$-forma diferencial en M tal que $\Phi(\Omega, \dots, \Omega) = \pi^*\hat{\Phi}(\Omega)$. Entonces $d(\pi^*\hat{\Phi}(\Omega)) = \pi^* d\hat{\Phi}(\Omega) = 0$, Por tanto, $d\hat{\Phi}(\Omega) = 0$ ya que π es una sumersión. Denotemos por $w_P(\Phi)$ la clase de cohomología de $\hat{\Phi}(\Omega)$, de modo que $w_P(\Phi) \in H^{2p}(\Lambda(M))$. Entonces

Teorema 3.4.1. *a) Si $\Phi \in I^p(G)$, entonces $w_P(\Phi)$ no depende de la conexión; sólo depende de la clase de isomorfismos de fibrados principales de (P, π, M, G).*

b) $w_P : I(G) \to H(\Lambda(M))$ es un homomorfismo de álgebras.

c) Si $f : N \to M$ es diferenciable, entonces $w_{f^*P} = f^* \circ w_E$.

Demostración. a) Es consecuencia directa del Lema 3. En efecto, si ω_0, ω_1 son dos conexiones en P, entonces $\Phi(\Omega_{\omega_1}) - \Phi(\Omega_{\omega_2}) = p\, d \int_0^1 \Phi(\alpha, \Omega_{\omega_t}) dt$, donde $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$ y $\alpha = \omega_1 - \omega_0$. Al ser ω_t una suma convexa de conexiones, es también una conexión, de donde Ω_{ω_t} es tensorial, y α es tensorial porque es la diferencia de dos conexiones. Por consiguiente:

$$\pi^*(\hat{\Phi}(\Omega_{\omega_1}) - \hat{\Phi}(\Omega_{\omega_2})) = p\, d \int_0^1 \pi^*\hat{\Phi}(\alpha, \Omega_{\omega_t}) dt = \pi^* d\Big(p \int_0^1 \hat{\Phi}(\alpha, \Omega_{\omega_t}) dt\Big).$$

Por tanto,

$$\hat{\Phi}(\Omega_{\omega_1}) - \hat{\Phi}(\Omega_{\omega_2}) = d\Big(p \int_0^1 \hat{\Phi}(\alpha, \Omega_{\omega_t}) dt\Big),$$

de manera que $\hat{\Phi}(\Omega_{\omega_1})$ y $\hat{\Phi}(\Omega_{\omega_0})$ definen la misma clase de cohomología.

Si $\psi : P' \to P$ define un isomorfismo de fibrados principales con grupo G sobre M, entonces la conexión ω en P induce una connexión $\psi^*\omega$ en P' cuya curvatura es el "pull-back" de la curvatura de ω. Por tanto, $w_P(\Phi) = w_{P'}(\Phi)$.

b) Si $\Psi \in I^q(G)$ y ponemos $r = p + q$, entonces

$$\begin{aligned}
&(\Phi\Psi)(\Omega, \dots \Omega)(X_1, \dots, X_{2r}) \\
=&\frac{1}{r!} \sum_{\pi \in \sigma(2, \dots, 2)} \mathrm{sg}(\pi)(\Phi\Psi)(\Omega(X_{\pi 1}, X_{\pi 2}), \dots, \Omega(X_{\pi(2r-1)}, X_{\pi(2r)}) \\
=&\frac{1}{r!} \sum_{\gamma \in \sigma(r)} \sum_{\pi \in \sigma(2, \dots, 2)} \mathrm{sg}(\pi)\Phi(\Omega(X_{\pi\tau 1}, X_{\pi\tau 2}), \dots)\Psi(\Omega(X_{\pi\tau(2r-1)}, X_{\pi\tau(2r)}), \dots),
\end{aligned}$$

donde $\tau \in \sigma(2, \dots, 2)$ es la permutación de barajar definida por $\tau(2k-1) = 2\sigma(k) - 1,\ \tau(2k) = 2\sigma(k),\ k = 1, \dots, p+q$. Como τ es par y $\{\pi \circ \tau\ :\ \pi \in$

$\sigma(2,\ldots,2)\} = \sigma(2,\ldots,2)$, tenemos

$$
\begin{aligned}
&(\Phi\Psi)(\Omega,\ldots\Omega)(X_1,\ldots,X_{2(p+q)})\\
&\quad=\frac{1}{r!}\sum_{\gamma\in\sigma(r)}\sum_{\pi\in\sigma(2,\ldots,2)}\operatorname{sg}(\pi)\Phi(\Omega(X_{\pi 1},X_{\pi 2}),\ldots)\Psi(\Omega(X_{\pi(2r-1)},X_{\pi(2r)}),\ldots)\\
&\quad=\sum_{\pi\in\sigma(2,\ldots,2)}\operatorname{sg}(\pi)\Phi(\Omega(X_{\pi 1},X_{\pi 2}),\ldots)\Psi(\Omega(X_{\pi(2r-1)},X_{\pi(2r)}),\ldots)\\
&\quad=\big(\Phi(\Omega,\ldots,\Omega)\wedge\Psi(\Omega,\ldots,\Omega)\big)(X_1,\ldots,X_{2r}).
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, $(\Phi\Psi)(\Omega,\ldots,\Omega) = \Phi(\Omega,\ldots,\Omega)\wedge\Psi(\Omega,\ldots,\Omega)$ y de aquí se sigue b). Nótese que aquí hemos necesitado el producto natural de tensores simétricos para que la última fórmula no aparezca multiplicada por un factor no deseado.

c) f^*P es un G-fibrado principal sobre N. Ponemos $F : f^*P \to P$ definido por $F(x,u) = f(u)$, para $(x,u)\in f^*P$. Entonces, si ω es una conexión en P, $F^*\omega$ es una conexión en f^*P cuya forma de cuvatura es $F^*\Omega$, donde Ω es la curvatura de ω. A partir de aquí, la afirmación se sigue tras una verificación sencilla. □

Las clases de cohomología $w_P(\Phi)\in H(\Lambda(M))$, para $\Phi\in I(G)$ reciben el nombre de *clases características*. La aplicación $w_P : I(G)\to H(\Lambda(M))$ se conoce como *homomorfismo de Chern-Weil.*

Si hubiéramos considerado aplicaciones invariantes $I^p(G)$ con valores complejos, el resultado habría sido un homomorfismo de $I(G)$ a $H(\Lambda(M,\mathbb{C}))$.

3.4.2 $G = Gl(n;\mathbb{R})$, clases de Pontrjagin

En este ejemplo, P es el fibrado principal asociado a un fibrado vectorial diferenciable E de rango n sobre una variedad diferenciable M. Obtenemos una colección de elementos de $I(Gl(n;\mathbb{R}))$ considerando un elemento $A\in gl(n;\mathbb{R}) = \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$. Sea

$$\det(\lambda I - \frac{1}{2\pi}A) = \sum_{k=0}^{n} P_{k/2}(A,\ldots,A)\lambda^{n-k}$$

el polinomio característico $\frac{1}{2\pi}A$. Entonces $P_{k/2}$ es un polinomio homogéneo de grado k, de modo que define una aplicación simétrica también denotada $P_{k/2}$: $gl(n;\mathbb{R})\times\cdots\times gl(n;\mathbb{R})\to\mathbb{R}$. Al ser $\det a(\lambda I - \frac{1}{2\pi}A)a^{-1} = \det(\lambda I - \frac{1}{2\pi}A)$, para cualquier $a\in Gl(n;\mathbb{R})$, es claro que $P_{k/2}$ es invariante; se le llama $\frac{k}{2}$-*polinomio de Pontrjagin de orden* , y $w_P(P_{k/2})$ la $\frac{k}{2}$-*clase de Pontrjagin* de E (o de P, recuérdese que E y P se deducen uno del otro)

Estos polinomios forman una base de todos los polinomios en $gl(n;\mathbb{R})$ invariantes frente a $Ad(G)$. Otra base es la de las trazas $\operatorname{tr}_k(A) = \operatorname{tr}(A^k)$, $k = 0,\ldots,n$. Las clases características $w_P(\operatorname{tr}_k)$ son llamadas *clases traza.*

Todo fibrado vectorial real admite una reducción al grupo $O(n)$. Es decir, podemos calcular sus clases de Pontrjagin por medio de una conexión con valores en el álgebra $o(n)$ de endomorfismos antisimétricos de $\mathbb{R}^n$. Como para $A \in o(n)$ se tiene

$$\det(\lambda I - \frac{A}{2\pi}) = \det(\lambda I - \frac{A}{2\pi})^\top = \det(\lambda I + \frac{A}{2\pi}),$$

concluimos que en el polinomio correspondiente $\sum_{k=0}^n P_{k/2}(A, \ldots, A)\lambda^{n-k}$ las entradas no nulas de A deben aparecer solamente en productos de grado par. En otras palabras, $P_{k/2} = 0$ si k es impar. Por eso, $w_P(P_{k/2}) = 0$ para k impar, y estos justifica la notación: los subíndices fraccionarios son despreciables porque dan clases nulas de cohomología.

3.4.3 $G = Gl(n; \mathbb{C})$, clases de Chern

Ahora P es el fibrado principal asociado a un fibrado vectorial complejo E de rango n sobre M. Para cualquier $A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$, ponemos

$$\det(\lambda I - \frac{1}{2\pi\, i}A) = \sum_{k=0}^{n} C_k(A, \ldots, A)\lambda^{n-k}$$

El coeficiente complejo C_k define una aplicación invariante $gl(n; \mathbb{C}) \times \cdots \times gl(n; \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Las correspondientes clases de cohomología $w_P(C_k)$ se llaman *clases de Chern* de P o de E.

Sea $A \in gl(n; \mathbb{R}) \subset gl(n; \mathbb{C})$. Entonces, multiplicando ambos miembros por i^n tenemos

$$\det((i\lambda)I - \frac{A}{2\pi}) = \sum_{k=0}^{n} i^k C_k(A, \ldots, A)(i\lambda)^{n-k}.$$

de donde $P_{k/2} = i^k C_k$. Por tanto, si E es un fibrado vectorial real sobre M y lo complexificamos, la $\frac{k}{2}$-clase de Pontrjagin de E será igual a i^k por la clase k-Chern del fibrado complexificado.

3.4.4 SO(n). Clase de Euler

Es un caso especial para fibrados vectoriales reales orientables. Primero, si n es impar, convenimos en decir que la clase que vamos a definir es cero. Por eso, supondremos que P es el fibrado principal asociado a E, un fibrado vectorial orientable riemanniano de rango $n = 2r$. Aquí, riemanniano significa que tenemos definido un campo h de formas bilineales simétricas definidas positivas sobre E. Es decir, si $X, Y \in \Gamma(E)$, tenemos que $h(X, Y)$ es una función diferenciable en M tal que la aplicación $(X, Y) \mapsto h(X, Y)$ es bilineal, simétrica y definida positiva.

Esto significa que P se puede reducir al grupo $SO(n)$. Sea $A \in o(n)$ y pongamos $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para denotar el producto escalar canónico en $\mathbb{R}^n$. Podemos definir entonces la forma bilineal antisimétrica $A^\dagger : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ poniendo $A^\dagger(x, y) = g(x, Ay) = -A^\dagger(y, x)$. Sea $(u_1, \ldots, u_n)$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $(u^1, \ldots, u^n)$ su dual. Entonces $A^\dagger \wedge \ldots^{(r} \wedge A^\dagger = \mathrm{Pf}(A, \ldots, A) u^1 \wedge \cdots \wedge u^n$. Como $(u^1 \wedge \cdots \wedge u^n)(u_1, \ldots, u_n) = 1$, tenemos

$$\mathrm{Pf}(A, \ldots, A) = (A^\dagger \wedge \ldots^{(r} \wedge A^\dagger)(u_1, \ldots, u_n).$$

Así henos definido un polinomio homogéneo Pf (en honor a Pfaff) de grado n en $o(n)$. Veamos que es invariante. Sea $a \in SO(n)$ y pongamos $B = \mathrm{Ad}(a)A = aAa^{-1}$. Entonces $B^\dagger(x, y) = g(x, By) = g(x, aAa^{-1}y) = g(a^{-1}x, Aa^{-1}y)$, porque $a \in SO(n)$ conserva el producto escalar. Así $B^\dagger(x, y) = A^\dagger(a^{-1}x, a^{-1}y)$. Por consiguiente

$$\begin{aligned}\mathrm{Pf}(B, \ldots, B) &= (A^\dagger \wedge \ldots^{(r} \wedge A^\dagger)(a^{-1}u_1, \ldots, a^{-1}u_n)\\ &= (A^\dagger \wedge \ldots^{(r} \wedge A^\dagger)(u_1, \ldots, u_n)\\ &= \mathrm{Pf}(A, \ldots, A),\end{aligned}$$

ya que $a^{-1}u_1 \wedge \cdots \wedge a^{-1}u_n = \det(a^{-1})\, u_1 \wedge \cdots \wedge u_n$ y $\det(a^{-1}) = 1$. La clase característica $w_P(\mathrm{Pf})$ se llama *clase de Pfaff.* La *clase de Euler*es $\gamma(P) = q_r w_P(\mathrm{Pf}) \in H^n(\Lambda M)$ donde q_r es un factor de normalización que depende sólo de r. Su valor debe ser tal que la integral de $\gamma(P)$ en la esfera S^{2r} debe ser igual a 2.

Capítulo 4

Characteristic classes in associated bundles

4.1 Associated bundles. Fundamental vector fields

In the following, W will be a smooth manifold upon which G acts effectively on the left by an action denoted as $(a, w) \mapsto aw$. The *bundle associated to* (P, π, M, G) *through the action of* G *on* P is denoted (E, π_E, M, W, G), with $E = E \times_W G = (E \times W)/\approx$, where $\approx$ is the equivalence relation given by $(u, w) \approx (R_a u, a^{-1}w)$, if $a \in G$. The equivalence class of (u, w) will be denoted $u \cdot w$. The fibre of π_E over $m \in M$ will be denoted E_m. Let $u \in P_m,\ w \in W,\ a \in G$. They define the following C^∞-maps

$$u : W \to E_m, \quad a : W \to W, \quad w : G \to W, \quad w^P : P \to E$$

given by $u(w) = u \cdot w,\ a(w) = aw,\ w(a) = aw,\ w^P(u) = u \cdot w$. The maps u and a are diffeomorphisms.

Let $A \in \mathfrak{g}$. Then, A defines a *fundamental field* on W, A^W by $A^W_w = -dw(A)$. Let us denote by $F(W)$ the $\mathbb{R}$-vector space of fundamental vector fields on W. If is clear that the map $A \in \mathfrak{g} \mapsto A^W \in F(W)$ is linear. For each $t \in \mathbb{R}$, we define the map $\varphi_t : W \to W$ by $\varphi_t(w) = \exp(-tA)w$. Then, it is clear that $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi(s + t)$. Therefore, φ_t is the flow of some vector field on W, whose value at w must be the tangent at $t = 0$ to the curve $\varphi(t)w = \exp(-tA)w$ which is $dw(\exp'_{-A}(0)) = -dw(A) = A^W_w$. Hence the flow of A^W is φ_t.

Proposition 3. *Let $A, B \in \mathfrak{g},\ a \in G$. Then*

1. *The map $A \in \mathfrak{g} \mapsto A^W \in F(W)$ is one-to-one;*

2. *$da \circ A^W \circ a^{-1} = (Ad(a)A)^W$.*

3. *$[A^W, B^W] = [A, B]^W$;*

Demostración. (1) Let us suppose that $A \in \mathfrak{g}$ is such that $A^W = 0$. Then, for any $t \in \mathbb{R}$, φ_t is the identity. In particular, $\varphi_{-t}(w) = \exp(tA)w = w$. Since

the action of G on W is effective, we conclude that $\exp(tA) = e$, that is $A = 0$.
(2) If $w \in W$ then $(da \circ A^W \circ a^{-1})_w = -da(A^W_{a^{-1}w}) = -da(d(a^{-1}w)A) = -d(a \circ a^{-1}w)A$. But if $b \in G$, we have $(a \circ a^{-1}w)(b) = a(ba^{-1}w) = (w \circ c_a)(b)$. Hence

$$(da \circ A^W \circ a^{-1})_w = -dw(\mathrm{Ad}(a)A) = (\mathrm{Ad}(a)A)^W_w.$$

(3) We consider the vector field $d\varphi_{-t} \circ B^W \circ \varphi_t$. By the above result it is equal to $(\mathrm{Ad}(\exp(tA))B)^W$. Therefore, its value at w is $-dw(\mathrm{Ad}(\exp(tA))B)$, whose derivative with respect to t at $t = 0$ is $-dw(\mathrm{ad}(A)B) = -dw([A, B]) = [A, B]^W_w$. □

4.2 Associated connections

Let ω be a connection in P. It defines the horizontal distribution Q which is invariant under right translations. For any $u \cdot w \in E$ we define a subspace $H_{u \cdot w} \subset T_{u \cdot w}E$ by

$$H_{u \cdot w} = dw^P(Q_u).$$

We must guarantee the consistency of this definition. If $a \in G$ we have

$$\begin{aligned}(d\,(a^{-1}w)^P)(Q_{R_a u}) &= ((d\,(a^{-1}w)^P) \circ d\,R_a)Q_u \\ &= d((a^{-1}w)^P \circ R_a)Q_u = dw^P(Q_u) \\ &= H_{u \cdot w}.\end{aligned}$$

Now, if $u \in P_m$:

$$d\pi_E(H_{u \cdot w}) = d(\pi_E \circ w^P)(Q_u) = d\pi(Q_u) = T_m M.$$

Hence, we have that $d\pi_E\big|_{H_{u \cdot w}} : H_{u \cdot w} \to T_m M$ is an isomorphism. Thus, we have a horizontal lift of any $X \in \mathfrak{X}(M)$ to $X^H \in \mathfrak{X}(E)$ such that X^H belongs to the distribution H and is π_E-related to X. Also, if X^h denotes the horizontal lift of X to P we have $dw^P \circ X^h = X^H \circ w^P$.

We have obviously $T_{u \cdot w}E = V_{u \cdot w}E \oplus H_{u \cdot w}$. Therefore, we have projectors $h, v : TE \to TE$ such that $h + v = \mathrm{id}$, $h \circ v = v \circ h = 0$, $h(T_{u \cdot w}E) = H_{u \cdot w}$, $v(T_{u \cdot w}E) = V_{u \cdot w}E$.

Definition 1. *Let $K \in \Gamma(E)$ and $X_m \in T_m X$ We say that K is* parallel with respect to X_m *if $dK(X_m) \in H_{K_m}$. If $\alpha :]a, b[\to M$ is a smooth curve, we say that K* is parallel along α *if K is parallel with respect to $\alpha'(t)$ for all $t \in]a, b[$. Equivalently, the curve $K \circ \alpha :]a, b[\to E$ is horizontal. Finally, we say that K* is parallel *if $dK(T_m M) = H_{K_m}$ for all $m \in M$. Note that if K is parallel, then it is parallel along all curves and also with respect to any vector of TM.*

Definition 2. *We say that $K \in \Gamma(E)$ is 0-deformable with model $w_0 \in W$ if for any point $m \in M$ there is an open neighborhood U of m and a smooth section $s : U \to P$ such that $K|_U = s \cdot w_0$.*

Let $K \in \Gamma(E)$ be 0-deformable with model $w_0 \in W$. We define the subsets $\tilde{P} \subset P$ and $\tilde{G} \subset G$ as

$$\tilde{P} = \{u \in P \ : \ u \cdot w_0 = K_{\pi(u)}\}, \quad \tilde{G} = \{a \in G \ : \ aw_0 = w_0\}.$$

$\tilde{G}$ is the isotropy group of w_0 and it is a closed subgroup of G. Then, $(\tilde{P}, \pi, M, \tilde{G})$ is a principal subbundle of P. In fact, for any $u, v \in \tilde{P}_m$, if $a \in G$ is the unique element that makes $v = R_a u$, we will have $K_m = v \cdot w_0 = R_a u \cdot w_0 = u \cdot aw_0 = u \cdot w_0$. Hence, $a \in \tilde{G}$.

Theorem 4.2.1. *Let $K \in \Gamma(E)$ be 0-deformable with model $w_0 \in W$. Then, there is a connection ω in P that makes K parallel.*

Demostración. Let $\tilde{Q}$ be the horizontal distribution of any connection in $\tilde{P}$. We define a distribution Q in P by putting $Q_u = dR_a(\tilde{Q}_{\tilde{u}})$, where $u \in P_m$, $\tilde{u} \in \tilde{P}_m$, and $a \in G$ is such that $R_a \tilde{u} = u$. One proves easily that this definition is consistent and that Q is invariant by right translations. Therefore, it defines a connection in P. Let $m \in M$ and $\tilde{u} \in \tilde{P}_m$. Then,

$$H_{K_m} = H_{\tilde{u} \cdot w_0} = dw_0^P(Q_{\tilde{u}}) = dw_0^P(\tilde{Q}_{\tilde{u}}).$$

Let $\tilde{\alpha}(t) \in \tilde{P}$ be the horizontal lift of a curve $\alpha(t)$ in M such that $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{u}$. Thus, $\tilde{\alpha}'(0) \in \tilde{Q}_{\tilde{u}}$. We have $dw_0^P(\tilde{\alpha}'(0)) = (w_0^P \circ \tilde{\alpha})'(0)$. But $(w_0^P \circ \tilde{\alpha})(t) = \tilde{\alpha}(t) \cdot w_0 = (K \circ \alpha)(t)$. Hence $dw_0^P(\tilde{\alpha}'(0)) \in dK(T_m)$, so that K is parallel. $\square$

Usually, the sections of E fail to be parallel. We need a measure of this phenomenon. Let $X \in T_m M$ and let $K \in \Gamma(E)$. We define $\nabla_X K \in V_{K_m} E$, the *covariant derivative* of K with respect to X by

$$\nabla_X K = v(dK(X)).$$

Thus, K is parallel with respect to X iff $\nabla_X K = 0$.

Let $m_t \in M$ be a smooth curve, and let $u_t \in P$ be an horizontal lift of m_t. Since $u_t : W \to E_{m_t}$ is a diffeomorphism, there is a curve $w_t \in W$ such that $K_{m_t} = u_t \cdot w_t$. Then $dK(m_t') = du_t(w_t') + dw_t^P(u_t')$. Now, $dw_t^P(u_t')$ is horizontal because $u_t' \in Q_{u_t}$ by hypothesis, and $du_t(w_t') \in V_{u_t \cdot w_t} E = V_{K_{m_t}} E$. Therefore $\nabla_{m_t'} K = du_t(w_t')$.

We have also the covariant derivative of K with respect to a vector field $X \in \mathfrak{X}(M)$. It is the map $\nabla_X K : M \to TV$ such that

$$(\nabla_X K)_m = \nabla_{X_m} K.$$

We are interested in the lack of integrability of the horizontal distribution H. Let $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, let $X^h, Y^h \in \mathfrak{X}(P)$ be their horizontal lifts to P, and let $X^H, Y^H \in \mathfrak{X}(E)$ be their horizontal lifts to E. We have $dw^P \circ X^h = X^H \circ w^P$, for any $w \in W$. Therefore, $dw^P([X^h, Y^h]_u) = [X^H, Y^H]_{u \cdot w}$ if $u \in P$. Thus

$$v([X^H, Y^H]_{u \cdot w}) = v(dw^P([X^h, Y^h]_u)) = dw^P(v([X^h, Y^h]_u)).$$

But

$$v([X^h, Y^h]_u) = \omega([X^h, Y^h]_u)^*_u = -(\Omega(X^h, Y^h)_u)^*_u = -dl_u(\Omega(X^h, Y^h)_u)$$

Therefore,

$$v([X^H, Y^H]_{u\cdot w}) = -d(w^P \circ l_u)(\Omega(X^h, Y^h)_u) = -d(u \circ w)(\Omega(X^h_u, Y^h_u)).$$

This defines a horizontal 2-form Ω^E in E with values in VE called the *curvature of the connection* in E. It is given by

$$\Omega^E_{u\cdot w}(X, Y) = -d(u \circ w)(\Omega_u(\tilde{X}, \tilde{Y})),$$

where $X, Y \in T_{u\cdot w}E$ and $\tilde{X}, \tilde{Y} \in T_u P$ are such that $dw^P(\tilde{X}) = X,\ dw^P(\tilde{Y}) = Y$.

4.3 Connections in a vector bundle

Now W will be a real or complex k-dimensional vector space and G be a closed subgroup of $\mathrm{Aut}(W)$. Therefore $\mathfrak{g}$ will be a subalgebra of $\mathrm{End}(W)$. The bundle P can be regarded at as a bundle of linear frames of E and we will assume that P is endowed with a connection ω.

Let β be a q-form on P with values in W. If $a \in G$, it makes sense to put $a\beta$ because $a \in G$ acts naturally upon the result of β acting upon vectors or vector fields. We put $Eq^q(P, W)$ to denote the $C^\infty(M)$-module of q-forms on P with values in W, that are equivariant. Equivariance means here that $R_a^*\beta = a^{-1}\beta$, if $\beta \in Eq^q(P, W)$. The subspace of $Eq^q(P, W)$ of forms that are horizontal will be denoted by $B^q(P, W)$.

Let $\Lambda^q(M, E)$ be the $C^\infty(M)$-module of q-forms on M with values in E. It can be seen as the module of smooth sections of the bundle $E \otimes T^*M \wedge \cdots \wedge T^*M$. Let $\beta \in \Lambda^q(M, E)$. It defines a horizontal q-form on P with values in W, $\lambda(\beta)$, by

$$\lambda(\beta)_u(X_1, \ldots, X_q) = u^{-1}(\beta_m(d\pi(X_1), \ldots, d\pi(X_q))),$$

where $u \in P_m$ and $X_1, \ldots, X_q \in T_u P$. The form $\lambda(\beta)$ is equivariant. In fact, we have

$$\begin{aligned}(R_a^*\lambda(\beta))_u(X_1, \ldots, X_q) &= \lambda(\beta)_{R_a u}(dR_a(X_1), \ldots, dR_a(X_q))\\ &= (R_a u)^{-1}(\beta_m(d\pi(X_1), \ldots, d\pi(X_q)))\\ &= a^{-1}u^{-1}(\beta_m(d\pi(X_1), \ldots, d\pi(X_q)))\\ &= a^{-1}\beta(X_1, \ldots, X_q).\end{aligned}$$

Conversely, let $\beta \in B^q(P, W)$. It defines an element $\tilde{\beta} \in \Lambda^q(M, E)$ by

$$\tilde{\beta}_m(X_1, \ldots, X_q) = u(\beta_u(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_q)),$$

where $u \in P_m$ and $d\pi(\tilde{X}_i) = X_i,\ i = 1, \ldots, q$. It is easy to see that this definition is consistent. In this manner, we see that the map $\lambda : \Lambda^q(M, E) \to B^q(P, W)$ is an isomorphism.

Now, let $\alpha \in \Lambda^p(P, \mathfrak{g})$ and note that if $A \in \mathfrak{g}$, it acts naturally on W, so that it also makes sense to put $A\beta$ for $\beta \in \Lambda^q(P, W)$. Thus we define the product $\alpha \wedge \beta$, for $\beta \in \Lambda^q(P, W)$, by means of

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \ldots, X_{p+q}) = \sum_{\tau \in \sigma(p,q)} \operatorname{sg}(\tau)\alpha(X_{\tau 1}, \ldots)\beta(X_{\tau(p+1)}, \ldots).$$

If w_j is a basis of W we can write $\alpha = e_i\alpha^i$, $\beta = w_j\beta^j$, where $\alpha^i, \beta^j \in \Lambda(P)$. Thus

$$\alpha \wedge \beta = e_i(w_j)\alpha^i \wedge \beta^j.$$

It is easy to show that if both α and β are equivariant, then $\alpha \wedge \beta$ also is.

Proposition 4. *Let $\alpha \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ and $\beta \in \Lambda^q(P, W)$. Then*

1. *$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta$.*
2. *We define $D_\alpha\beta = d\beta + \alpha \wedge \beta$. Then $D_\alpha^2\beta = \Omega_\alpha \wedge \beta$.*
3. *Let β be tensorial. Then*

$$(D_\alpha\beta)_u(X_0, \ldots, X_q) = (d\beta)_u(X_0 - \alpha_u(X_0)^*_u, \ldots, X_q - \alpha_u(X_q)^*_u).$$

Demostración. (1) Immediate.

(2) We have

$$\begin{aligned} D_\alpha^2\beta &= D_\alpha(d\beta + \alpha \wedge \beta) = d(\alpha \wedge \beta) + \alpha \wedge d\beta + \alpha \wedge (\alpha \wedge \beta) \\ &= d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta + \alpha \wedge d\beta + \sum_{i,j=1}^n e_i(e_j(w_k))\alpha^i \wedge \alpha^j \wedge \beta^k \\ &= d\alpha \wedge \beta + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n [e_i, e_j](w_k)\alpha^i \wedge \alpha^j \wedge \beta^k \\ &= (d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha]) \wedge \beta \\ &= \Omega_\alpha \wedge \beta. \end{aligned}$$

(3) Let $A \in \mathfrak{g}$. Then ,

$$\mathcal{L}_{A^*}\beta = (R^*_{\exp(tA)}\beta)'(0) = (\exp(-tA)\beta)'(0) = -A\beta.$$

Taking this into account, the proof is almost identical to that of Lemma 1. $\square$

Corollary 1. 1. *Let $\omega \in Eq^1(P, \mathfrak{g})$ be a connection in P. If $\beta \in B^q(P, W)$, then $D_\omega\beta = d\beta \circ h$.*

2. *$D_\omega\beta$ is tensorial.*

In the following, we will put D instead of D_ω if there is no risk of confusion. Let $\xi \in \Gamma(E)$. Then, it is an element of $\Lambda^0(M, E)$ and defines an element $\nabla\xi \in \Lambda^1(M, E)$. It is given by $\nabla\xi = (\lambda^{-1} \circ D \circ \lambda)\xi$. It is called the *covariant differential* of ξ. If $X \in \mathfrak{X}(M)$, then $\nabla_X \xi = (\nabla\xi)(X)$ is called the *covariant derivative* of ξ with respect to X.

Let $\gamma \in \Lambda^p(M, E)$ and $X_1, \ldots, X_p \in \mathfrak{X}(M)$. Then, one verifies easily that

$$\lambda(\gamma)(X_1^h, \ldots, X_p^h) = \lambda(\gamma(X_1, \ldots, X_p)).$$

Thus, we have

$$\lambda(\nabla_X \xi) = \lambda(\nabla\xi)(X^h) = (D\lambda(\xi))(X^h) = (d\lambda(\xi)(X^h) = X^h(\lambda(\xi)).$$

Let $\beta \in Eq^q(P, \mathfrak{g})$ be tensorial. Then, it defines a q-form in M with values in $E \otimes E^*$, β^E, as follows. If $m \in M$, $X_1, \ldots, X_q \in T_m M$ and $\xi = u \cdot w \in E_m$ we put

$$\beta_m^E(X_1, \ldots, X_q)\xi = u \cdot \beta_u(\tilde{X}_i, \ldots, \tilde{X}_q)w,$$

where the $\tilde{X}_i$ are such that $d\pi(\tilde{X}_i) = X_i$. It is clear that the choice of the $\tilde{X}_i$ is irrelevant. Let us see that the choice of the presentation $\xi = u \cdot w$ is also irrelevant. If $a \in G$, we have

$$\begin{aligned}
R_a u \cdot \beta_{R_a u}(dR_a\tilde{X}_i, \ldots, dR_a\tilde{X}_q)a^{-1}w &= R_a u \cdot (R_a^*\beta)_u(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_q)a^{-1}w \\
&= R_a u \cdot \mathrm{Ad}(a^{-1})\beta_u(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_q)a^{-1}w \\
&= R_a u \cdot a^{-1}\beta_u(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_q)aa^{-1}w \\
&= u \cdot \beta_u(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_q)w.
\end{aligned}$$

In particular, we will use the form Ω^E obtained from Ω by this process.

Theorem 4.3.1. *Let $\xi \in \Gamma(E)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Then:*

1. *The operator ∇ defines a connection in the sense of Koszul.*
2. *Under the identification of the vector space $T_{\xi_m}E_m$ with E_m we have $\nabla_X\xi = v(d\xi(X))$.*
3. $\nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi = \Omega^E(X, Y)\xi$.

Demostración. (1) Only one property of Koszul connections is not trivially proved. Let $f \in C^\infty(M)$. Then

$$\lambda(\nabla_X(f\xi)) = X^h(\lambda(f\xi)) = X^h((f \circ \pi)\lambda(\xi)) = X(f)\lambda(\xi) + (f \circ \pi)X^h(\lambda(\xi)).$$

Therefore, $\nabla_X(f\xi) = X(f)\xi + f\nabla_X\xi$.

(2) We have

$$\lambda(\nabla_X\xi)_{u_0} = X_{u_0}^h(\lambda(\xi)) = (\lambda(\xi) \circ u_t)'(0) = (u_t^{-1} \circ \xi \circ m_t)'(0).$$

Now, since $u_t : W \to E_{m_t}$ is a diffeomorphism, there is some w_t such that $u_t \cdot w_t = \xi_{m_t}$. Thus, $u_t^{-1} \circ \xi \circ m_t = w_t$. Therefore, $\lambda(\nabla_X\xi)_{u_0} = w_0'$. Hence $(\nabla_X\xi)_m = u_0(\lambda(\nabla_X\xi)_{u_0}) = u_0 \cdot w_0'$. But this is equal to $du_0(w_0')$ under the standard identification, and this is $v(d\xi(X))$ as we know already (see comments after Theorem 4.2.1).

(3) We have

$$\begin{aligned}\lambda(\nabla_X\nabla_Y\xi) &= \lambda((\nabla(\nabla_Y\xi))(X)) = \lambda(\nabla(\nabla_Y\xi))(X^h) \\ &= (D(\lambda\nabla_Y\xi))(X^h) = X^h(\lambda(\nabla_Y\xi)) = X^h(Y^h(\lambda\xi)).\end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned}\lambda(\nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi) &= [X^h, Y^h](\lambda\xi) - [X,Y]^h(\lambda\xi) \\ &= ([X^h, Y^h] - [X,Y]^h)(\lambda\xi) = (v[X^h, Y^h])(\lambda\xi).\end{aligned}$$

As in the proof of Lemma 1, if $A \in \mathfrak{g}$ we have $\mathcal{L}_{A^*}(\lambda\xi) = -A(\lambda\xi)$. Therefore,

$$(v[X^h, Y^h])(\lambda\xi) = -\omega([X^h, Y^h])(\lambda\xi) = \Omega(X^h, Y^h)\lambda\xi.$$

Now, if $m \in M$ and $\xi_m = u_m \cdot w_m$ we have

$$\begin{aligned}\lambda^{-1}(\Omega(X^h, Y^h)\lambda\xi)_m &= u_m(\Omega_{u_m}(X^h_{u_m}, Y^h_{u_m})(\lambda\xi)_{u_m}) \\ &= u_m \cdot \big(\Omega_{u_m}(X^h_{u_m}, Y^h_{u_m})w_m\big) \\ &= \Omega^E(X,Y)\xi_m\end{aligned}$$

□

4.4 Linear connections

In the following, M will be an n-dimensional smooth manifold, $G \subset Gl(n;\mathbb{R})$ will be a closed subgroup, and P will be a principal subbundle that consists in a reduction of the structural group of $L(M)$, the principal bundle over M of linear frames of TM, to the group G. The bundle E will be TM.

Let $u \in P_m \subset L_m(M)$. Then, $u = (u_1, \ldots, u_n)$ is a basis of T_mM. If $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, then $u \cdot x = u_i x^i \in T_mM$.

We define the *canonical* 1-form $\theta \in Eq^1(P, \mathbb{R}^n)$ by putting $\theta_u(X) = u^{-1}(d\pi(X))$, for $X \in T_uP$. In fact, if $a \in G$, we have

$$\begin{aligned}(R_a^*\theta)_u(X) &= \theta_{R_a u}(dR_a X) = (R_a u)^{-1} d\pi(dR_a(X)) = (a^{-1} \circ u^{-1})(d\pi(X)) \\ &= a^{-1}\theta_u(X),\end{aligned}$$

so that θ is equivariant. Let us interpret the value of $\theta(X)$. The vector $d\pi(X)$ can be expressed uniquely as $d\pi(X) = u_i X^i$ for some real numbers X^i. Then $\theta(X) = (X^1, \cdots, X^n)$. Therefore, θ takes a vector $X \in T_uP$ and gives the components of $d\pi(X)$ in the basis u.

Let ω be a connection in P. It is called a *linear connection* in M. Of course, since $TM = E$ is a vector bundle, all of the results in the preceding sections hold. Let us show now what is new in this case.

First, to each $\xi \in \mathbb{R}^n$ we associate a vector field $\xi^B \in \mathfrak{X}(P)$. If $u \in P_m$, we put $\xi^B_u = (u \cdot \xi)^h_u$, the horizontal lift of $u \cdot \xi \in T_mM$ to u. The ξ^B are called *standard horizontal vector fields.*

Proposition 5. *1.* $\theta(\xi^B) = \xi$.

2. If $a \in G$, then $dR_a \circ \xi^B \circ R_{a^{-1}} = (a^{-1}\xi)^B$.

3. If $A \in \mathfrak{g}$, then $[A^*, \xi^B] = (A\xi)^B$.

Demostración. (1) If $u \in P$ we have $\theta_u(\xi^B_u) = u^{-1} d\pi((u\cdot\xi)^h_u) = u^{-1}(u\cdot\xi) = \xi$.

(2) We have

$$\begin{aligned}(dR_a \circ \xi^B \circ R_{a^{-1}})_u &= dR_a(\xi^B_{R_a^{-1}u}) = dR_a\big((R_{a^{-1}}u \cdot \xi)^h_{R_{a^{-1}}u}\big)\\ &= (R_{a^{-1}}u \cdot \xi)^h_u = (u \cdot a^{-1}\xi)^h_u\\ &= (a^{-1}\xi)^B_u.\end{aligned}$$

(3) By the preceding result, we have

$$[A^*, \xi^B]_u = \big((dR_{a_t^{-1}} \circ \xi^B \circ R_{a_t})_u\big)'(0),$$

where $a_t = \exp(tA)$. Thus

$$[A^*, \xi^B]_u = \big((a_t\xi)^B_u\big)'(0) = \big((u \cdot a_t\xi)^h_u\big)'(0) = (u \cdot (a_t\xi)'(0))^h_u,$$

because the horizontal lift from T_mM to T_uP is a linear map. Finally, $(a_t\xi)'(0) = A\xi$ and this entails the result.

□

The *torsion form,* $\Theta \in Eq^2(P, \mathbb{R}^n)$, of the linear connection ω is defined as

$$\Theta = D\theta = d\theta \circ h = d\theta + \omega \wedge \theta.$$

Thus, if $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$, we have $\Theta(X,Y) = d\theta(X,Y) + \omega(X)\theta(Y) - \omega(Y)\theta(X)$.

We will have

$$D\Theta = \Omega \wedge \theta.$$

This equality is called the *second Bianchi identity.*

The torsion and curvature forms define certain tensor fields on M as follows. The *torsion tensor field,* $T \in \Gamma(TM \otimes (T^*M \wedge T^*M))$ is the 2-form in M with values in TM given by $T = \lambda^{-1}\Theta$, that is

$$T_m(X,Y) = u \cdot \Theta_u(X^h_u, Y^h_u), \quad \text{for } X, Y \in T_mM.$$

The *curvature tensor field,* R is the 2-form in M with values in $TM \otimes T^*M$ given by $R = \Omega^E$. We recall that this means

$$R(X,Y)Z = u \cdot \Omega_u(X^h_u, Y^h_u)(u^{-1}Z), \quad \text{for } X, Y, Z \in T_mM.$$

We already know that

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \quad X, Y, Z \in X(M).$$

As for the torsion tensor we have

Proposition 6. *If $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ we have*

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Demostración. We have

$$\lambda(\nabla_X Y) = \lambda(\nabla Y)(X^h) = X^h(\lambda(Y)).$$

Now, $(\lambda(Y))_u = u^{-1}Y_{\pi(u)} = \theta(Y^h)_u$. Thus

$$\begin{aligned}
\lambda(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]) &= X^h(\theta(Y^h)) - Y^h(\theta(X^h)) - \theta([X,Y]^h) \\
&= X^h(\theta(Y^h)) - Y^h(\theta(X^h)) - \theta(h[X^h,Y^h]) \\
&= X^h(\theta(Y^h)) - Y^h(\theta(X^h)) - \theta([X^h,Y^h]) \\
&= d\theta(X^h,Y^h) = D\theta(X^h,Y^h) = \Theta(X^h,Y^h).
\end{aligned}$$

Therefore $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]) = \lambda^{-1}\Theta = T$. □

4.5 Characteristic classes in vector bundles

We have seen that if E is a vector bundle with connection ω, we can obtain, from its form Ω, a 2-form Ω^E in M which is a section of $(T^*M \wedge T^*M) \otimes E \otimes E^*$. Our objective is to write in terms of Ω^E the characteristic classes that we defined in the first chapter. The following property is immediate

Proposition 7. *Let $\Phi \in I^p(G)$, with G a closed subgroup of $Gl(W)$. Let V be any vector space isomorphic with W and $K_1, \ldots, K_p \in \mathrm{End}(V)$. Let $h : W \to V$ be an isomorphism such that $A_i = h^{-1} \cdot K_i \cdot h \in \mathrm{End}(W)$, $i = 1, \ldots, p$, belong in fact to $\mathfrak{g}$. Then $\Phi(A_1, \ldots, A_p)$ does not depend on the choice of h, that is if instead we use $h' = h \circ j$, with $j \in G$.*

Thus, if $K_1, \ldots, K_p \in \mathrm{End}(E_m)$ are such that $u^{-1} \circ K_i \circ u \in \mathfrak{g}$, for some $u \in P_m$ we can write $\Phi(K_1, \ldots, K_p)$ instead of $\Phi(u^{-1} \circ K_1 \circ u, \ldots, u^{-1} \circ K_p \circ u)$, because the result do not depend on the choice of u.

So let $\alpha \in \Lambda^p(P, \mathfrak{g})$ be tensorial and $X_1, \ldots, X_p \in T_m M$. Let $u \in P_m$ and put $A = \alpha_u(X_1^h, \ldots, X_p^h) \in \mathfrak{g}$. Then, if $\xi = u \cdot w \in E_m$ we have $\alpha^E(X_1, \ldots, X_p)\xi = u \cdot Aw = (u \circ A \circ u^{-1})\xi$. This defines an endomorphism K of E_m such that $u^{-1} \circ K \circ u = A \in \mathfrak{g} \subset \mathrm{End}(W)$. Therefore, if $\alpha_i \in \Lambda^{m_i}(P, \mathfrak{g})$, $i = 1, \ldots, p$, are tensorial we can define $\Phi(\alpha_1^E, \ldots, \alpha_p^E) \in \Lambda^k(M)$, with $k = m_1 + \cdots + m_p$, and it is clear that $\pi^*\Phi(\alpha_1^E, \ldots, \alpha_p^E) = \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$.

This is analogous to the relation between the determinant of an endomorphism and the determinant of its matrix in some basis: we usually do not distinguish between both, and this by two good reasons: the first one is that the result do not depend on the chosen basis, and the second is that frequently we are able to compute the determinant only by computing the determinant of its matrix.

Bibliography

[War] Warner, Frank W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois 1971.

[Dup] Dupont, J.L., *Curvature and Characteristic Classes*, Lecture Notes in Mathematics 640, Springer-Verlag, Berlin 1978.

[GHV] Greub, W., Halperin, S. and Vanstone, R., *Connections, Curvature and Cohomology*, vol. II, Academic Press, New York, 1973.

[KN] Kobayashi, S. and Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry*, vol. II, Interscience, New York, 1969.