

Problemas de Variedades Diferenciales

Angel Montesinos Amilibia

Departamento de Geometría y Topología,
Universidad de Valencia,
Campus de Burjasot, 46100 Burjasot (Valencia)

7 de octubre de 2004

Indice general

1	Variedades diferenciables. Nociones básicas	2
2	El espacio tangente. La diferencial de una aplicación	5
3	Teoremas de la función inversa y de la función implícita	7
4	Campos vectoriales	10
5	Campos tensoriales. Formas diferenciales. Derivada de Lie	15

Tema 1

Variedades diferenciables. Nociones básicas

Problema 1.1. Probar que la función $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\phi(s) = s^3$, es una carta que determina una estructura diferenciable de clase C^∞ .

Problema 1.2. ¿Se puede tener una estructura diferenciable sobre \mathbb{R} utilizando la aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t^2$?

Problema 1.3. Probar que si $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una biyección, entonces $\{(\mathbb{R}^n, h)\}$ define la estructura diferenciable usual sobre \mathbb{R}^n (esto es, la dada por el atlas $\{(\mathbb{R}^n, \text{id})\}$) si y sólo si h y h^{-1} son diferenciables.

Problema 1.4. Consideremos los subconjuntos abiertos de la circunferencia unidad $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ dados por $U = \{(\cos \alpha, \sin \alpha) \mid \alpha \in]0, 2\pi[\}$ y $V = \{(\cos \alpha, \sin \alpha) \mid \alpha \in]-\pi, \pi[\}$. Probar que $\{(U, \phi), (V, \psi)\}$, donde $\phi : U \rightarrow]0, 2\pi[$, $\psi : V \rightarrow]-\pi, \pi[$ vienen dadas por $\phi(\cos \alpha, \sin \alpha) = \alpha$, si $\alpha \in]0, 2\pi[$; y $\psi(\cos \alpha, \sin \alpha) = \alpha$, si $\alpha \in]-\pi, \pi[$, es un atlas C^∞ sobre S^1 .

Problema 1.5. Sea $\mathcal{A} = \{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2), (U_3, \phi_3), (U_4, \phi_4)\}$, donde

$$\begin{aligned}U_1 &= \{(x, y) \in S^1 \mid x > 0\}, & \phi_1(x, y) &= y, \\U_2 &= \{(x, y) \in S^1 \mid x < 0\}, & \phi_2(x, y) &= y, \\U_3 &= \{(x, y) \in S^1 \mid y > 0\}, & \phi_3(x, y) &= x, \\U_4 &= \{(x, y) \in S^1 \mid y < 0\}, & \phi_4(x, y) &= x,\end{aligned}$$

Probar: 1) \mathcal{A} es un atlas C^∞ sobre S^1 . 2) \mathcal{A} es un atlas equivalente al dado en el problema anterior.

Problema 1.6. Consideremos el conjunto $\mathcal{A} = \{(U_N, \phi_N), (U_S, \phi_S)\}$, donde $U_N = \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq 1\}$, $U_S = \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq -1\}$, siendo respectivamente ϕ_N , ϕ_S las proyecciones estereográficas desde el polo Norte y el Sur de S^1 sobre el eje x .

Probar: 1) \mathcal{A} es un atlas C^∞ sobre S^1 . 2) La correspondiente estructura diferenciable coincide con la del problema anterior.

Problema 1.7. Generalizar la construcción anterior al caso de S^n , y probar que se obtiene una estructura C^∞ .

Problema 1.8. ¿Es posible construir un atlas sobre la esfera S^n , que respete su topología usual como subespacio de \mathbb{R}^{n+1} , y que contenga una sola carta?

Problema 1.9. Definir un atlas sobre la superficie cilíndrica de radio $r > 0$ y altura $h > 0$,

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2, \quad 0 < z < h\}$$

Problema 1.10. Se define la banda de Möbius M como el cociente de $[0, 1] \times \mathbb{R}$ bajo la relación de equivalencia que identifica el punto $(0, y)$ con el $(1, -y)$, siendo $y \in \mathbb{R}$. Demostrar que M admite una estructura de variedad diferenciable de clase C^∞ .

Problema 1.11. Consideremos el “ocho” $E = \{(\sin 2t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$. Probar

(1) (E, ϕ) , donde $\phi : E \rightarrow]0, 2\pi[$ está definida por $\phi(\sin 2t, \sin t) = t$ si $t \in]0, 2\pi[$, es un atlas C^∞ para E .

(2) Probar lo mismo para (E, ψ) , donde $\psi : E \rightarrow]-\pi, \pi[$ está definida por $\psi(\sin 2t, \sin t) = t$ si $t \in]-\pi, \pi[$.

(3) ¿Definen los dos atlas la misma estructura diferenciable sobre E ?

Problema 1.12. Consideremos el subconjunto N de \mathbb{R}^2 , el lazo, definido por:

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, y) \mid 1 < y < 2\}$$

Probar:

(1) La función $\phi : N \rightarrow]-1, 1[$ dada por $\phi(\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) = s$ si $0 \leq s < 1$, y $\phi(0, s) = 1 - s$ si $1 < s < 2$, es una carta que define una estructura C^∞ para N .

(2) Lo mismo para la función $\psi : N \rightarrow]-1, 1[$ dada por $\psi(\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) = 1 - s$ si $0 < s \leq 1$, y $\psi(0, s) = 1 - s$ si $1 < s < 2$.

(3) Las dos estructuras diferenciables anteriores son diferentes.

Problema 1.13. Definir un atlas sobre el conjunto M de todas las matrices reales $r \times s$.

Problema 1.14. Probar que las funciones reales $f(t) = \sqrt[3]{t}$, y $g(t) = t^3$, son un ejemplo de aplicaciones tales que $g \circ f$ y $f \circ g$ son de clase C^∞ , mientras que no lo es f .

Problema 1.15. Sea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & u \\ \sin \phi & \cos \phi & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \phi, u, v \in \mathbb{R} \right\}.$$

Probar que con el producto matricial, G es un grupo. Dar a G una estructura diferenciable que lo convierta en grupo de Lie, y que lo haga difeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}^2$.

Problema 1.16. Sea $G = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a > 0, b > 0\}$, conjunto en el que definimos la multiplicación

$$(a_1, b_1, c_1)(a_2, b_2, c_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2, a_1 c_2 + c_1 b_2).$$

Demostrar: 1) G es un grupo con esa multiplicación. 2) Si se da a G la estructura habitual de variedad diferenciable como abierto de \mathbb{R}^3 , se convierte en un grupo de Lie.

Problema 1.17. Sea $U = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$. Probar que la aplicación $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = \frac{x}{1-\|x\|^2}$ es un difeomorfismo.

Problema 1.18. Probar que la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (xe^y + y, xe^y - y)$ es un difeomorfismo.

Problema 1.19. Sean (E, ϕ) y (E, ψ) las dos estructuras diferenciables del “ocho” que se estudiaron en el problema 1.11. Construir un difeomorfismo entre ellas.

Problema 1.20. Se considera $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x \cos z - y \operatorname{sen} z, x \operatorname{sen} z + y \cos z, z)$. Probar que $f|_{S^2}$ es un difeomorfismo.

Problema 1.21. Definimos en el conjunto $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ una relación de equivalencia \sim por la condición de que dos vectores de ese conjunto son equivalentes cuando son proporcionales. El espacio cociente $\mathbf{P}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ recibe el nombre de espacio proyectivo real de dimensión n .

Sea $[x^1, \dots, x^{n+1}] \in \mathbf{P}\mathbb{R}^n$ la clase de equivalencia de $(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Para cada $i = 1, \dots, n+1$, sea U_i el subconjunto de puntos de $\mathbf{P}\mathbb{R}^n$ cuyos representantes tienen la coordenada i -ésima distinta de 0. Probar que las aplicaciones $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ dadas por

$$\phi_i([x^1, \dots, x^{n+1}]) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right)$$

constituyen un atlas C^∞ para $\mathbf{P}\mathbb{R}^n$.

Problema 1.22. Con las notaciones anteriores, sea $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{P}\mathbb{R}^n$ la aplicación que envía cada elemento a su clase de equivalencia. Se puede considerar además la aplicación obvia $\pi_s : S^n \rightarrow \mathbf{P}\mathbb{R}^n$. Comprobar, utilizando el atlas identidad para $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, el del problema 1.7 para S^n y el obtenido en el problema anterior, que π y la inclusión $i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ son aplicaciones diferenciables. Utilizando un diagrama conmutativo, probar que π_S también lo es.

Problema 1.23. Probar que los siguientes conjuntos son grupos de Lie:

- (1) Cualquier espacio vectorial real o complejo de dimensión finita con la suma.
- (2) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, con la multiplicación de números complejos.
- (3) S^1 con la multiplicación inducida por \mathbb{C} .
- (4) $G \times H$, siendo G y H grupos de Lie.
- (5) $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$, grupo tórico.
- (6) $\operatorname{Aut}(V)$, donde V es un espacio vectorial real o complejo de dimensión finita, con la composición. En particular, lo son, pues, $\operatorname{Gl}(n; \mathbb{R}) = \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{Gl}(n; \mathbb{C}) = \operatorname{Aut}(\mathbb{C}^n)$.
- (7) $K = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, con la multiplicación $(s, t)(s', t') = (ss', st' + t)$.
- (8) $\operatorname{Gl}(n; \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$, $n > 1$, con la multiplicación dada por $(A, x)(A', x') = (A \circ A', Ax' + x)$. ¿Qué nombre darías a estos dos últimos grupos?

Tema 2

El espacio tangente. La diferencial de una aplicación

Problema 2.1. Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(a, b) = (a^2 - 2b, 4a^3b^2)$ y la aplicación $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $g(a, b) = (a^2b + b^2, a - 2b^3, be^a)$.

(1) Calcular $f_{*(1,2)}$ y $g_{*(a,b)}$.

(2) Calcular $g_* \left(4 \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{(0,1)} - \frac{\partial}{\partial v} \Big|_{(0,1)} \right)$.

(3) Determinar las condiciones que deben satisfacer las constantes λ, μ, ν para que, siendo x, y, z las funciones coordenadas en \mathbb{R}^3 , el vector $\lambda \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{g(0,0)} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{g(0,0)} + \nu \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{g(0,0)}$ sea algún vector de la imagen bajo g_* .

Problema 2.2. Los elementos de \mathbb{R}^4 se pueden escribir en forma matricial como

$$A = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$$

Sea

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Sea $T_\theta : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación diferenciable definida por $T_\theta(A) = A_\theta \cdot A$.

(1) Determinar T_θ .

(2) Si $X = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \Big|_A - \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial y} \Big|_A + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \Big|_A - \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial t} \Big|_A$, calcular $T_{\theta*}(X)$.

Problema 2.3. Consideremos la esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ parametrizada por $\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\operatorname{sen} \theta \cos \phi, \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \cos \theta)$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$. Sea $f : S^2 \rightarrow S^2$ la aplicación inducida por el automorfismo de \mathbb{R}^3 de matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Calcular $f_* \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_p$ y $f_* \frac{\partial}{\partial \phi} \Big|_p$, siendo $p = \mathbf{x}(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Problema 2.4. La curva γ en \mathbb{R}^2 está definida por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in]0, \pi[$, y la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x, y) = 2x + y^3$. Calcular el vector v tangente a γ en el punto $\gamma(\frac{\pi}{4})$ y determinar $v(f)$.

Problema 2.5. Consideremos la curva σ en \mathbb{R}^2 definida por $\sigma(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$. Obtener $\sigma(t)$ y $\sigma'(t)$ para $t = 1$ y $t = -1$. Comparar $\sigma(1)$ con $\sigma(-1)$ y $\sigma'(1)$ con $\sigma'(-1)$.

Problema 2.6. 1) Sea E el “ocho” del problema 1.11 con la estructura diferenciable definida por la carta $\phi(\sin 2s, \sin s) = s$ si $s \in]0, 2\pi[$. Probar que si $j : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la inclusión, entonces j es diferenciable.

2) Sea N el “nudo” del problema 1.12 con la carta definida en 1.12,(1). Probar que la inclusión $j : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ no es diferenciable.

Problema 2.7. Sea E el “ocho” con la estructura diferenciable definida por la carta $\phi(\sin 2s, \sin s) = s$ si $s \in]0, 2\pi[$. Consideremos el vector $v = \frac{d}{ds} \Big|_{(0,0)}$, que es tangente a E en el origen de \mathbb{R}^2 , y sea $j : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ la inclusión.

(1) Calcular $j_*(v)$.

(2) Realizar el mismo cálculo cuando E tiene la estructura diferenciable dada por la carta $\psi(\sin 2s, \sin s) = s$ si $s \in]-\pi, \pi[$ y comparar con el resultado anterior.

Problema 2.8. Sean M y N dos variedades diferenciables con M conexa y $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Probar que $f_* = 0$ si y sólo si f es constante.

Problema 2.9. Probar que si γ es una curva diferenciable en la variedad diferenciable M , entonces γ' es una curva diferenciable en la variedad tangente TM .

Problema 2.10. Sean M y N dos variedades diferenciables y sean $p \in M$, $q \in N$. Probar que existe un isomorfismo natural entre $T_{(p,q)}(M \times N)$ y $T_pM \oplus T_qN$.

Problema 2.11. Sea G un grupo de Lie de dimensión 2. Sea $g \in G$ y $L_g : G \rightarrow G$ la traslación a la izquierda. Sea (e_1, e_2) una base de T_hG , sea (f_1, f_2) una base de $T_{gh}G$, y

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la matriz de $L_{g_*h} : T_hG \rightarrow T_{gh}G$. Obtener la matriz de la aplicación $L_{g^*h} : T_{gh}^*G \rightarrow T_h^*G$ en las bases duales.

Problema 2.12. Sean $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ y $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación $f(x, y, z) = (x \cos a - y \sin a, x \sin a + y \cos a, 2z)$, siendo $a \in \mathbb{R}$. Sea $\phi : C \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ la aplicación dada por $\phi(x, y, z) = (xe^z, ye^z)$.

1. Probar que ϕ es biyectiva, calcular su inversa y probar que $f(C) = C$.
2. La aplicación ϕ es efectivamente una carta que proporciona a C una estructura de variedad diferenciable. Siendo $p = (1, 0, 0) \in C$, calcular, utilizando la carta ϕ y considerando f como una aplicación de C en $C : f_* \left(\frac{\partial}{\partial \phi^1} \Big|_p - 3 \frac{\partial}{\partial \phi^2} \Big|_p \right)$.

Tema 3

Teoremas de la función inversa y de la función implícita

Problema 3.1. Probar que la aplicación diferenciable $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\psi(t) = (t^2, t^3)$ no es una inmersión.

Problema 3.2. Sea $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Definimos una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ mediante $f(x, y) = \left(\frac{y}{1-x^2+y^2}, \exp(x^2) \right)$.

- (1) Determinar el conjunto S de los puntos m de M para los cuales f_{*m} es inyectiva.
- (2) Probar que $f(S)$ es un conjunto abierto.

Problema 3.3. (1) Probar que la función de \mathbb{R}^3 a \mathbb{R} dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ define mediante $f^{-1}(\{0\})$ una subvariedad regular de \mathbb{R}^3 .

(2) Apoyándose en la demostración del Teorema de la función implícita, encontrar un atlas de $f^{-1}(\{0\})$.

Problema 3.4. Consideremos la inclusión $j : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, y la aplicación inducida $j_* : TS^2 \rightarrow T\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Probar que esta aplicación es una subvariedad regular de \mathbb{R}^6 .

Ayuda: Considerar la aplicación $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\phi((x, y, z), (u, v, w)) = (x^2 + y^2 + z^2, xu + yv + zw)$$

y probar que $j_*(TS^2) = \phi^{-1}(\{(1, 0)\})$.

Problema 3.5. Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Consideremos la aplicación $\phi : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$ dada por $\phi(u) = (e^{2\pi i a u}, e^{2\pi i u})$, siendo $a \in \mathbb{R}$. Averiguar, según los valores de a , si ϕ es una inmersión, o subvariedad, o subvariedad regular.

Problema 3.6. La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ está definida por

$$f(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v).$$

(1) Determinar el Jacobiano de f y probar que su determinante no se anula en punto alguno del plano.

(2) ¿Puede tomarse f como una carta en un entorno de cualquier punto?

TEMA 3. TEOREMAS DE LA FUNCIÓN INVERSA Y DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITAS

(3) ¿Es f un difeomorfismo?

(4) Dado un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, encontrar un entorno abierto conexo maximal en el cual puede tomarse f como una carta.

Problema 3.7. Probar que la función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 + 6x^2y - 1$ determina sobre $f^{-1}(\{0\})$ una estructura de variedad diferenciable.

Problema 3.8. Sea M el subconjunto de \mathbb{R}^3 constituido por los puntos (x, y, z) que satisfacen $x^2 - y^2 + 2xz - 2yz = 1$, $2x - y + z = 0$. Probar que la inclusión $i : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una subvariedad regular de dimensión 1.

Problema 3.9. Sea $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación dada por

$$\phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, ax + by + cz),$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfacen $a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0$.

(1) Determinar los puntos $m \in \mathbb{R}^3$ para los cuales ϕ_{*m} es sobreyectiva.

(2) Determinar $\phi^{-1}(\{0\})$.

(3) Determinar el conjunto de los puntos en que ϕ_{*m} no es sobreyectiva así como su imagen por ϕ .

Problema 3.10. Sea $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación dada por

$$\phi(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 1, x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2y - 2z + 5).$$

(1) Determinar el conjunto de los puntos $m \in \mathbb{R}^4$ para los cuales ϕ_{*m} no es sobreyectiva y calcular su imagen por ϕ .

(2) Calcular una base de $\ker(\phi_{*(0,1,2,0)})$.

(3) Calcular la imagen por $\phi_{*(0,0,0,0)}^*$ de la 1-forma $dx_{(-1,5)} + 2dy_{(-1,5)}$.

Problema 3.11. Sea \mathbb{R} el grupo aditivo de los números reales y S^1 el grupo multiplicativo de los complejos de módulo 1. Probar que la aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $f(t) = e^{2\pi it}$ es un homomorfismo de grupos de Lie.

Problema 3.12. Consideramos el grupo de Lie

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$$

y la aplicación $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mapsto (a, b, a - b).$$

¿Es ϕ un homomorfismo de grupos de Lie?

TEMA 3. TEOREMAS DE LA FUNCIÓN INVERSA Y DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA 9

Problema 3.13. Sea \mathcal{M} el conjunto de las matrices reales $n \times n$ y sea $O(n)$ el subconjunto formado por las que cumplen ${}^tMM = I$, siendo I la matriz identidad.

(1) Probar que $O(n)$ es una variedad. ¿Cuál es su dimensión? Sugerencia: utilizar el Teorema de la función implícita y para ello definir una aplicación de \mathcal{M} en el subconjunto de las matrices simétricas.

(2) Identificar $T_I O(n)$ con el subconjunto \mathcal{A} de las matrices antisimétricas. Sugerencia: ¿Qué condición ha de cumplir la tangente en $t = 0$ a una curva en $O(n)$ que para $t = 0$ pasa por I ?

(3) Probar que si $A \in \mathcal{A}$ y $M \in O(n)$ entonces $MA \in T_M O(n)$. Sugerencia: como la anterior pero ahora la curva pasa por M para $t = 0$. Probar que la aplicación $\psi : (M, A) \mapsto (M, MA)$ es un difeomorfismo de $O(n) \times \mathcal{A}$ sobre $TO(n)$.

(4) Deducir de (3) que $O(n)$ es paralelizable (se dice que una variedad r -dimensional M es *paralelizable* si en M existen r campos vectoriales diferenciables que son linealmente independientes en cada punto de M).

Problema 3.14. Probar que un subconjunto W de la variedad diferenciable n -dimensional M , definido por p ecuaciones $f_1(m) = 0, \dots, f_p(m) = 0$, donde f_1, \dots, f_p son funciones diferenciables en M , es una subvariedad regular si la aplicación de M en \mathbb{R}^p dada por $m \mapsto (f_1(m), \dots, f_p(m))$ es de rango p en cualquier punto $m \in W$.

Problema 3.15. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función definida por $f(x, y, z) = (x^2 - y^3, a + z^2 - x^3)$ y sea $S = f^{-1}(\{0\})$.

1. Encontrar los valores de a para los cuales se satisfacen las hipótesis del Teorema de la función implícita.
2. $a = 1$ es uno de esos valores de manera que S es entonces una subvariedad regular de \mathbb{R}^3 . Comprueba que $p = (1, 1, 0) \in S$ y encuentra una carta de S , $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$, en un entorno de p .

Problema 3.16. Sea $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $h(x, y, z) = y^2 + 2z^2 - a$, siendo $a \in \mathbb{R}$. Sea $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y pongamos $\tilde{h} = h \circ i : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, donde $i : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la inclusión. Ponemos $P := \tilde{h}^{-1}(\{0\}) \subset S^2$.

- a) Probar que, si $a = 1$, los puntos $p_1 = (0, 1, 0), p_2 = (0, -1, 0)$ pertenecen a P y que \tilde{h}_{*p_1} y \tilde{h}_{*p_2} no son suprayectivas. Probar que en ese caso no se cumplen las hipótesis del Teorema de la función implícita (HTFI) respecto a $i : P \rightarrow S^2$.
- b) Encontrar los valores de a para los cuales $P \neq \emptyset$.
- c) Encontrar los valores de a para los cuales se cumplen las HTFI respecto a $i : P \rightarrow S^2$.

Tema 4

Campos vectoriales

Problema 4.1. Sea $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida por $f(x, y) = x$.

(1) Probar que $X_{(x,y)} = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}\right)$, siendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, es un campo vectorial diferenciable en M .

(2) Calcular $f_*(X_p)$, siendo $p \in M$.

Problema 4.2. Consideremos sobre \mathbb{R}^3 los campos vectoriales

$$X = xy \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = y \frac{\partial}{\partial y},$$

y la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 y$. Calcular

- (1) $[X, Y]_{(1,1,0)}$.
- (2) $(fX)_{(1,1,0)}$.
- (3) $X(f)_{(1,1,0)}$.
- (4) $f_{*(1,1,0)}X_{(1,1,0)}$.

Problema 4.3. Escribir en coordenadas cilíndricas los campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ definidos por

$$X = 2 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + 3 \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = -(x^2 + y^2)y \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + y^2)x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Problema 4.4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la función diferenciable definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$, que determina la subvariedad regular $S = f^{-1}(\{0\})$ de \mathbb{R}^3 . Consideremos sobre \mathbb{R}^3 los campos vectoriales siguientes:

$$X = (x^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y} + xz \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 2xz^2 \frac{\partial}{\partial z}.$$

¿Son esos campos tangentes a S ? Nótese que $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ es tangente a S sii $X(f) = 0$ en S .

Problema 4.5. Probar que los campos vectoriales en \mathbb{R}^4 dados por

$$\begin{aligned} X &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + t \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial t}, \\ Y &= -z \frac{\partial}{\partial x} - t \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z} + y \frac{\partial}{\partial t}, \\ Z &= -t \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

son tangentes a S^3 y linealmente independientes en cada punto de S^3 .

Problema 4.6. Construir un campo vectorial diferenciable sobre la esfera S^{2n+1} , que no se anule en punto alguno.

Problema 4.7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ la parametrización $f(\theta, \theta') = (e^{i\theta}, e^{i\theta'})$, y sea X un campo vectorial sobre \mathbb{R}^2 . ¿Bajo qué condiciones representa X , respecto a la parametrización f , un campo vectorial sobre T^2 (en otras palabras, en qué condiciones existe un campo vectorial $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(T^2)$ que esté f -relacionado con X).

Problema 4.8. Obtener la expresión general del campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ tal que cumpla

$$(1) \left[\frac{\partial}{\partial x}, X \right] = \left[\frac{\partial}{\partial y}, X \right] = X,$$

o bien cumpla

$$(2) \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, X \right] = X.$$

Problema 4.9. Calcular las curvas integrales del campo vectorial en \mathbb{R}^3 dado por

$$X = y \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Problema 4.10. Para cada uno de los siguientes campos vectoriales, obtener sus curvas integrales y estudiar si es un campo vectorial completo o no:

1. $X = \frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2 - \{0\})$
2. $X = \frac{\partial}{\partial y} + e^x \frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$
3. $X = e^{-x} \frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$
4. $X = y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$
5. $X = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$.

Problema 4.11. Sea $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección dada por $p(x, y) = x$. Determinar la condición que debe verificar un campo vectorial sobre \mathbb{R}^2 para que esté p -relacionado con otro campo vectorial en \mathbb{R} .

Problema 4.12. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable y sean X e Y campos vectoriales f -relacionados. Probar que f aplica curvas integrales de X en curvas integrales de Y .

Problema 4.13. Consideremos los siguientes tres campos vectoriales en \mathbb{R}^3 :

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + (1+x^2)\frac{\partial}{\partial z}.$$

(1) Probar que esos tres campos vectoriales constituyen una base para el $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ -módulo de campos vectoriales diferenciables en \mathbb{R}^3 .

(2) Escribir los elementos de la base dual (e^1, e^2, e^3) de la (e_i) , en términos de dx, dy, dz .

(3) Comprobar la identidad de Jacobi entre e_1, e_2 y e_3 .

Problema 4.14. Utilizando las notaciones del problema 1.16, sea $A = (a, b, c) \in G$ y sea $\lambda_A : G \rightarrow G$ las traslación a la izquierda definida por A . Sean x, y, z las funciones coordenadas en \mathbb{R}^3 (y por tanto, de la carta usual de G).

(1) Calcula

$$\lambda_{A*e} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_e, \quad \lambda_{A*e} \frac{\partial}{\partial y} \Big|_e, \quad \lambda_{A*e} \frac{\partial}{\partial z} \Big|_e,$$

siendo e el neutro de G .

(2) Define campos vectoriales $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(G)$ mediante

$$X_A = \lambda_{A*e} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_e, \quad Y_A = \lambda_{A*e} \frac{\partial}{\partial y} \Big|_e, \quad Z_A = \lambda_{A*e} \frac{\partial}{\partial z} \Big|_e,$$

y calcula $[X, Y], [Y, Z], [Z, X]$.

Problema 4.15. Sea $M = \mathbb{R}^2$ y $N = \mathbb{R}^4$. Consideremos los campos vectoriales sobre M : $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$, $Y = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$. Sea $\psi : M \rightarrow N$ la aplicación dada por $\psi(x, y) = (x^2 - y^2, x^2 + y^2, x + y, x - y)$.

(1) Calcular $[X, Y]$.

(2) Demostrar que X e Y son linealmente independientes en cada punto de $M - \{(0, 0)\}$ y escribir los elementos duales α, β de X e Y en función de la base dx, dy .

(3) Calcular $\psi_* \circ X$ y $\psi_* \circ Y$.

Problema 4.16. (muy largo) En \mathbb{R}^3 , con coordenadas x, y, z se consideran los tres campos vectoriales siguientes:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1+x^2-y^2-z^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} + (xy-z) \frac{\partial}{\partial y} + (xz+y) \frac{\partial}{\partial z}, \\ Y &= (yx+z) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1+y^2-z^2-x^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} + (yz-x) \frac{\partial}{\partial z}, \\ Z &= (zx-y) \frac{\partial}{\partial x} + (zy+x) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1+z^2-x^2-y^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

(1) Probar que para cada $m \in \mathbb{R}^3$, X_m, Y_m, Z_m constituyen una base ortogonal de \mathbb{R}^3 , y que los tres vectores tienen la misma norma.

(2) Calcular los corchetes de Lie $[X, Y]$, $[Y, Z]$, $[Z, X]$ y expresarlos en la base X, Y, Z .

(3) Sea $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{0\}$ y consideremos la aplicación $\phi : \Omega \rightarrow \Omega$ definida por $\phi(x, y, z) = -(x, y, z)/(x^2 + y^2 + z^2)$. Probar que ϕ es un difeomorfismo y calcular $\phi_* \circ X \circ \phi^{-1}$, $\phi_* \circ Y \circ \phi^{-1}$, $\phi_* \circ Z \circ \phi^{-1}$.

(4) Usando para S^3 un atlas formado por la proyección estereográfica respecto al polo norte y menos la proyección estereográfica respecto al polo sur, deducir a partir de (3) la existencia de tres campos vectoriales en S^3 que son linealmente independientes en cada punto. Para ello, compárese ϕ con el difeomorfismo de cambio de esas dos cartas.

Problema 4.17. Probar que los conjuntos siguientes son álgebras de Lie:

(1) Cualquier espacio vectorial sobre el que todos los corchetes de vectores son nulos (a esto se llama álgebra de Lie *abeliana*)

(2) \mathbb{R}^3 con el producto vectorial de vectores.

(3) El espacio vectorial de las matrices cuadradas reales $n \times n$ con el corchete $[A, B] = AB - BA$.

(4) Un espacio vectorial 2-dimensional con base x, y , definiendo $[x, x] = [y, y] = 0$, $[x, y] = -[y, x] = y$, y extendiendo linealmente el corchete.

(5) $\text{End}(V)$, siendo V un espacio vectorial n -dimensional, poniendo $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.

Problema 4.18. En el problema 1.21 se definió un atlas para el espacio proyectivo $\mathbf{P}\mathbb{R}^n$. Se sabe que es posible dotar a $\mathbf{P}\mathbb{R}^3$ de estructura de grupo de Lie, y a ella nos vamos a referir en lo que sigue. Sean u, v, w las funciones coordenadas de la carta $\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de $\mathbf{P}\mathbb{R}^3$, y sea $\eta \in U_1$ un elemento tal que $\phi_1(\eta) = (p, q, r)$. En el subconjunto abierto $A = \lambda_\eta^{-1}(U_1) \cap U_1$ está definida la aplicación $\phi_1 \circ \lambda_\eta|_{U_1}$, y se tiene concretamente en A :

$$u \circ \lambda_\eta = \frac{p + u + qw - rv}{1 - pu - qv - rw}, \quad v \circ \lambda_\eta = \frac{q + v + ru - pw}{1 - pu - qv - rw}, \quad w \circ \lambda_\eta = \frac{r + w + pv - qu}{1 - pu - qv - rw}.$$

(1) Calcula $\lambda_{\eta*} \frac{\partial}{\partial u} \Big|_e$, $\lambda_{\eta*} \frac{\partial}{\partial v} \Big|_e$, $\lambda_{\eta*} \frac{\partial}{\partial w} \Big|_e$, siendo e el neutro, que viene dado por $e = [1, 0, 0, 0]$.

(2) Se definen campos vectoriales $U, V, W \in \mathfrak{X}(\mathbf{P}\mathbb{R}^3)$ mediante $U_\eta = \lambda_{\eta*} \frac{\partial}{\partial u} \Big|_e$, $V_\eta = \lambda_{\eta*} \frac{\partial}{\partial v} \Big|_e$, $W_\eta = \lambda_{\eta*} \frac{\partial}{\partial w} \Big|_e$. Expresarlos en el dominio U_1 de ϕ_1 . (Evidentemente, U, V, W son campos invariantes a la izquierda en $\mathbf{P}\mathbb{R}^3$). Solución:

$$U = (1 + u^2) \frac{\partial}{\partial u} + (uv + w) \frac{\partial}{\partial v} + (uw - v) \frac{\partial}{\partial w},$$

etc.

(3) Calcula también en la misma carta $[U, V]$, $[V, W]$, $[W, U]$.

Problema 4.19. $\mathbf{P}\mathbb{R}^2$ denota el espacio proyectivo 2-dimensional, dotado de las cartas descritas en el problema 1.21. Se supone demostrado que $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{P}\mathbb{R}^2$ es una sumersión.

a) Demostrar que si ponemos $f(\pi(x, y, z)) = \pi(x^2 - y^2, yz, y^2 + z^2)$, el resultado no depende del representante. Tenemos así una aplicación $f : \mathbf{P}\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{P}\mathbb{R}^2$.

- b) Demostrar que f es diferenciable. Se puede hacer usando cartas, pero hay un método más rápido.
- c) Calcula $f_* \frac{\partial}{\partial \varphi_1^2} \Big|_{\pi(1,1,0)}$ mediante alguna de las cartas descritas en 1.21.
- d) Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ definido por $X = z\partial/\partial x + x\partial/\partial y + y\partial/\partial z$. Demuestra que si $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ y ponemos $m_\lambda : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ definida por $m_\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, entonces $m_{\lambda*} \circ X = X \circ m_\lambda$.
- e) Prueba, utilizando el resultado anterior, que existe $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathbf{P}\mathbb{R}^2)$ tal que $\pi_* \circ X = \tilde{X} \circ \pi$.

Tema 5

Campos tensoriales. Formas diferenciales. Derivada de Lie

En los problemas 5.1 hasta 5.9 se supondrá que V es un espacio vectorial real de dimensión n , en el cual se ha elegido una base (e_i) cuya dual se denota por (e^i) , para $i = 1, \dots, n$. Cuando se hable de componentes de tensores, se sobreentenderá que se refieren a esas bases.

Problema 5.1. Sean a_{ij}, b_{ij} las componentes de dos tensores de tipo $(0, 2)$ y supongamos que para todo vector de V de componentes x^i se cumpla $a_{ij}x^i x^j = b_{ij}x^i x^j$. Probar que

- (1) $a_{ij} + a_{ji} = b_{ij} + b_{ji}$,
- (2) Si $a_{ij} = a_{ji}$ y $b_{ij} = b_{ji}$ para todo par $i, j = 1, \dots, n$, probar que $a_{ij} = b_{ij}$.

Problema 5.2. Sean a^{ij} las componentes de un tensor simétrico de tipo $(2, 0)$ y b_{ij} las de un tensor antisimétrico de tipo $(0, 2)$. Calcular $a^{ij}b_{ij}$.

Problema 5.3. Sean a_{ij}, b_{ij} las componentes de dos tensores de tipo $(0, 2)$, a y b , tales que $b \neq 0$ y que $a_{ij}b_{kl} - a_{il}b_{jk} + a_{jk}b_{il} - a_{kl}b_{ij} = 0$, para cualesquiera valores de los índices i, j, k, l . Probar que existe un cierto número real λ para el cual $a_{ij} = \lambda b_{ij}$ para todo par $i, j = 1, \dots, n$.

Problema 5.4. Sean a_j^i las componentes de un tensor de tipo $(1, 1)$ que satisface $a_j^i a_k^j = \delta_k^i$. Probar que

- (1) $\det(a_j^i) = \pm 1$.
- (2) Si $\det(a_j^i) = -1$, entonces $\det(a_j^i + \delta_j^i) = 0$.
- (3) Si $\det(a_j^i) = 1$ y n es impar entonces $\det(a_j^i - \delta_j^i) = 0$.

Problema 5.5. Sean a_{ij} las componentes de un tensor simétrico a de tipo $(0, 2)$ y b_j las de una 1-forma b , que satisfacen la condición $a_{ij}b_k + a_{jk}b_i + a_{ki}b_j = 0$ para índices cualesquiera i, j, k . Probar que o bien $a = 0$, o bien $b = 0$.

Problema 5.6. Sea a un tensor de tipo $(0, 2)$. Probar que $a = a(e_i, e_j)e^i \otimes e^j$. Así, las componentes de a son $a_{ij} = a(e_i, e_j)$. Si (u_i) fuera otra base de V de modo que $u_i = c_i^j e_j$, ¿cómo se expresarían las componentes $\tilde{a}_{ij} = a(u_i, u_j)$ en función de las a_{ij}, c_i^j ?

Problema 5.7. Sean $\omega^1, \dots, \omega^k \in V^*$. Probar que esas 1-formas son linealmente independientes si y sólo si $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k \neq 0$.

Problema 5.8. Sean $\omega^1, \dots, \omega^r \in V^*$ tales que $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^r \neq 0$. Probar que una condición necesaria y suficiente para que $\theta \in \Lambda^a V$ pertenezca al ideal de $\Lambda^\bullet V$ generado por $\omega^1, \dots, \omega^r$ es que $\theta \wedge \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^r = 0$.

Problema 5.9. Sea A un tensor de tipo $(0, 4)$ verificando (a) $A_{ijkl} = -A_{jikl}$, (b) $A_{ijkl} = -A_{ijlk}$, (c) $A_{ijkl} + A_{iklj} + A_{iljk} = 0$, para cualesquiera índices i, j, k, l . Probar

(1) $A_{ijkl} = A_{klij}$.

(2) Si $A(v, w, v, w) = 0$ para todo par $v, w \in V$, entonces $A = 0$.

Problema 5.10. Sean A, B dos campos tensoriales de tipo $(1, 1)$ sobre la variedad diferenciable M . Para cada par de campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ definimos:

$$S(X, Y) = [AX, BY] + [BX, AY] + AB[X, Y] + BA[X, Y] - A[X, BY] - A[BX, Y] - B[X, AY] - B[AX, Y].$$

Probar que S es un campo tensorial antisimétrico de tipo $(1, 2)$ en M , llamado tensor de Nijenhuis de A y B .

Sea J un campo tensorial de tipo $(1, 1)$ en M . El tensor de Nijenhuis de J está definido por

$$N(X, Y) = [JX, JY] + J^2[X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y].$$

(1) Probar que N es un campo tensorial de tipo $(1, 2)$ en M .

(2) Obtener su expresión local en una carta de M en función de las componentes de J .

Problema 5.11. En \mathbb{R}^2 se consideran los campos:

$$X = (x^2 + y) \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 + 1) \frac{\partial}{\partial y},$$

$$Y = (y - 1) \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\theta = (2xy + x^2 + 1)dx + (x^2 - y)dy$$

y la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(u, v, w) = (u - v, v^2 + w)$. Calcular:

(1) $[X, Y]_{(0,0)}$; (2) $\theta(X)_{(0,0)}$; (3) $f^*\theta$.

Problema 5.12. En \mathbb{R}^2 se consideran los campos:

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y},$$

$$Y = y \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\omega = (x^2 + 2y)dx + (x + y^2)dy$$

Calcular $[X, Y]$ y $d\omega$, y demostrar que se satisface la siguiente fórmula que define la diferencial exterior:

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

Problema 5.13. Determinar el subconjunto de \mathbb{R}^2 en el que las formas diferenciales $\alpha = xdx + ydy$ y $\beta = ydx + xdy$ son linealmente independientes y obtener en dicho conjunto el campo de referencias dual (X, Y) .

Problema 5.14. Sea θ la forma diferencial en \mathbb{R}^3 definida por $\theta = ydx + zdy + xdz$. Si $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ viene definida por $\psi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$, calcular $\psi^*\theta$.

Problema 5.15. Probar que si $i : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es la inclusión, la forma diferencial $i^*\theta$, siendo $\theta = xdy - ydx + zdt - tdz$, no se anula en punto alguno.

Problema 5.16. Sea M una variedad diferenciable y sea $m \in M$. Si $\omega^1, \dots, \omega^n$ es una base de T_m^*M , probar que existe un sistema de coordenadas x^1, \dots, x^n en un entorno de m tal que $dx_m^i = \omega^i$, $i = 1, \dots, n$.

Problema 5.17. Sean α, β dos formas diferenciales cerradas en M (una forma diferencial α se llama cerrada si $d\alpha = 0$). Probar que $\alpha \wedge \beta$ es también cerrada. Probar que si β es exacta, entonces $\alpha \wedge \beta$ es exacta (se dice que β es exacta si existe una forma diferencial γ tal que $\beta = d\gamma$).

Problema 5.18. Determinar cuáles de las siguientes formas diferenciales en \mathbb{R}^3 son cerradas y probar que las que son cerradas son también exactas.

- (1) $\alpha = yzdx + xzdy + xydz$.
- (2) $\beta = xdx + x^2y^2dy + yzdz$.
- (3) $\gamma = 2xy^2dx \wedge dy + zdy \wedge dz$.

Problema 5.19. Sea ω una 1-forma diferencial en M y supongamos que existe una función diferenciable f que no se anula en M tal que $d(f\omega) = 0$. Probar que $\omega \wedge d\omega = 0$.

Problema 5.20. Sea \mathcal{L}_X la derivada de Lie respecto al campo vectorial X . Probar que $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] := \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$ coincide con $\mathcal{L}_{[X, Y]}$ al actuar sobre cualquier campo tensorial contravariante, y por tanto sobre cualquier campo tensorial.

Problema 5.21. Sea K un campo tensorial de tipo $(1, r)$ en M y $X, Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$. Probar que

$$(\mathcal{L}_X K)(Y_1, \dots, Y_r) = [X, K(Y_1, \dots, Y_r)] - \sum_{i=1}^r K(Y_1, \dots, [X, Y_i], \dots, Y_r).$$

Problema 5.22. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, sean f, g funciones diferenciables en M , y sea ω una 1-forma diferencial en M . Probar que

- (1) $\mathcal{L}_{fX}Y = f\mathcal{L}_XY - df(Y)X$.
- (2) $\mathcal{L}_{fX}\omega = f\mathcal{L}_X\omega + \omega(X)df$.
- (3) $\mathcal{L}_{fX}g = f\mathcal{L}_Xg$.

Problema 5.23. Sea ι_X la multiplicación interior respecto al campo vectorial X . Probar que para cualquier forma diferencial ω , se tiene $[\mathcal{L}_X, \iota_X](\omega) = \iota_{[X, Y]}\omega$.

Problema 5.24. Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, pongamos $f_*X \in \mathfrak{X}(M)$ definido por $f_*X = f_* \circ X \circ f^{-1}$. Probar que para toda forma diferencial α en M se cumple $\iota_X f^* \alpha = f^* \iota_{f_* X} \alpha$.

Problema 5.25. Sea M una variedad diferenciable y T^*M su variedad cotangente. Definimos la 1-forma canónica ω en T^*M como sigue. Si $\sigma \in T_m^*M$, el valor de ω en σ, ω_σ , es la aplicación lineal de $T_\sigma T^*M$ en \mathbb{R} definida por $\omega_\sigma(X) = \sigma(\pi_*(X))$, siendo $X \in T_\sigma T^*M$ y $\pi : T^*M \rightarrow M$ la proyección natural. Tómese una carta $\phi : U \rightarrow A$ para M con coordenadas ϕ^i , y considérese la carta inducida para T^*M en $\pi^{-1}(U)$ con coordenadas $(x^1, \dots, x^n, y_1, \dots, y_n)$, que vienen definidas por $x^i = \phi^i \circ \pi$, $y_i(\sigma) = \sigma(\frac{\partial}{\partial \phi^i} |_{\pi(\sigma)})$. Expresar ω en esa carta. Calcular también la expresión de $\Omega = d\omega \wedge \dots \wedge d\omega$ en esa carta.

Problema 5.26. Consideremos el grupo de Lie $G = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a > 0\}$, con la multiplicación definida por

$$(a_1, b_1, c_1)(a_2, b_2, c_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1, a_1^2 c_2 + c_1).$$

Se utilizarán para G las coordenadas x, y, z , de modo que $x(a, b, c) = a, y(a, b, c) = b, z(a, b, c) = c$.

(1) Sea $A = (a, b, c) \in G$. Calcular la traslación a la izquierda, por A , de las funciones coordenadas, es decir $x \circ \lambda_A, y \circ \lambda_A, z \circ \lambda_A$. Calcular las retroacciones o imágenes recíprocas $\lambda_A^* dx, \lambda_A^* dy, \lambda_A^* dz$.

(2) Selecciona entre las formas diferenciales siguientes las que son invariantes a la izquierda: $\omega^1 = ydx - z^2 dy, \omega^2 = \frac{1}{x^3} dy \wedge dz$, y calcula $d\omega^2$.

(3) Calcula el campo vectorial invariante a la izquierda U tal que, siendo e el neutro de G , se tiene

$$U_e = \frac{\partial}{\partial x} \Big|_e + 3 \frac{\partial}{\partial z} \Big|_e.$$

(4) Calcula la derivada de Lie de la forma ω^1 respecto al campo vectorial $X = y^2 \frac{\partial}{\partial x} + 2z \frac{\partial}{\partial y}$.

Problema 5.27. Utilizando las notaciones y resultados del problema 4.18, denótense por α, β, γ las 1-formas diferenciales invariantes a la izquierda que son duales de U, V, W , respectivamente.

(1) Expresa α, β, γ como combinación lineal de du, dv, dw .

(2) Calcula explícitamente $\lambda_\eta^* d\alpha$.

(3) Calcula $d\gamma$ y $d(\alpha \wedge \beta)$.

(4) Calcula la derivada de Lie de α, β, γ respecto a U .

Problema 5.28. Como conjunto, el grupo G estudiado en el ejercicio 1.15 es igual que $S^1 \times \mathbb{R}^2$, con lo cual podemos dotar a G de la misma estructura diferenciable que $S^1 \times \mathbb{R}^2$. Con esa estructura diferenciable, G es un grupo de Lie. Sea U el subconjunto de G

equivalente a $(S^1 - \{(1, 0)\}) \times \mathbb{R}^2$. Utilizaremos en U la carta $\Psi : U \rightarrow]0, 2\pi[\times \mathbb{R}^2$ de coordenadas ϕ, u, v de modo que si para abreviar llamamos

$$m(\alpha, a, b) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & a \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se tiene $\phi(m(\alpha, a, b)) = \alpha \pmod{2\pi}$, $u(m(\alpha, a, b)) = a$, $v(m(\alpha, a, b)) = b$.

(1) Sea $A = m(\alpha, a, b) \in G$. Calcula la traslación a la izquierda, por A , de las funciones coordenadas, es decir $\phi \circ \lambda_A, u \circ \lambda_A, v \circ \lambda_A$. Calcula las retroacciones o imágenes recíprocas $\lambda_A^* d\phi, \lambda_A^* du, \lambda_A^* dv$.

(2) Selecciona entre las formas siguientes las que son invariantes a la izquierda: $\omega^1 = \cos \phi du$, $\omega^2 = \operatorname{sen} \phi du + \cos \phi dv$, $\omega^3 = du \wedge dv$.

(3) Calcula los campos invariantes a la izquierda F, U, V tales que, siendo e el neutro de G , se tiene:

$$F_e = \left. \frac{\partial}{\partial \phi} \right|_e, \quad U_e = \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_e, \quad V_e = \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_e.$$