Variedades Diferenciales

Angel Montesinos Amilibia

Departamento de Geometría y Topología,
Universidad de Valencia,
Campus de Burjasot, 46100 Burjasot (Valencia)

23 de noviembre de 2005

Abstract

Apuntes para el módulo *Variedades diferenciables* de la Licenciatura de Matemáticas en la Universidad de Valencia. Me he apoyado bastante en el libro de F.W. Warner *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. También he utilizado el libro de S.T. Hu, y el de Brickell y Clark.

Indice general

Tema 0

Algebra tensorial. Algebra exterior

0.1 Producto tensorial de espacios vectoriales

Sean $V_1, V_2, \dots, V_r$ espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ (se podría trabajar exactamente igual sobre otro cuerpo cualquiera), y sean $V_1^*, \dots, V_r^*$ sus duales. Entonces ponemos $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r = \mathrm{L}(V_1^* \times \cdots \times V_r^*; \mathbb{R})$, donde el segundo miembro representa el espacio vectorial de las aplicaciones multilineales de $V_1^* \times \cdots \times V_r^*$ en $\mathbb{R}$, y llamamos a $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ el *producto tensorial de los espacios* $V_1, \dots, V_r$. Si en ese producto tensorial hubiera un solo factor, el espacio vectorial V, la notación exigiría que $V = L(V^*; \mathbb{R}) = V^{**}$, pero es bien sabido que se cumple canónicamente esa identificación.

Sean $v_1 \in V_1, \dots, v_r \in V_r$ vectores cualesquiera y pongamos $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ para denotar la aplicación multilineal definida por $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)(\sigma^1, \dots, \sigma^r) = v_1(\sigma^1) \cdot \ldots \cdot v_r(\sigma^r)$ para $\sigma^1 \in V_1^*, \dots, \sigma^r \in V_r^*$. Llamamos a $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$ el *producto tensorial* de los vectores $v_1, \dots, v_r$. Un elemento de la forma $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$ recibe el nombre de *descomponible*, pues no todos los elementos de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ se pueden factorizar de esa manera; en general, serán sumas de elementos descomponibles.

Proposición 0.1. *Sean $n_1, n_2, \dots, n_r$ las dimensiones de $V_1, V_2, \dots, V_r$, y tomemos para cada $a = 1, \dots, r$ una base $\{e_i^a\}_{i=1,\dots,n_a}$ de V_a. Entonces*

$$\{e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_r}^r\}_{i_1=1,\dots,n_1;\, i_2=1,\dots,n_2; \dots;\, i_r=1,\dots,n_r}$$

constituye una base de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ y así la dimensión de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ es $n_1 \cdot \ldots \cdot n_r$.

Demostración. Para cada $a \in \{1, \dots, r\}$, sea $\{\sigma_a^i\}_{i=1,\dots,n_a}$ la base de V_a^* que es dual de $\{e_i^a\}_{i=1,\dots,n_a}$, es decir viene definida mediante $\sigma_a^i(e_j^a) = \delta_j^i$. Si $h \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$, ponemos $h^{i_1 \dots i_r} = h(\sigma_1^{i_1}, \dots, \sigma_r^{i_r})$. A causa de la multilinealidad de h, es claro que h queda unívocamente determinado por los $n_1 \cdot \ldots \cdot n_r$ números $h^{i_1 \dots i_r}$. Además, se tiene $(h^{i_1 \dots i_r} e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_r}^r)(\sigma_1^{j_1}, \dots, \sigma_r^{j_r}) = h^{i_1 \dots i_r} \delta_{i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_r}^{j_r} = h^{j_1 \dots j_r} = h(\sigma_1^{j_1}, \dots, \sigma_r^{j_r})$, es decir $h = h^{i_1 \dots i_r} e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_r}^r$. Que el sistema de generadores $\{e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_r}^r\}$ es una base es ahora evidente. A los números $h^{i_1 \dots i_r}$ se les llama *componentes de* h en la base $\{e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_r}^r\}$. $\square$

Obsérvese que en la demostración anterior hemos usado el convenio de sumación de Einstein, lo que haremos habitualmente a lo largo del curso sin mencionarlo.

Ejercicio 0.2. Sean $V_1, \ldots, V_p, V_{p+1}, \ldots, V_{p+q}$ $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. Probar que $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_p) \otimes (V_{p+1} \otimes \cdots \otimes V_{p+q})$ es canónicamente isomorfo a $V_1 \otimes \cdots \otimes V_{p+q}$. En este sentido, el producto tensorial es asociativo.

0.2 Módulos y álgebras graduadas

Sea A un anillo conmutativo, W un grupo abeliano, y supongamos definida una multiplicación $A \times W \to W$, que denotamos $aw, a \in A, w \in W$. Decimos que W es un *módulo sobre* A o un A-*módulo*, si se cumplen las mismas propiedades que para un espacio vectorial, o sea $(a+b)w = aw + bw$, etc. (salvo la relativa al elemento unidad de A, en el caso de que no exista; pero si existe, también se ha de cumplir esa propiedad, o sea $1w = w$). Un submódulo de W es un subgrupo de W que es también un A-módulo para la multiplicación definida en W. Supongamos que para cada entero $p \in \mathbb{Z}$ tengamos un submódulo $W^p \subset W$, de manera que $W = \oplus_{p\in\mathbb{Z}} W^p$, o sea cada elemento de W se descompone de forma única en suma de una cantidad finita de elementos de los W^p. Decimos entonces que W es un A-*módulo* $\mathbb{Z}-$*graduado* o simplemente *graduado*. A los elementos de W^p se les llama *homogéneos de grado (o tipo)* p, o simplemente *de grado (o tipo)* p. Si A fuera un cuerpo, se hablaría de un espacio vectorial graduado.

A veces, el A-módulo W que se está considerando se descompone como suma directa $W = \oplus_{p\in G} W^p$, donde G es un grupo abeliano diferente de $\mathbb{Z}$. Un caso frecuente, que tocaremos en este curso, es el de $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y se dirá entonces que se trata de un módulo *bigraduado*, aunque en general se hablará de un A-módulo G-graduado. Tanto en el caso $\mathbb{Z}$ como en el $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, suele ocurrir que $W^p = \{0\}$ cuando $p < 0$ en el caso $\mathbb{Z}$ o cuando $p = (p_1, p_2)$ con $p_1 < 0$, o bien $p_2 < 0$, en el caso $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Sean W y V dos A-módulos G-graduados; una aplicación A-lineal $\phi : W \to V$ es *homogénea de grado* $p \in G$ si $\phi(W^k) \subset V^{k+p}$ para todo $k \in G$. Si $p = 0$, suele decirse que ϕ es un *homomorfismo de A-módulos G-graduados.*

Un *álgebra sobre* A, ó A-*álgebra*, es un A-módulo W junto con una aplicación A-bilineal $W \times W \to W$, que representamos por $(w_1, w_2) \mapsto w_1 w_2$. Si además W es G-graduado y $W^p \times W^q$ se aplica en $W^{p+q}(p, q \in G)$, entonces W es un *álgebra G-graduada sobre A.*

Sea W un álgebra sobre A (graduada o no), y $h : W \to W$ una aplicación A-lineal (h no será en general en este caso un homomorfismo de álgebra). Decimos que h es una *derivación* si $h(w_1 w_2) = h(w_1) w_2 + w_1 h(w_2)$. Si W es una A-álgebra graduada, y $h : W \to W$ es una aplicación A-lineal, decimos que h es una *antiderivación* si para cualesquiera $w_1 \in W^k,\ w_2 \in W$ se tiene $h(w_1, w_2) = h(w_1) w_2 + (-1)^k w_1 h(w_2)$. En esta fórmula ha de entenderse que el factor que en el segundo término multiplica a $(-1)^k$ se suma al primer término si k es par, y se resta si k es impar. Tanto para derivaciones como para antiderivaciones en A-álgebras graduadas, se dice que son *de grado* p si son aplicaciones A-lineales homogéneas de grado p.

Nota 0.3. Hay una definición más general para el producto tensorial de A-módulos, a la cual equivale la anterior en el caso de espacios vectoriales de dimensión finita, y que viene dada a través del siguiente resultado.

Teorema 0.4. *Sean $V_1, \ldots, V_r$ A-módulos. Existe un único (salvo isomorfismo) A-módulo denotado $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ y una única aplicación A-multilineal $\tau : V_1 \times \cdots \times V_r \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$*

de tal modo que el conjunto $\tau(V_1 \times \cdots \times V_r)$ es un sistema de generadores de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$, y que tienen —el par $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r,\ \tau)$— la siguiente propiedad universal: para cada aplicación A-multilineal $h : V_1 \times \cdots \times V_r \to B$, siendo B un A-módulo cualquiera, existe una única aplicación A-lineal $\tilde{h} : V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \to B$ tal que $h = \tilde{h} \circ \tau$. El A-módulo $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ recibe el nombre de producto tensorial de $V_1, \ldots, V_r$.

Ejercicio 0.5. Si, con la definición para espacios vectoriales de dimensión finita, ponemos $\tau(v_1, \ldots, v_r) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$, probar que $\mathrm{L}(V_1^* \times \cdots \times V_r^*; \mathbb{R})$ junto con τ satisface la propiedad universal. Esto demuestra la equivalencia de las dos definiciones en este caso.

0.3 Algebra tensorial sobre un espacio vectorial

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita n, y V^* su dual. Para cada $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ponemos

$$V^{(r,s)} = \begin{cases} \{0\}, & \text{si } \ r < 0 \ \text{ ó } \ s < 0 \\ \mathbb{R}, & \text{si } \ r = s = 0 \\ \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r \text{ veces}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s \text{ veces}}, & \text{en los restantes casos.} \end{cases}$$

Construimos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial bigraduado $\otimes V = \bigoplus_{(r,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} V^{(r,s)}$. Definimos la aplicación $\otimes : \otimes V \times \otimes V \to \otimes V$ mediante generadores, poniendo para $K \in V^{(r,s)},\ L \in V^{(r',s')}$:

$$(K \otimes L)(\alpha^1, \ldots, \alpha^{r+r'}; v_1, \ldots, v_{s+s'}) = K(\alpha^1, \ldots, \alpha^r; v_1, \ldots, v_s) L(\alpha^{r+1}, \ldots, \alpha^{r+r'}; v_{s+1}, \ldots, v_{s+s'})$$

Así , $\otimes V$ se convierte en un álgebra asociativa bigraduada sobre $\mathbb{R}$ porque $V^{(r,s)} \otimes V^{(r',s')} \subset V^{(r+r',s+s')}$, y recibe el nombre de *algebra tensorial sobre V*. A los elementos de $V^{(r,s)}$ se les llama *tensores de grado (o tipo)* (r, s). La dimensión de $V^{(r,s)}$ es n^{r+s} (o cero, si $V^{(r,s)} = \{0\}$). Si $\{e_i\}$ es una base de V y $\{\sigma^i\}$ su dual $(i, j = 1, \ldots, n)$, entonces los elementos de la forma $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \sigma^{j_1} \otimes \cdots \otimes \sigma^{j_s}$ constituyen una base de $V^{(r,s)}$.

Algunos comentarios sobre la notación. Sea, por ejemplo, $g \in V^{(1,2)}$; entonces escribiré a veces $g(\ ;\ ,\ ) = g$ para resaltar gráficamente de qué grado es g, ya que g actúa sobre $\sigma \in V^*,\ v, w \in V$ para dar $g(\sigma; v, w)$. Como se ve, el punto y coma sirve para distinguir la parte destinada a los argumentos pertenecientes a V^* de la destinada a los pertenecientes a V. Si $\sigma \in V^*$, entonces $g(\sigma;\ ,\ ) \in V^{(0,2)}$ de modo natural. En efecto, $g(\sigma;\ ,\ )$ es la aplicación que actúa sobre $v, w \in V$ para dar $g(\sigma; v, w)$. Nótese que, en general, $g(\ ; v,\ ) \neq g(\ ;\ , v)$ y lo mismo en casos más complicados.

Ejercicios 0.6. 1) ¿De qué tipo tensorial son los siguientes objetos: a) un vector de V; b) un número de $\mathbb{R}$; c) un endomorfismo de V; d) un producto escalar en V? 2) Sea $\{e_i\}$ una base de V, $\{\sigma^i\}$ su dual y pongamos $I = e_i \otimes \sigma^i$; probar que para cualesquiera $\alpha \in V^*,\ v \in V$ se tiene $I(\alpha;\ ) = \alpha, \quad I(\ ; v) = v, \quad I(\alpha; v) = \alpha(v)$; por tanto I corresponde al automorfismo identidad.

Sea $h \in V^{(r,s)}$; supongamos que $r > 0,\ s > 0$ y que a, b son números enteros tales que $0 < a \leq r,\ 0 < b \leq s$. Escribimos $C^{(a,b)}h$ para denotar el tensor de $V^{(r-1,s-1)}$ definido por

$$C^{(a,b)}h(\alpha^1, \dots, \alpha^{r-1}; v_1, \dots, v_{s-1})$$
$$= h(\alpha^1, \dots, \alpha^{a-1}, \sigma^i, \alpha^a, \dots, \alpha^{r-1}; v_1, \dots, v_{b-1}, e_i, v_b, \dots, v_{s-1}),$$

siendo $\{e_i\}$ una base cualquiera de V y $\{\sigma^i\}$ su dual. Al tensor $C^{(a,b)}h$ se le llama *contracción de h* en el índice contravariante a y en el índice covariante b. Se deja como ejercicio probar que la contracción no depende de la base elegida $\{e_i\}$, de modo que la definición es consistente.

Ejercicio 0.7. a) Si $v \in V,\ \sigma \in V^*$, demostrar $C^{(1,1)}(v \otimes \sigma) = \sigma(v)$; b) si $g \in V^{(0,2)},\ v, w \in V$, demostrar $C^{(1,1)}C^{(1,1)}(v \otimes w \otimes g) = g(v, w)$; c) si h es un endomorfismo de V, demostrar $C^{(1,1)}h = \operatorname{tr} h$.

0.4 Algebra exterior

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial n-dimensional. A las subálgebras $\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} V^{(p,0)}$, $\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} V^{(0,p)}$ de $\otimes V$ se las llama respectivamente *álgebra de tensores contravariantes sobre V* y *álgebra de tensores covariantes sobre V*. En este apartado y en el siguiente trabajaremos con la segunda, bien entendido que todo lo que hagamos se puede trasladar paso a paso a la primera.

Un elemento $\alpha \in V^{(0,p)}$ es simplemente un elemento de $\mathrm{L}(V \times \cdots \times V; \mathbb{R})$, y recibe el nombre de *tensor covariante de grado p*. Vamos a considerar ahora un subespacio de $V^{(0,p)}$, el de los tensores covariantes alternados de grado p, también llamados formas de grado p, o bien p-formas, sobre V.

Sea $\alpha \in V^{(0,p)}$. Decimos que α es una *p-forma sobre V* (o que es un tensor covariante alternado de grado p) si para cualesquiera elementos $v_1, \dots, v_p \in V$ y para cualquier permutación $\pi : \{1, 2, \dots, p\} \to \{1, 2, \dots, p\}$ se tiene $\alpha(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}) = \operatorname{sg}(\pi)\alpha(v_1, \dots, v_p)$, donde

$$\operatorname{sg}(\pi) = \begin{cases} 1, & \text{si } \pi \text{ es par} \\ -1, & \text{si } \pi \text{ es impar} \end{cases}$$

Las p-formas sobre V constituyen un subespacio vectorial de $V^{(0,p)}$, que se denota por $\bigwedge^p V$.

Proposición 0.8. *Sea $\alpha \in \bigwedge^p V$, y sean $v_1, \dots, v_p \in V$:*

1. *si hay dos elementos iguales entre los $v_1, \dots, v_p$, entonces $\alpha(v_1, \dots, v_p) = 0$;*
2. *si $\{v_1, \dots, v_p\}$ no es linealmente independiente, entonces $\alpha(v_1, \dots, v_p) = 0$;*
3. *si $p > n$, entonces $\alpha(v_1, \dots, v_p) = 0$, es decir, $\bigwedge^p V = \{0\}$ si $p > n$.*

Demostración. (1) Sean r, s dos índices distintos para los que $v_r = v_s$ y consideremos la permutación π que consiste en trasponer r con s. Como π es impar, $\operatorname{sg}(\pi) = -1$.

Entonces $\alpha(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(r)}, \dots, v_{\pi(s)}, \dots, v_{\pi(p)}) = \alpha(v_1, \dots, v_p) = -\alpha(v_1, \dots, v_p)$, de modo que esas expresiones han de ser cero.

(2) Supongamos que existen números reales $a^1, \dots, a^p$, no todos nulos, tales que $a^i v_i = 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a^p \neq 0$ y así $v_p = -\sum_{i=1}^{p-1} a^i v_i / a^p$. Entonces $\alpha(v_1, \dots, v_p) = -\sum_{i=1}^{p-1} a^i \alpha(v_1, \dots, v_{p-1}, v_i)/a^p = 0$, por el resultado anterior, ya que en cada término de la suma hay dos argumentos iguales.

(3) Es consecuencia inmediata del resultado anterior. $\square$

Es claro que $\bigwedge^\bullet V = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \bigwedge^p V$ es un subespacio pero no es una subálgebra del álgebra de tensores covariantes. Pero podemos definir en $\bigwedge^\bullet V$ un nuevo producto, "$\wedge$", llamado *producto exterior,* que convierte a $\bigwedge^\bullet V$ en un álgebra graduada asociativa llamada *álgebra exterior covariante sobre V,* o también *álgebra exterior de formas sobre V.* Hay que hacer notar que $\bigwedge^0 V = \mathbb{R}$, $\bigwedge^1 V = V^*$, $\bigwedge^p V = \{0\}$ si $p < 0$ ó $p > n$.

Sean p, q enteros no negativos. A una permutación $\pi : \{1, 2, \dots, p+q\} \to \{1, 2, \dots, p+q\}$ se le llama *permutación de barajar de tipo* (p, q) si $\pi(1) < \pi(2) < \cdots < \pi(p)$ y $\pi(p+1) < \cdots < \pi(p+q)$. Denotaremos por $S_{(p,q)}$ al conjunto de permutaciones de barajar de tipo (p, q).

Pues bien, sean $\alpha \in \bigwedge^p V$, $\beta \in \bigwedge^q V$, y sean $v_1, \dots, v_{p+q} \in V$. El *producto exterior* de α y β, $\alpha \wedge \beta$, es el tensor de $V^{(0,p+q)}$ definido por

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{p+q}) = \sum_{\pi \in S(p,q)} \mathrm{sg}(\pi) \alpha(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}) \beta(v_{\pi(p+1)}, \dots, v_{\pi(p+q)}).$$

Se deja como ejercicio comprobar la igualdad siguiente

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in S_{p+q}} \mathrm{sg}(\pi) \alpha(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}) \beta(v_{\pi(p+1)}, \dots, v_{\pi(p+q)}),$$

donde S_{p+q} representa el conjunto de todas las permutaciones de $\{1, 2, \dots, p+q\}$. Esta segunda fórmula es útil muchas veces a la hora de probar propiedades abstractas de productos exteriores. La anterior facilita el cálculo efectivo de esos productos.

Ejercicio 0.9. Sean $\sigma^1, \dots, \sigma^p \in V^*$, $v_1, \dots, v_p \in V$. Probar: $(\sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^p)(v_1, \dots, v_p) = \sum_{\pi \in S_p} \mathrm{sg}(\pi) \sigma^1(v_{\pi(1)}) \dots \sigma^p(v_{\pi(p)})$.

Proposición 0.10. *Sean* $\alpha \in \bigwedge^p V$, $\beta \in \bigwedge^q V$. *Entonces:*

1. $\alpha \wedge \beta \in \bigwedge^{p+q} V$; *además, el producto exterior es asociativo y convierte a* $\bigwedge^\bullet V$ *en un álgebra graduada asociativa sobre* $\mathbb{R}$;

2. $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$;

3. *si* $\{\sigma^i\}$ *es una base de* V^*, *los elementos* $\sigma^{i_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{i_p}$, *con* $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$, *forman una base de* $\bigwedge^p V$, *y así* $\dim \bigwedge^p V = \binom{n}{p}$. *Además, si* $\{e_j\}$ *es la dual de* $\{\sigma^i\}$, *se tiene*
$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \sigma^{i_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{i_p}.$$

Demostración. (1) Utilizando la segunda fórmula para el producto exterior, supongamos que $\tau \in S_{p+q}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
&(\alpha \wedge \beta)(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(p+q)}) \\
&\qquad = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in S_{p+q}} sg(\pi) \alpha(v_{\tau(\pi(1))}, \ldots, v_{\tau(\pi(p))}) \beta(v_{\tau(\pi(p+1))}, \ldots, v_{\tau(\pi(p+q))}) \\
&\qquad = \frac{\mathrm{sg}(\tau)}{p!q!} \sum_{\pi \in S_{p+q}} sg(\tau \circ \pi) \alpha(v_{\tau(\pi(1))}, \ldots, v_{\tau(\pi(p))}) \beta(v_{\tau(\pi(p+1))}, \ldots, v_{\tau(\pi(p+q))}) \\
&\qquad = \mathrm{sg}(\tau)(\alpha \wedge \beta)(v_1, \ldots, v_{p+q}),
\end{aligned}
$$

porque la composición $\tau \circ \pi$ es una permutación de $\{1, 2, \ldots, p+q\}$, y si π recorre S_{p+q}, $\tau \circ \pi$ recorre exactamente S_{p+q}. El resto de la afirmación se deja como ejercicio. Concretamente, si $\gamma \in \bigwedge^r V$, se tiene $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$, y así se escribe sin ambigüedad $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$, que viene dada por

$$
\begin{aligned}
&(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)(v_1, \ldots, v_{p+q+r}) \\
&= \sum_{\pi \in S(p,q,r)} \mathrm{sg}(\pi) \alpha(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(p)}) \beta(v_{\pi(p+1)}, \ldots, v_{\pi(p+q)}) \gamma(v_{\pi(p+q+1)}, \ldots, v_{\pi(p+q+r)}) \\
&= \frac{1}{p!q!r!} \sum_{\pi \in S_{p+q+r}} \mathrm{sg}(\pi)\, \alpha(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(p)}) \beta(v_{\pi(p+1)}, \ldots, v_{\pi(p+q)}) \gamma(v_{\pi(p+q+1)}, \ldots, v_{\pi(p+q+r)}),
\end{aligned}
$$

y se deja al lector averiguar qué es $S_{(p,q,r)}$.

(2) Es evidente, pues la permutación $\{1, 2, \ldots, p+q\} \to \{p+1, p+2, \ldots, p+q, 1, 2, \ldots, p\}$ tiene paridad pq.

(3) Se tiene, para $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \sigma^{i_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{i_p}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \sum_{\pi \in S_p} \mathrm{sg}(\pi) \sigma^{i_1}(e_{j_{\pi(1)}}) \ldots \sigma^{i_p}(e_{j_{\pi(p)}}) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \delta^{i_1}_{j_1} \ldots \delta^{i_p}_{j_p} \\
&= \alpha(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}),
\end{aligned}
$$

de donde la afirmación (3) es ahora evidente. □

0.5 Multiplicación interior

Sean $\alpha \in \bigwedge^p V$, $v \in V$. Entonces $i_v\alpha$ es el elemento de $\bigwedge^{p-1} V$ definido por $i_v\alpha = C^{(1,1)}(v \otimes \alpha)$, para $p > 0$, ó por $i_v\alpha = 0$ para $p \leq 0$. Observemos que $C^{(1,1)}(v \otimes \alpha)(v_1, \ldots, v_{p-1}) = v(\sigma^i)\alpha(e_i, v_1, \ldots, v_{p-1}) = \alpha(v, v_1, \ldots, v_{p-1})$. Esto demuestra que $i_v\alpha \in \bigwedge^{p-1} V$ y justifica el que a veces pongamos $i_v\alpha = \alpha(v, \ )$. A la aplicación $i_v : \bigwedge^\bullet \to \bigwedge^\bullet$ se le da el nombre de *contracción* (o *multiplicación interior*) *con* v.

Proposición 0.11. *Sea $v \in V$; entonces i_v es una antiderivación de grado -1 en el álgebra exterior $\bigwedge^\bullet V$.*

Demostración. Hemos de probar solamente que si $\alpha \in \bigwedge^p V$, $\beta \in \bigwedge^q V$, se tiene $i_v(\alpha \wedge \beta) = (i_v\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_v\beta$. Esto, desde luego, es trivial para $p = 0$. Supongamos $p = 1$ y sean $v_2, \dots, v_{q+1} \in V$. Entonces, poniendo $v_1 = v$, tenemos

$$
\begin{aligned}
i_v(\alpha \wedge \beta)(v_2, \dots, v_{q+1}) &= (\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{q+1}) \\
&= \sum_{\pi \in S_{(1,q)}} \operatorname{sg}(\pi)\alpha(v_{\pi(1)})\beta(v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(q+1)}) \\
&= \sum_{j=1}^{q+1} (-1)^{j+1}\alpha(v_j)\beta(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{q+1}) \\
&= \alpha(v)\beta(v_2, \dots, v_{q+1}) + \sum_{j=2}^{q+1} (-1)^{j+1}\alpha(v_j)\beta(v, v_2, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{q+1}) \\
&= \big((i_v\alpha) \wedge \beta\big)(v_2, \dots, v_{q+1}) - \sum_{j=2}^{q+1} (-1)^{j}\alpha(v_j) i_v\beta(v_2, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{q+1}) \\
&= \big((i_v\alpha) \wedge \beta + (-1)^1 \alpha \wedge i_v\beta\big)(v_2, \dots, v_{q+1});
\end{aligned}
$$

y así queda probado para $p = 1$. Suponiéndolo válido para todo $\alpha \in \bigwedge^p V$, sea $\gamma \in \bigwedge^1 V$. Entonces

$$
\begin{aligned}
i_v\big((\gamma \wedge \alpha) \wedge \beta\big) &= i_v\big(\gamma \wedge (\alpha \wedge \beta)\big) \\
&= (i_v\gamma) \wedge (\alpha \wedge \beta) - \gamma \wedge i_v(\alpha \wedge \beta) \\
&= \big((i_v\gamma) \wedge \alpha\big) \wedge \beta - \gamma \wedge (i_v\alpha) \wedge \beta + (-1)^{p+1}\gamma \wedge \alpha \wedge i_v\beta \\
&= \big(i_v(\gamma \wedge \alpha)\big) \wedge \beta + (-1)^{p+1}(\gamma \wedge \alpha) \wedge i_v\beta.
\end{aligned}
$$

Como todo elemento de $\bigwedge^{p+1} V$ es una combinación lineal de elementos de la forma $\gamma \wedge \alpha$, con $\gamma \in \bigwedge^1 V$ y $\alpha \in \bigwedge^p V$, y i_v es lineal, el resultado es cierto para formas de grado $p+1$, o sea, es cierto para todo $\bigwedge^\bullet V$. □

Nota 0.12. Algunos libros (por ejemplo, Kobayashi–Nomizu) utilizan una definición algo diferente del producto exterior. Si $\wedge'$ es el producto exterior de esos autores, se tiene, para $\alpha \in \bigwedge^p V$, $\beta \in \bigwedge^q V$, la relación siguiente con el producto exterior utilizado aquí

$$\alpha \wedge' \beta = \frac{p!q!}{(p+q)!}\, \alpha \wedge \beta.$$

La definición de esos autores es más natural en cierto sentido (véase problema n. 9), pero tiene la desventaja de introducir denominadores. Por ejemplo, si $\alpha, \beta \in \bigwedge^1 V$, se tiene

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha, \qquad \alpha \wedge' \beta = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha).$$

0.6 Problemas

En lo que sigue, se entenderá que $\{e_i\},\ i = 1, \dots, n$ es una base del $\mathbb{R}$-espacio vectorial V y que $\{\sigma^i\}$ es su dual.

1. Sean $V_i,\ i = 1, \dots, r$ espacios vectoriales de dimensiones finitas. Probar que $\mathrm{L}\left(V_1; \mathrm{L}\left(V_2; \dots; \mathrm{L}(V_r; \mathbb{R}) \cdots\right)\right)$ es naturalmente isomorfo a $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^*$.

2. Probar que si $\alpha \in \bigwedge^p V$, se tiene $\sum_{j=1}^{n} \sigma^j \wedge i_{e_j}\alpha = p\alpha$.

3. Sea $\alpha \in V^{(0,p)}$ tal que $\alpha(v_1, \dots, v_p) = 0$ siempre que entre los vectores $v_1, \dots, v_p$ haya dos iguales entre sí. Demostrar que $\alpha \in \bigwedge^p V$.

4. Sea $g \in V^{(0,2)}$ tal que $\det g(e_i, e_j) > 0$. Demostrar que $\left(\det g(e_i, e_j)\right)^{\frac{1}{2}} \sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^n$ no depende de la base elegida $\{e_i\}$ con dual $\{\sigma^i\}$, siempre que esas bases tengan la misma orientación.

5. Sea $h \in V^{(1,1)}$, y pongamos $\det h$ para representar el número real tal que $h(\sigma^1;\ ) \wedge h(\sigma^2;\ ) \wedge \cdots \wedge h(\sigma^n;\ ) = (\det h)\sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^n$. Demostrar que $\det h$ no depende de la base elegida $\{e_i\}$ con dual $\{\sigma^i\}$.

6. Sea $\alpha \in \bigwedge^2 V$. Demostrar que

$$\det \alpha(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \left(\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}} (\frac{n}{2})!} \displaystyle\sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sg}(\pi) \alpha(e_{\pi(1)}, e_{\pi(2)}) \dots \alpha(e_{\pi(n-1)}, e_{\pi(n)}) \right)^2, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

7. Sea $0 \neq \alpha \in \bigwedge^1 V$, y sea $\pi_\alpha : \bigwedge^\bullet \to \bigwedge^\bullet$ la aplicación dada por $\pi_\alpha(\beta) = \alpha \wedge \beta$. Probar que si $0 \neq v \in V$ las dos sucesiones siguiente son exactas:

$$\bigwedge^\bullet \xrightarrow{\pi_\alpha} \bigwedge^\bullet \xrightarrow{\pi_\alpha} \bigwedge^\bullet$$
$$\bigwedge^\bullet \xrightarrow{i_v} \bigwedge^\bullet \xrightarrow{i_v} \bigwedge^\bullet.$$

8. De modo análogo al realizado para $\bigwedge^\bullet$, construir el álgebra de tensores covariantes simétricos sobre V.

9. Considérese en $\bigoplus_{0 \le p} V^{(0,p)}$ el ideal bilátero $\mathcal{J}$ generado por los elementos $\alpha \otimes \alpha$, siendo $\alpha \in V^*$. Sea $\bigwedge'^\bullet = \bigoplus_{0 \le p} V^{(0,p)} / \mathcal{J}$ el álgebra inducida, cuyo producto denotamos $\wedge'$. Probar que se trata del producto exterior utilizado por Kobayashi–Nomizu y otros autores (ver texto).

Tema 1

Variedades diferenciables: nociones básicas

1.1 Introducción

En el curso de Geometría Diferencial Clásica se estudiaron las superficies en $\mathbb{R}^3$, y se vio cómo las cartas permiten definir aplicaciones diferenciables de una superficie en otro espacio, o de otro espacio en una superficie, y se podía definir la diferencial de esas aplicaciones. En otras palabras, se puede calcular con objetos definidos sobre la superficie.

Se extendía así el dominio del análisis a las superficies, y a su vez el análisis permitía dar forma concreta a nociones geométricas.

La mayor limitación de este enfoque está en que las superficies se tomaban como objetos metidos en un espacio ambiente —en nuestro caso, $\mathbb{R}^3$—. En efecto, se ve que hay importantes objetos matemáticos cuya definición natural no es la de subconjuntos de un $\mathbb{R}^n$ ambiente, y que sin embargo admiten una descripción local a la manera de las superficies, es decir por medio de cartas entendidas como biyecciones de regiones del objeto en abiertos de un espacio modelo, un $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, el conjunto de todas las rectas vectoriales de $\mathbb{R}^n$, llamado espacio proyectivo, o el conjunto de todas las rectas afines de $\mathbb{R}^n$.

Entre esos objetos se encuentran las variedades topológicas. Al estudiarlas se pone el acento en la continuidad: son espacios topológicos localmente homeomorfos a abiertos de $\mathbb{R}^n$. Un paso más nos lleva a las variedades diferenciables; en ellas no solamente se exige la continuidad sino la diferenciabilidad: son variedades topológicas localmente difeomorfas a abiertos de $\mathbb{R}^n$. En principio no se las considera metidas en ningún espacio ambiente sino que se las estudia en sí mismas, con una herramienta: las cartas. Esto hace más abstracto el enfoque, pero esa dificultad queda compensada por el gran alcance de las técnicas que se desarrollan.

1.2 Definiciones

Definición 1.1. Una *variedad diferenciable n-dimensional de clase* C^k, $0 < k \leq \infty$, es un conjunto M junto con una familia de aplicaciones biyectivas llamadas *cartas*, $\phi_\alpha : U_\alpha \to A_\alpha$, $\alpha \in I$, donde I es un conjunto de índices, U_α es un subconjunto de M y A_α es un abierto de $\mathbb{R}^n$, con las siguientes propiedades:

1. Los dominios de las cartas recubren M, es decir: $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = M$.

2. Para cualquier par $\alpha, \beta \in I$ el dominio de la aplicación $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$, esto es $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y la aplicación

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

   es de clase C^k.

Se dice entonces que la familia de cartas $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un *atlas de clase C^k de M* o una *estructura diferenciable de clase C^k de M* . A n se le llama *dimensión* de M.

Para abreviar, si $k = \infty$, diremos que M es una *variedad diferenciable n-dimensional.* Es decir, por "diferenciable" entenderemos "diferenciable de clase C^∞", salvo indicación en contra. Muchas veces hablaremos de "la variedad diferenciable M" sin hacer mención expresa de su atlas, que se dará por sobreentendido; o bien, diremos simplemente que ϕ es una carta de M para dar a entender que pertenece a su atlas. Si $\phi : U \to A$ es una carta, el conjunto A queda determinado por ϕ mediante $A = \phi(U)$; por eso, se suele abreviar y se dice simplemente que (U, ϕ) es una carta de M.

Es importante advertir que se admiten también variedades de dimensión cero. La definición de variedad en este caso requiere aceptar algunos convenios. En concreto, $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ es el espacio vectorial real de dimensión cero, que consta de un solo punto. Por tanto, cualquier carta (no vacía) de la variedad consistirá en un solo punto, que será así un abierto. Se deduce que los puntos de la variedad son abiertos, y así la variedad será un espacio topológico discreto. Las aplicaciones de solapamiento $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$, si no operan en el vacío, se limitan a enviar un punto al otro; son, pues, constantes y por ello se las llama, por convenio, diferenciables. En otras palabras, cualquier espacio topológico discreto puede considerarse como variedad de dimensión cero.

Hay que suponer que el atlas es una familia "abierta", no en el sentido topológico, sino en el sentido de que se le pueden añadir cartas. Pero nótese que la adición de una carta $\psi : V \to A$ sólo es posible (si queremos seguir teniendo un atlas) si se cumplen las condiciones de compatibilidad con las otras cartas del atlas. O sea, además de ser ψ una biyección de un subconjunto $V \subset M$ en un abierto $A \subset \mathbb{R}^n$, se ha de tener que para todo $\alpha \in I$ los dominios de las dos composiciones $\psi \circ \phi_\alpha^{-1}, \quad \phi_\alpha \circ \psi^{-1}$, es decir $\phi_\alpha(U_\alpha \cap V)$ y $\psi(U_\alpha \cap V)$ son abiertos y que esas dos composiciones son diferenciables de la clase deseada.

Los dos procedimientos más sencillos para obtener nuevas cartas compatibles vienen descritos en el ejercicio (4) del final de esta sección. Se trata de la composición de una carta con un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$, y de la restricción de una carta a un abierto.

Al conjunto M se le dota de una topología mediante las cartas. Es aquélla en que son abiertos los subconjuntos de la forma $\phi_\alpha^{-1}(W)$, donde $\alpha \in I$ y W es un abierto de $\mathbb{R}^n$, y también es un abierto la unión arbitraria de cualesquiera de esos subconjuntos. Con esa topología, los dominios de las cartas, U_α, son abiertos de M y las propias cartas son homeomorfismos[1].

[1] El que para esta topología las variedades sean localmente homeomorfas a abiertos de $\mathbb{R}^n$ no impide la existencia de "patologías" globales. Es costumbre excluir dos de ellas: que la variedad no sea separable o que tenga "demasiados abiertos". Por eso, supondremos que las variedades son Hausdorff y que tienen una base numerable de abiertos.

Como ejemplos básicos de variedades diferenciables tenemos los siguientes:

1. $\mathbb{R}^n$ con la carta identidad.

2. Si $(M, \{\phi_\alpha : U_\alpha \to A_\alpha\}_{\alpha\in I})$ es una variedad diferenciable y $N \subset M$ es un abierto de M, entonces $(N, \{\phi_\alpha|_{V_\alpha} : V_\alpha \to B_\alpha\}_{\alpha\in I})$, donde $V_\alpha = N \cap U_\alpha$ y $B_\alpha = \phi_\alpha(V_\alpha)$, es una variedad diferenciable. Se suele decir entonces que N es una *subvariedad abierta de* M. En particular, cualquier abierto de $\mathbb{R}^n$ con la carta identidad es también una variedad diferenciable.

3. Si $(M, \{\phi_\alpha : U_\alpha \to A_\alpha\}_{\alpha\in I})$ y $(N, \{\psi_\beta : V_\beta \to B_\beta\}_{\beta\in J})$ son variedades diferenciables, su producto cartesiano $M \times N$ es también una variedad diferenciable con el atlas

$$\phi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \to A_\alpha \times B_\beta, \qquad \alpha \in I, \quad \beta \in J.$$

4. Sea I_- el intervalo $]-1, 0[$ en el eje de las x del plano $\mathbb{R}^2$; sea I_+ el intervalo $]0, 1[$ de ese mismo eje del plano; sean $p_- = (0, -1), p_+ = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Sea $M = I_- \cup I_+ \cup \{p_-\} \cup \{p_+\}$. Damos a M dos cartas; la primera tiene como dominio a $U = I_- \cup I_+ \cup \{p_-\}$, y la segunda a $V = I_- \cup I_+ \cup \{p_+\}$. Ambas cartas envían sus respectivos dominios al intervalo $]-1, 1[\subset \mathbb{R}$ simplemente mediante la extracción de la primera coordenada (o sea, proyección sobre el eje x). Se comprueba muy fácilmente que M es una variedad C^∞ que no es Hausdorff.

Ejercicio 1.2. 1. Demuestra que los dominios de las cartas, U_α, son abiertos de M y las propias cartas son homeomorfismos.

2. Demuestra que si al atlas se le añade una carta compatible en el sentido descrito, la topología definida para M mediante el nuevo atlas sigue siendo la misma.

3. Consideremos $M = \mathbb{R}$ y las dos cartas siguientes, $\phi : M \to \mathbb{R}, \quad \psi : M \to \mathbb{R}$ dadas por $\phi(x) = x, \quad \psi(x) = x^3$. Probar que M con cada una de esas cartas por separado es una variedad diferenciable y que esos dos atlas definen la misma topología para M. Probar que, sin embargo, las dos cartas no se pueden juntar para formar un atlas C^1.

4. Sea M una variedad diferenciable n-dimensional, $\phi : U \to A$ una carta de M y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo (o sea, una aplicación diferenciable, biyectiva, y con inversa f^{-1} diferenciable). Probar que la aplicación $\psi : U \to f(A)$ dada por $\psi = f \circ \phi$ se puede añadir al atlas de M y seguir teniendo un atlas. Lo mismo, si $V \subset U$ es un abierto y $\gamma = \phi|_V : V \to \phi(V)$.

5. Demuestra que los ejemplos básicos de variedades diferenciables que se acaban de describir antes de estos ejercicios lo son efectivamente.

1.3 Aplicaciones diferenciables

Puesto que las variedades diferenciables reciben una estructura de espacio topológico, y siempre se las considera dotadas de esa estructura, la definición de aplicación continua entre dos variedades diferenciables es la de siempre: la imagen inversa de un abierto es un abierto. Por el contrario, el concepto de aplicación diferenciable entre variedades ha de introducirse de nuevas: sin ayuda de las cartas no puede en principio reducirse a conceptos anteriores.

Definición 1.3. Sea $f : M \to N$ una aplicación de la variedad diferenciable M en la variedad diferenciable N (para abreviar, diremos en adelante "una aplicación entre variedades"). Se dice que f es *diferenciable* si lo es en cada punto de M. Y se dice que es diferenciable en $m \in M$ si existe una carta $\phi : U \to A$ de M y una carta $\psi : V \to B$ de N tales que $m \in U$, $f(U) \subset V$ y que la composición $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : A \to B$, es una aplicación diferenciable en $\phi(m)$. Si f es diferenciable y biyectiva y f^{-1} es también diferenciable, decimos que f es un *difeomorfismo* y que M y N son *difeomorfas*.

Esta definición equivale a la siguiente: se dice que $f : M \to N$ es diferenciable si, para toda carta $\phi : U \to A$ de un conjunto de cartas que recubren M y toda carta $\psi : V \to B$ de un conjunto de cartas que recubren $f(M)$, el subconjunto $\phi(U \cap f^{-1}(V))$, que es el dominio de definición de la aplicación $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$, es abierto y la aplicación $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \to B$, es diferenciable.

Se deja como ejercicio probar que si f es diferenciable entonces es continua.

La composición de aplicaciones diferenciables también lo es. Como consecuencia, los difeomorfismos definen una relación de equivalencia en las variedades diferenciables. Pues bien, para todos los efectos se consideran equivalentes las variedades difeomorfas, al menos mientras no las dotemos de alguna estructura adicional.

Se suele denotar por $C^\infty(M, N)$ el conjunto de las aplicaciones diferenciables de M a N. Si $N = \mathbb{R}$, se abrevia esta notación escribiendo $C^\infty(M)$. A los elementos de $C^\infty(M)$ se les llama *funciones diferenciables en M*. Así, al decir, por ejemplo, que f es una función diferenciable en M, se entenderá siempre que es una aplicación diferenciable de M en $\mathbb{R}$.

Sea $W \subset M$ un abierto y $f : W \to N$ una aplicación. Decimos que f es diferenciable si lo es al considerar para W la estructura de variedad diferenciable que hereda de la de M. Entonces suele decirse, para evitar confusión con las aplicaciones globales, o sea definidas en todo M, que f es una aplicación diferenciable local. Claramente, si $f : M \to N$ es diferenciable, su restricción a W es diferenciable.

Entre las aplicaciones diferenciables locales se encuentran las cartas y las funciones coordenadas. Si $\phi : U \to A$ es una carta de M, entonces ϕ y ϕ^{-1} son diferenciables. En este curso denotaremos por $r^1, \dots, r^n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas. Pues bien, llamaremos *(funciones) coordenadas de la carta* ϕ a las aplicaciones $\phi^i := r^i \circ \phi, \quad i = 1, \dots, n$. Estas funciones son diferenciables, como hemos dicho.

Ejercicio 1.4.

1. Probar que la definición 1.3 de diferenciabilidad es consistente. Para ello basta probar que si $m \in M$ y f es diferenciable en m al usar las cartas ϕ, ψ, también lo es si en su lugar se usan las cartas $\phi' : U' \to A'$, $\psi' : V' \to B'$ que tengan las mismas propiedades, es decir $m \in U', f(U') \subset V'$, etc.

2. Probar que una aplicación diferenciable entre variedades es continua.

3. Probar que la composición de aplicaciones diferenciables también lo es y que los difeomorfismos establecen una relación de equivalencia.

4. Probar que las dos variedades del ejercicio (3) del apartado 2 son difeomorfas.

5. Probar que la inclusión de una subvariedad abierta es una aplicación diferenciable

6. Sea $n = \dim M$, $U \subset M$ abierto y $\phi : U \to A \subset \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo. Probar que ϕ es una carta.

7. Probar que las proyecciones de una variedad diferenciable producto $M \times N$ sobre las variedades factores son diferenciables. Y también que si $m \in M, n \in N$, las dos aplicaciones $j_m : N \to M \times N, \quad j_n : M \to M \times N$, dadas por $j_m(n_1) = (m, n_1), \quad j_n(m_1) = (m_1, n)$, son diferenciables.

8. Probar que si $f_1 : M_1 \to N_1$ y $f_2 : M_2 \to N_2$ son diferenciables entonces $f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \to N_1 \times N_2$, dada por $(f_1 \times f_2)(m_1, m_2) = \big(f_1(m_1), f_2(m_2)\big)$ es diferenciable.

9. Probar que si $f_1 : M \to N_1$ y $f_2 : M \to N_2$ son diferenciables entonces la aplicación $(f_1, f_2) : M \to N_1 \times N_2$, dada por $(f_1, f_2)(m) = (f_1(m), f_2(m))$, es diferenciable.

10. Probar que las cartas y sus inversas son diferenciables.

11. Encontrar un ejemplo de función diferenciable local que no es restricción de ninguna función diferenciable global.

12. Probar que $C^\infty(M)$ es un anillo con unidad.

1.4 Concepto de grupo de Lie

Algunas de las variedades más interesantes, por ser frecuentes en muchas ramas de la Física y de la Matemática, y mejor estudiadas, son los grupos de Lie.

Definición 1.5. Un *grupo de Lie* es una variedad diferenciable G en la que hay definida una ley de composición $G \times G \to G$ que la convierte en un grupo, y tal que esa ley de composición y la aplicación $G \to G$ que a cada elemento le asigna su inverso son diferenciables como aplicaciones entre variedades. Una aplicación $f : G \to H$ del grupo de Lie G en grupo de Lie H se llama *homomorfismo de Grupos de Lie* si es diferenciable y a la vez homomorfismo de grupos. Y se llama *isomorfismo de grupos de Lie* si es un isomorfismo de grupos que a la vez es un difeomorfismo.

Muchas veces ese grupo no será abeliano. Por ello, la notación que utilizaremos para la composición en un grupo de Lie genérico será multiplicativa: $(r, s) \mapsto rs$. El elemento neutro lo denotaremos e.

Una manera más abreviada de expresar que esas dos aplicaciones, la multiplicación y la inversión, son diferenciables es exigir que la aplicación $\psi : G \times G \to G$ dada por $\psi(r, s) = rs^{-1}$ sea diferenciable. Pues si consideramos la aplicación $j_e : G \to G \times G$ dada por $j_e(s) = (e, s)$, que sabemos siempre es diferenciable, se tiene que $(\psi \circ j_e)(s) = s^{-1}$, es decir la inversión, sería diferenciable. Por ello, la aplicación $\xi : G \times G \to G \times G$ dada por $\xi(s, t) = (s, t^{-1})$ será diferenciable (en su primer argumento es la identidad y en el segundo, la inversión); ahora bien, tenemos que $\psi \circ \xi$ es la multiplicación en el grupo, de modo que ésta es también diferenciable.

Sea $s \in G$. A las aplicaciones $\lambda_s, \rho_s : G \to G$ dadas por $\lambda_s(t) = st,\ \rho_s(t) = ts$, se les llama *traslación a la izquierda* y *traslación a la derecha* mediante s, respectivamente. Ambas son difeomorfismos y se tiene evidentemente $\lambda_s \circ \lambda_t = \lambda_{st},\ \rho_s \circ \rho_t = \rho_{ts}$.

El ejemplo más importante de grupo de Lie es el grupo general lineal $Gl(n; \mathbb{R})$. Es el grupo de los automorfismos lineales de $\mathbb{R}^n$. Veamos que es un grupo de Lie. Sea $(e_1, \dots, e_n)$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y representemos los elementos de $\mathbb{R}^{n^2}$ en la forma $(x_1^1, \dots, x_n^n)$. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal, su matriz en la base canónica está formada por las coordenadas del punto $(f_1^1, \dots, f_n^n)$ de $\mathbb{R}^{n^2}$ determinado por $f(e_i) = \sum_{j=1}^n f_i^j e_j$. Se sabe que f es un automorfismo sii $\det(f_i^j) \neq 0$. Como la aplicación $\det : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ es evidentemente continua (es un polinomio), el conjunto $A = \{(x_i^j) \in \mathbb{R}^{n^2} \ : \ \det(x_i^j) \neq 0\}$ es un abierto de $\mathbb{R}^{n^2}$. Por tanto, sea $\phi : Gl(n; \mathbb{R}) \to A$ la aplicación que a cada automorfismo f de $\mathbb{R}^n$ asigna $\phi(f) = (f_i^j)$, su matriz en la base canónica. Como ϕ es evidentemente biyectiva, $Gl(n; \mathbb{R}^n)$ con ϕ es una variedad diferenciable.

Sean $(f_i^j), (g_i^j) \in A$, de modo que $((f_i^j), (g_i^j)) \in A \times A$. Sean $f, g \in Gl(n; \mathbb{R})$ los automorfismos cuyas matrices respectivas en la base canónica son $(f_i^j), (g_i^j)$. Esto significa que $\phi(f) = (f_i^j),\ \phi(g) = (g_i^j)$, y que por tanto $(\phi \times \phi)^{-1}((f_i^j), (g_i^j)) = (f, g)$. Por otra parte, sabemos que la matriz de fg viene dada por $h_i^j = \sum_{k=1}^n f_k^j g_i^k$. Si llamamos $\mathrm{mult} : G \times G \to G$ al producto de automorfismos, tenemos, pues que $\big(\phi \circ \mathrm{mult} \circ (\phi \times \phi)^{-1}\big)((f_i^j), (g_i^j)) = (h_i^j)$. Como cada componente de la matriz (h_i^j) se expresa mediante polinomios de las componentes de $(f_i^j), (g_i^j)$, tenemos que mult es diferenciable. Si inv denota la inversión, tenemos análogamente que $(\phi \circ \mathrm{inv} \circ \phi^{-1})(f_i^j) = (F_i^j / \det(f_i^j))$, donde F_i^j es el adjunto del elemento f_i^j en la matriz de f. Como tanto ese adjunto como el determinante son polinomios en las f_i^j, y el determinante no se anula en A, vemos que la inversión es también diferenciable. Por tanto, $Gl(n;\mathbb{R})$ es un grupo de Lie.

Ejercicio 1.6.

1. Demostrar que si G es un grupo de Lie, la aplicación $\psi(s,t) = st^{-1}$ es diferenciable.

2. Demostrar que $\mathbb{R}^n$ con la suma de vectores es un grupo de Lie abeliano (esto es conmutativo).

3. Sea $\mathbb{C}$ el cuerpo complejo, y S^1 el subconjunto de $\mathbb{C}$ de números complejos de módulo igual a 1. Por una parte, S^1 es un grupo para la multiplicación compleja. Por otra parte, S^1 es la circunferencia unidad en $\mathbb{R}^2$. Demostrar que S^1 es un grupo de Lie.

Tema 2

El espacio tangente. La diferencial de una aplicación

2.1 Curvas y espacio tangente

Se trata de generalizar en esta lección el concepto de recta tangente de una curva y de plano tangente de una superficie en $\mathbb{R}^3$. En el caso de curvas y superficies, esos espacios tangentes tenían una representación concreta como subespacios afines del espacio ambiente. En el caso de variedades, al no existir espacio ambiente, el concepto de espacio tangente será un poco más abstracto.

Sea M una variedad diferenciable. Se llama *curva diferenciable en* M a una aplicación diferenciable $\alpha :]a, b[\to M$, siendo $]a, b[$ un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Sea $m \in M$ y representemos por $\text{Curvas}(M, m)$ el conjunto de las curvas diferenciables en M, α, tales que su intervalo de definición contiene al 0 y que $\alpha(0) = m$. Sea $\mathcal{F}(m)$ el conjunto de todas las funciones diferenciables definidas en algún entorno de m. Definimos en $\text{Curvas}(M, m)$ una relación de equivalencia como sigue: si $\alpha, \beta \in \text{Curvas}(M, m)$, ponemos $\alpha \sim \beta$ si para toda $f \in \mathcal{F}(m)$ se tiene

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

Denotaremos por T_mM el conjunto de clases de equivalencia respecto a esa relación, o sea $T_mM = \text{Curvas}(M, m)/\sim$, y por $p : \text{Curvas}(M, m) \to T_mM$ a la proyección natural que a cada curva le asigna su clase de equivalencia. T_mM recibe el nombre de *espacio tangente a* M *en* m y a sus elementos se les llama *vectores tangentes a* M *en* m.

Cada clase de equivalencia $v = p(\alpha) \in T_mM$, o sea cada vector tangente, define una aplicación que asigna un número real $v(f)$ a cada función $f \in \mathcal{F}(m)$ mediante

$$v(f) = (f \circ \alpha)'(0).$$

Esa aplicación caracteriza al vector tangente, pues si $w \in T_mM$ es tal que $v(f) = w(f)$ para toda función $f \in \mathcal{F}(m)$, entonces v y w son clases de equivalencia iguales por definición. Llamamos a $v(f)$ *acción de* v *sobre* f o también *derivada de* f *respecto a* v. La razón de este nombre es clara de acuerdo con la definición. Además, esa acción se comporta como una derivada en m. En efecto, si $a \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{F}(m)$, se tiene

$$v(af) = av(f), \qquad v(f + g) = v(f) + v(g) \qquad \text{(linealidad)},$$
$$v(fg) = f(m)v(g) + g(m)v(f) \qquad \text{(derivación de un producto)}.$$

Esta última igualdad se prueba así:

$$\begin{aligned} v(fg) &= \big((fg)\circ\alpha\big)'(0) = \big((f\circ\alpha)(g\circ\alpha)\big)'(0) \\ &= (f\circ\alpha)(0)v(g) + (g\circ\alpha)(0)v(f) = f(m)v(g) + g(m)v(f). \end{aligned}$$

Hemos llamado vectores a los elementos de T_mM y vamos ahora a justificar ese nombre dotando a T_mM de estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Lema 2.1. *Sean $v = p(\alpha), w = p(\beta) \in T_mM$ y sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces, existe un vector tangente $p(\gamma) \in T_mM$ tal que para toda función $f \in \mathcal{F}(m)$ se tiene $p(\gamma)(f) = av(f) + bw(f)$.*

Demostración. Sea $\phi : U \to A \subset \mathbb{R}^n$ una carta de M centrada en m con coordenadas $\phi^i = r^i \circ \phi$. Centrada en m significa que $m \in U$ y que $\phi(m) = 0$ (en el Ejercicio 1.2(4) se prueba que siempre podemos suponer que el atlas contiene una carta de ese tipo). Llamamos *ecuaciones de la curva α en la carta ϕ* a las funciones diferenciables definidas (al menos en un entorno de $0 \in \mathbb{R}$) por $\alpha^i = \phi^i \circ \alpha$. Construimos la curva $\gamma \in \mathrm{Curvas}(M, m)$ estableciendo en primer lugar sus ecuaciones $\gamma^i := a\alpha^i + b\beta^i$, que son evidentemente diferenciables y están definidas en un entorno de 0. Entonces γ se define mediante $\gamma(t) = \phi^{-1}\big(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)\big)$. Esta curva es evidentemente diferenciable y $\gamma(0) = \phi^{-1}(a\alpha^1(0) + b\beta^1(0), \dots, a\alpha^n(0) + b\beta^n(0)) = \phi^{-1}(0) = m$, de modo que pertenece a $\mathrm{Curvas}(M, m)$.

Si $f \in \mathcal{F}(m)$ se tiene (para cualquier curva de $\mathrm{Curvas}(M, m)$, aunque aquí efectuamos el cálculo con α)

$$p(\alpha)(f) = (f\circ\alpha)'(0) = \big((f\circ\phi^{-1})\circ(\phi\circ\alpha)\big)'(0) \tag{2.1}$$

$$= \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial r^i}(\phi(\alpha(0)))(r^i\circ\phi\circ\alpha)'(0) = \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial r^i}(0)(\alpha^i)'(0), \tag{2.2}$$

donde hemos usado la regla de la cadena, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} &\big((f\circ\phi^{-1})\circ(\phi\circ\alpha)\big)(t) = (f\circ\phi^{-1})\big((\phi\circ\alpha)(t)\big) \\ =&(f\circ\phi^{-1})\big((r^1\circ\phi\circ\alpha)(t), \dots, (r^n\circ\phi\circ\alpha)(t)\big). \end{aligned}$$

Aplicando esto mismo a γ, tenemos:

$$\begin{aligned} p(\gamma)(f) &= \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial r^i}(\phi(\gamma(0)))(a\alpha^i + b\beta^i)'(0) \\ &= a\,\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial r^i}(0)(\alpha^i)'(0) + b\,\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial r^i}(0)(\beta^i)'(0) \\ &= av(f) + bw(f). \end{aligned}$$

□

La estructura de espacio vectorial de T_mM queda establecida poniendo $av + bw = p(\gamma)$, de manera que se tiene

$$(av + bw)(f) = av(f) + bw(f).$$

Con eso ha quedado definida la suma (haciendo $a = b = 1$) y el producto por un escalar (haciendo $b = 0$). La demostración de que con estas composiciones T_mM es un espacio vectorial es trivial.

2.2 Dimensión y bases del espacio tangente

Veamos que $\dim T_mM = \dim M = n$. Sea (V, ψ) una carta cualquiera de M con $m \in V$. Consideremos las curvas $\tau_j \in \mathrm{Curvas}(M, m)$, $j = 1, \dots, n$, dadas por sus ecuaciones

$$\tau_j^i(t) = \psi^i(m) + \delta_j^i t,$$

donde δ_j^i es la delta de Kronecker, de manera que $\tau_j(t) = \psi^{-1}(\tau_j^1(t), \dots, \tau_j^n(t))$. Vamos a ver que $(p(\tau_1), \dots, p(\tau_n))$ es una base de T_mM. Para ello, sea $f \in \mathcal{F}(m)$ y $v = p(\alpha) \in T_mM$. Aplicando la fórmula (2.2) y teniendo en cuenta que $(\tau_j^i)' = \delta_j^i$, obtenemos, utilizando el convenio de sumación de Einstein:

$$p(\tau_j)(f) = \frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial r^i}(\psi(m))(\tau_j^i)'(0) = \frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial r^i}(\psi(m))\delta_j^i = \frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial r^j}(\psi(m)). \quad (2.3)$$

Mediante este resultado calculamos la combinación lineal $v(\psi^i)p(\tau_i)$:

$$\begin{aligned}\big((v(\psi^j)p(\tau_j)\big)(f) &= v(\psi^j)p(\tau_j)(f) = (\alpha^j)'(0)\frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial r^j}(\psi(m)) \\ &= (f \circ \alpha)'(0) = v(f).\end{aligned}$$

Por consiguiente, tenemos $v = v(\psi^i)p(\tau_i)$, es decir, los vectores $p(\tau_i) \in T_mM$, $i = 1, \dots, n$, forman un sistema de generadores de T_mM. Son además linealmente independientes, pues si existe una combinación lineal tal que $a^i p(\tau_i) = 0$, tenemos para cualquier $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$(a^i p(\tau_i))(\psi^j) = a^i(\psi^j \circ \tau_i)'(0) = a^i(\tau_i^j)'(0) = a^i\delta_i^j = a^j = 0.$$

Concluimos que las $p(\tau_i)$ son una base de T_mM, cuya dimensión es, pues, n. Generalmente suele escribirse

$$\left.\frac{\partial}{\partial \psi^i}\right|_m := p(\tau_i),$$

de modo que si $v \in T_mM$, se tiene

$$v = v(\psi^i)\left.\frac{\partial}{\partial \psi^i}\right|_m.$$

También, como hemos visto en (2.3), se tiene:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \psi^i}\right|_m := \left.\frac{\partial}{\partial \psi^i}\right|_m(f) = p(\tau_i)(f) = \left.\frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial r^i}\right|_{\psi(m)}.$$

Consideremos otra carta (W, μ) y sea $m \in W \cap V$. Puesto que los vectores

$$\left.\frac{\partial}{\partial \mu^i}\right|_m$$

constituyen otra base de T_mM, ¿cuál es la matriz del cambio de base? Se tiene

$$\left.\frac{\partial}{\partial \mu^i}\right|_m = \left.\frac{\partial \psi^j}{\partial \mu^i}\right|_m \left.\frac{\partial}{\partial \psi^j}\right|_m.$$

Por tanto, la matriz del cambio de base está dada por las parciales de las coordenadas de ψ respecto a las de μ.

Ejercicio 2.2. Con esta misma notación, probar que la aplicación $\mu(W \cap V) \to \mathbb{R}$ dada por

$$(t^1, \ldots, t^n) \mapsto \frac{\partial \psi^j}{\partial \mu^i}\Big|_{\mu^{-1}(t^1,\ldots,t^n)}$$

es diferenciable.

2.3 El espacio cotangente

Llamamos *espacio cotangente a M en $m \in M$*, y lo denotamos por T_m^*M, al espacio vectorial dual de T_mM, es decir $T_m^*M = (T_mM)^* = \mathrm{Hom}(T_mM; \mathbb{R})$. Sabemos que entonces $\dim T_m^*M = n$. A los elementos de T_m^*M se les denomina *1-formas en m*.

Sea $f \in \mathcal{F}(m)$, $m \in M$. Entonces esa función define un elemento de T_m^*M, que se escribe df_m y se llama *diferencial de f en m*, mediante

$$(df_m)(v) = v(f), \qquad v \in T_mM.$$

En efecto, si $a, b \in \mathbb{R}$ y $v, w \in T_mM$, tenemos

$$(df_m)(av + bw) = (av + bw)(f) = av(f) + bw(f) = a\, df_m(v) + b\, df_m(w).$$

Cuando $M = \mathbb{R}^n$, esta definición coincide con la definición clásica de la diferencial de una función en un punto.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sean $f, g \in \mathcal{F}(m)$. Entonces, como se comprueba inmediatamente:

$$d(af + bg)_m = a\, df_m + b\, dg_m, \qquad d(fg)_m = f(m)dg_m + g(m)df_m.$$

Ejercicio 2.3. Con la notación anterior, sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Demostrar $d(h \circ f)_m = (h' \circ f)(m)df_m$. Por ejemplo, si $h(x) = \mathrm{sen}(x)$, entonces $h'(x) = \cos(x)$, y lo que hay que demostrar se reduce en este caso a $d(\mathrm{sen}(f))_m = \cos(f(m))df_m$.

Sea (V, ψ) una carta de M y $m \in V$. Se tiene

$$\begin{aligned}(d\psi_m^i)\left(\frac{\partial}{\partial \psi^j}\Big|_m\right) &= \frac{\partial \psi^i}{\partial \psi^j}\Big|_m = \frac{\partial(\psi^i \circ \psi^{-1})}{\partial r^j}\Big|_{\psi(m)} \\ &= \frac{\partial(r^i \circ \psi \circ \psi^{-1})}{\partial r^j}\Big|_{\psi(m)} = \frac{\partial r^i}{\partial r^j}\Big|_{\psi(m)} = \delta_j^i.\end{aligned}$$

Por consiguiente, las 1-formas $d\psi_m^i$, $i = 1, \ldots, n$, constituyen una base de T_m^*M, la base dual de la $(\partial/\partial\psi^i|_m)$.

Ejercicio 2.4. Repasar cómo es la estructura de espacio vectorial del espacio dual $T_m^*M = (T_mM)^*$.

2.4 Las variedades tangente y cotangente

Consideramos ahora el conjunto

$$TM := \bigcup_{m \in M} T_mM,$$

al cual vamos a dotar de estructura de variedad diferenciable, a la que llamaremos *variedad tangente de* M. Sea $\pi : TM \to M$ la aplicación suprayectiva tal que $\pi(X) = m$ si $X \in T_mM$, o sea que aplica, a cada vector tangente a M en un punto, el punto en el cual es tangente. Sea $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ el atlas de M. Construimos un atlas de TM, $\{(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\phi}_\alpha)\}_{\alpha\in I}$, como sigue. En primer lugar, $\tilde{U}_\alpha := \pi^{-1}(U_\alpha)$ y así es evidente que $\cup_{\alpha\in I}\tilde{U}_\alpha = TM$. La aplicación $\tilde{\phi}_\alpha : \tilde{U}_\alpha \to \phi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$ viene dada por $\tilde{\phi}_\alpha(X) = \big(\phi_\alpha(m), (d\phi^1_\alpha)_m(X), \ldots, (d\phi^n_\alpha)_m(X)\big)$. Es decir, las primeras n coordenadas de $\tilde{\phi}_\alpha(X) \in \mathbb{R}^{2n}$ vienen dadas por las coordenadas de $\phi_\alpha(m)$, mientras que las siguientes n coordenadas son las componentes de X en la base $(\partial/\partial\phi^1_\alpha|_m, \ldots, \partial/\partial\phi^n_\alpha|_m)$ de T_mM.

Probamos que $\tilde{\phi}_\alpha$ es inyectiva. Si para $X, Y \in \tilde{U}_\alpha$ se tiene $\tilde{\phi}_\alpha(X) = \tilde{\phi}_\alpha(Y)$, la igualdad de las primeras n coordenadas de esas imágenes nos indica que $\phi_\alpha(\pi(X)) = \phi_\alpha(\pi(Y))$, con lo cual $\pi(X) = \pi(Y)$ y así los dos vectores pertenecen al mismo espacio tangente, digamos a T_mM. La igualdad de las últimas coordenadas nos dice que ambos tienen las mismas componentes en la base $(\partial/\partial\phi^i_\alpha|_m)$, y concluimos que $X = Y$. Veamos que $\tilde{\phi}_\alpha : \tilde{U}_\alpha \to \phi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$ es suprayectiva. Si $(t^1, \ldots, t^n, q^1, \ldots, q^n) \in \phi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$, sea para abreviar $m := \phi^{-1}_\alpha(t^1, \ldots, t^n)$; para obtener un elemento cuya imagen por $\tilde{\phi}_\alpha$ sea $(t^1, \ldots, t^n, q^1, \ldots, q^n)$ nos basta tomar el vector de T_mM cuyas componentes en la base $(\partial/\partial\phi^1_\alpha|_m, \ldots, \partial/\partial\phi^n_\alpha|_m)$ son las $(q^1, \ldots, q^n)$. Es decir, tenemos

$$\tilde{\phi}^{-1}_\alpha(t^1, \ldots, t^n, q^1, \ldots, q^n) = q^i \frac{\partial}{\partial\phi^i_\alpha}\Big|_m$$

Sean $\alpha, \beta \in I$. Se deja como ejercicio probar que $\tilde{\phi}_\alpha(\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta)$ es abierto. En cuanto a la aplicación $\tilde{\phi}_\beta \circ \tilde{\phi}^{-1}_\alpha : \tilde{\phi}_\alpha(\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta) \to \tilde{\phi}_\beta(\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta)$, tenemos:

$$\begin{aligned}(\tilde{\phi}_\beta\circ\tilde{\phi}^{-1}_\alpha)(t^1, \ldots, t^n, q^1, \ldots, q^n) &= \tilde{\phi}_\beta\left(q^i \frac{\partial}{\partial\phi^i_\alpha}\Big|_{\phi^{-1}_\alpha(t^1,\ldots,t^n)}\right)\\ &= \left((\phi_\beta \circ \phi^{-1}_\alpha)(t^1, \ldots, t^n), q^i\frac{\partial\phi^1_\beta}{\partial\phi^i_\alpha}\Big|_{\phi^{-1}_\alpha(t^1,\ldots,t^n)}, \ldots, q^i\frac{\partial\phi^n_\beta}{\partial\phi^i_\alpha}\Big|_{\phi^{-1}_\alpha(t^1,\ldots,t^n)}\right).\end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta el ejercicio del final del apartado 2, es inmediato comprobar que esta aplicación es diferenciable.

Ejercicios 2.5.
1. Demostrar que la aplicación $\pi : TM \to M$ es diferenciable.
2. Construir de modo análogo la variedad diferenciable T^*M.

2.5 La diferencial de una aplicación

Sean M y N variedades diferenciables y $f : M \to N$ una aplicación diferenciable. Vamos a ver que f induce una aplicación diferenciable $f_* : TM \to TN$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\pi"'] & TN \arrow[d, "\pi"'] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Para ello, sea $X = p(\gamma) \in TM$, con $\pi(X) = m, \gamma \in \mathrm{Curvas}(M, m)$. La composición $f\circ\gamma$ es claramente un elemento de $\mathrm{Curvas}(N, f(m))$. Pues bien, ponemos $f_*(X) = p(f \circ \gamma) \in$

$T_{f(m)}N$. Para que la definición sea consistente, ha de ser independiente del representante elegido para X. Pero esto es evidente una vez hacemos actuar $p(f\circ\gamma)$ sobre una función de $\mathcal{F}(f(m))$. Sea h esa función. Entonces

$$p(f\circ\gamma)(h) = (h\circ(f\circ\gamma))'(0) = (h\circ f)\circ\gamma)'(0) = p(\gamma)(h\circ f) = X(h\circ f),$$

cálculo que se justifica porque la composición $h\circ f$ es una función diferenciable definida en un entorno de m, es decir de $\mathcal{F}(m)$. Por tanto, la expresión de $f_*(X)$ no depende del representante γ elegido para X. Podemos escribir, pues, $f_*(X)(h) = X(h\circ f)$. El diagrama anterior es conmutativo ya que $\pi(f_*(X)) = f(m) = f(\pi(X))$.

A la aplicación f_* se le da el nombre de *diferencial de* f. Hay muchas notaciones en la literatura para denotarla; aparte de la empleada aquí, se suele ver también: $\delta f, df, Tf$. A la restricción de f_* al espacio tangente T_mM la denotaremos por $f_{*m} : T_mM \to T_{f(m)}N$.

No hemos probado aún que f_* es diferenciable. Esa demostración se dejará como ejercicio. Para preparar sus aspectos técnicos, sea (U,ϕ) una carta de M, (V,ψ) una carta de N y supongamos $m\in U,\ f(m)\in V$. Tendremos entonces

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial\phi^i}\Big|_m\right) = f_*\left(\frac{\partial}{\partial\phi^i}\Big|_m\right)(\psi^k)\frac{\partial}{\partial\psi^k}\Big|_{f(m)} = \frac{\partial(\psi^k\circ f)}{\partial\phi^i}\Big|_m\frac{\partial}{\partial\psi^k}\Big|_{f(m)}.$$

Así, si $M = U\subset\mathbb{R}^c$ y $N = \mathbb{R}^d$, f_* coincide con la diferencial (o derivada) del Análisis.

Proposición 2.6. *1. Si $f : M\to M$ es la identidad, $f_* : TM\to TM$ es la identidad.*

2. Si $f : M\to N$ y $g : N\to P$ son aplicaciones diferenciables entre variedades, se tiene $(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$; más en concreto $(g\circ f)_{*m} = g_{*f(m)}\circ f_{*m}$.

3. $f_{*m} : T_mM\to T_{f(m)}N$ es una aplicación lineal.

Demostración. (1) es trivial. (2) Sean $m\in M,\ h\in\mathcal{F}(g(f(m)))$ y $X\in T_mM$. Entonces

$$(g\circ f)_*(X)(h) = X(h\circ(g\circ f)) = X((h\circ g)\circ f) = f_*(X)(h\circ g) = g_*(f_*(X))(h).$$

(3) Si $a,b\in\mathbb{R},\ X,Y\in T_mM$ y $h\in\mathcal{F}(f(m))$, se tiene

$$\begin{aligned} f_*(aX+bY)(h) &= (aX+bY)(h\circ f) = aX(h\circ f) + bY(h\circ f)\\ &= a\,f_*(X)(h) + b\,f_*(Y)(h) = (a\,f_*(X) + b\,f_*(Y))(h). \end{aligned}$$

□

Puesto que $f_{*m} : T_mM\to T_{f(m)}N$ es un homomorfismo para cada $m\in M$, queda definido el homomorfismo dual $f^*_m : T^*_{f(m)}N\to T^*_mM$. Pero debe observarse que, al contrario de lo que pasa con f_{*m}, el homomorfismo f^*_m no es la restricción de una hipotética aplicación de T^*N a T^*M.

Sea $h\in\mathcal{F}(f(m))$. Queremos calcular $f^*_m(dh_{f(m)})$. Si $X\in T_mM$, tendremos

$$f^*_m(dh_{f(m)})(X) = dh_{f(m)}(f_{*m}(X)) = (f_{*m}(X))(h) = X(h\circ f) = d(h\circ f)_m(X).$$

Por consiguiente $f^*_m(dh_{f(m)}) = d(h\circ f)_m$.

2.5.1 Ejemplo: la tangente a una curva y la diferencial de una función

Sea $\alpha :]a,b[\to M$ una curva diferenciable en la variedad M. Queremos calcular su diferencial en un punto arbitrario $t_0 \in]a,b[$, que será una aplicación $\alpha_{*t_0} : T_{t_0}\mathbb{R} \to T_{\alpha(t_0)}M$. Para abreviar, en este curso escribiremos

$$\theta(t_0) = \frac{\partial}{\partial r}\Big|_{t_0},$$

donde $r = r^1 = \mathrm{id}$ es la (única) función coordenada canónica en $\mathbb{R}$. Así, $\theta(t_0)$ es el vector canónico tangente a $\mathbb{R}$ en t_0, o sea el vector coordenado correspondiente a la carta identidad de $\mathbb{R}$. Este vector $\theta(t_0)$ constituye la base canónica de $T_{t_0}\mathbb{R}$. Por eso, conoceremos la diferencial de α en cuanto sepamos en qué aplica el vector $\theta(t_0)$, y llamaremos *tangente de α en t_0*, $\alpha'(t_0)$, al resultado de esa acción, o sea $\alpha'(t_0) := \alpha_{*t_0}(\theta(t_0))$. Tendremos, siendo ahora h una función diferenciable definida en un entorno de $\alpha(t_0)$:

$$\alpha'(t_0)(h) = \alpha_{*t_0}(\theta(t_0))(h) = \theta(t_0)(h \circ \alpha) = \frac{\partial(h \circ \alpha)}{\partial r}(t_0) = (h \circ \alpha)'(t_0).$$

Si ϕ es una carta alrededor de $\alpha(t_0)$, tendremos pues

$$\alpha'(t_0) = \alpha'(t_0)(\phi^i)\frac{\partial}{\partial \phi^i}\Big|_{\alpha(t_0)} = (\phi^i \circ \alpha)'(t_0)\frac{\partial}{\partial \phi^i}\Big|_{\alpha(t_0)} = (\alpha^i)'(t_0)\frac{\partial}{\partial \phi^i}\Big|_{\alpha(t_0)},$$

donde, como otras veces, $\alpha^i = r^i \circ \phi \circ \alpha$ son las componentes de la curva en la carta ϕ. Tenemos, pues, la fórmula análoga a la de la tangente a una curva en $\mathbb{R}^n$. Si M es $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\alpha'(t_0) = (\alpha^i)'(t_0)\frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\alpha(t_0)}.$$

Los vectores $\partial/\partial r^i|_{\alpha(t_0)}$ son los canónicos. Por eso, muchas veces se omiten y la tangente se escribe simplemente $((\alpha^1)'(t_0), \ldots, (\alpha^n)'(t_0))$, que es la fórmula usual.

Si la curva α es tal que $0 \in]a,b[$, tendremos

$$\alpha'(0)(h) = (h \circ \alpha)'(0)$$

de modo que se tiene $p(\alpha) = \alpha'(0)$.

Veamos ahora, para una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$, la relación que hay entre df_m y f_m^*. Puesto que $\theta(f(m)) = \partial/\partial r\big|_{f(m)}$ constituye la base canónica de $T_{f(m)}\mathbb{R}$, su dual estará constituida por $dr_{f(m)}$. Por ello la aplicación $f_m^* : T_{f(m)}^*\mathbb{R} \to T_m^*M$ quedará conocida completamente en cuanto conozcamos su actuación sobre la 1-forma $dr_{f(m)}$. Tenemos, pues, $f_m^*(dr_{f(m)}) = d(r \circ f)_m = df_m$, ya que r es la identidad en $\mathbb{R}$. Así, df_m es la imagen por f_m^* de la 1-forma canónica de $T_{f(m)}^*\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.7. 1. Probar que si $\phi : U \to A$ es una carta de M, entonces

$$\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial \phi^i}\Big|_m\right) = \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\phi(m)}.$$

2. Probar que f_* es diferenciable.

3. Sea $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y ψ la carta dada por las coordenadas polares cuya inversa es $x = \operatorname{sen} v \cos u,\ y = \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u,\ z = \cos v$. Sea $f : S^2 \to S^2$ la aplicación inducida por el automorfismo de $\mathbb{R}^3$ de matriz
$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$
Calcular $f_*(\partial/\partial\psi^1|_m),\ f_*(\partial/\partial\psi^2|_m)$, siendo m un punto genérico de S^2.

4. Probar que si M es una variedad diferenciable conexa y $f : M \to N$ es una aplicación diferenciable tal que $f_{*m} = 0$ para todo $m \in M$, entonces f es constante (sugerencia: ver mediante cartas que f es localmente constante; a continuación, comprobar que si $p \in f(M)$ entonces $f^{-1}(\{p\})$ es abierto y cerrado).

5. Sea $\phi : U \to A$ una carta de M^c, y sea $\mathrm{id} : A \to A$ la carta identidad. Se consideran las cartas inducidas $\tilde{\phi} : \pi^{-1}(U) \to A \times \mathbb{R}^c,\ \widetilde{\mathrm{id}} : TA \to A \times \mathbb{R}^c$. Probar que $\tilde{\phi} = \widetilde{\mathrm{id}} \circ \phi_*$.

Tema 3

Teoremas de la función inversa y de la función implícita

Encontraremos una generalización, a las variedades diferenciables, del Teorema de la función inversa del Análisis. Tendremos con ella una herramienta muy útil para describir localmente el comportamiento de las aplicaciones diferenciables, el Teorema del rango constante. Además, otra consecuencia, el Teorema de la función implícita, nos asegurará que ciertos subconjuntos de una variedad diferenciable son también variedades diferenciables.

3.1 Teorema de la función inversa y consecuencias

El Teorema de la función inversa del Análisis puede enunciarse así: sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable. Si para $p \in \Omega$ se tiene que $\mathrm{Jac}(f)(p) \neq 0$, existe un entorno abierto $V \subset \Omega$ de p tal que $f|_V : V \to f(V)$ es biyectiva, $f(V)$ es abierto y $(f|_V)^{-1} : f(V) \to V$ es diferenciable.

Teorema 3.1. *(Teorema de la función inversa) Si $f : M \to N$ es una aplicación diferenciable entre variedades, $m \in M$ y $f_{*m} : T_m M \to T_{f(m)} N$ es un isomorfismo, entonces existe un entorno abierto W de m tal que $f(W)$ es abierto y $f|_W : W \to f(W)$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Por ser f_{*m} un isomorfismo, $\dim M = \dim N = n$. Sean (U, ϕ), (V, ψ) cartas alrededor de m y $f(m)$ respectivamente. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f(U) \subset V$. Entonces

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_{*\phi(m)} = \psi_{*f(m)} \circ f_{*m} \circ (\phi^{-1})_{*\phi(m)} : T_{\phi(m)}\mathbb{R}^n \to T_{\psi(f(m))}\mathbb{R}^n$$

es composición de isomorfismos y por tanto un isomorfismo, o sea $\mathrm{Jac}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(m)) \neq 0$. Así, existe un entorno abierto Ω de $\phi(m)$ en $\phi(U)$ tal que $(\psi \circ f \circ \phi^{-1})|_\Omega : \Omega \to (\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\Omega)$ es un difeomorfismo. Llamando $W := \phi^{-1}(\Omega)$, tenemos que $f|_W = \big(\psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ \phi\big)|_W : W \to f(W)$ es un difeomorfismo, porque es composición de difeomorfismos. $\square$

A veces escribiremos "variedad diferenciable M^p" para indicar brevemente que estamos hablando de una variedad diferenciable M que es p-dimensional. Si $f : M \to N$ es una aplicación diferenciable y $m \in M$, llamamos *rango de f en m* a la dimensión de $f_{*m}(T_m M)$, o sea al rango de f_{*m}.

Cuando el rango de una aplicación diferenciable entre variedades es constante, se pueden escoger localmente cartas a través de las cuales la aplicación tiene un aspecto estándar. Para demostrar ese resultado, conocido como Teorema del rango constante, necesitamos un lema previo.

Lema 3.2. *Sea M^p una variedad diferenciable y $m_0 \in M$. Sean $f^1, f^2, \ldots, f^k$ funciones diferenciables definidas en un entorno W de m_0 y tales que el conjunto $\{(df^1)_{m_0}, \ldots, (df^k)_{m_0}\}$ es linealmente independiente. Entonces existe una carta (V, ψ) de M alrededor de m_0 cuyas primeras k coordenadas son las funciones $f^1, \ldots, f^k$.*

Demostración. Sea $\phi : U \to A$ una carta de M con $m_0 \in U \subset W$. El conjunto $\{(d\phi^1)_{m_0}, \ldots, (d\phi^p)_{m_0}\}$ es un sistema de generadores de $T^*_{m_0}M$ y por tanto, también lo es el conjunto $\{(df^1)_{m_0}, \ldots, (df^k)_{m_0}, (d\phi^1)_{m_0}, \ldots, (d\phi^p)_{m_0}\}$. Por consiguiente, existen índices $i_{k+1}, \ldots, i_p \in \{1, \ldots, p\}$ tales que el conjunto $\big((df^1)_{m_0}, \ldots, (df^k)_{m_0}, (d\phi^{i_{k+1}})_{m_0}, \ldots, (d\phi^{i_p})_{m_0}\big)$ es una base de $T^*_{m_0}M$. Sea $h : U \to \mathbb{R}^p$ la aplicación dada por

$$h(m) = (f^1(m), \ldots, f^k(m), \phi^{i_{k+1}}(m), \ldots, \phi^{i_p}(m)).$$

Tenemos entonces $h^*_{m_0}((dr^1)_{h(m_0)}) = d(r^1 \circ h)_{m_0} = (df^1)_{m_0}$, etc. Por consiguiente, $h^*_{m_0}$ es un isomorfismo y también lo será h_{*m_0}. Por el teorema de la función inversa, existe un entorno V de m_0 tal que $h(V) \subset \mathbb{R}^p$ es abierto y $\psi := h|_V : V \to h(V)$ es un difeomorfismo. Esta aplicación ψ es la carta buscada. $\square$

De una carta $\phi : U \to A$ de M^p diremos que es *cúbica* si $A = \phi(U)$ es un cubo de $\mathbb{R}^p$, o sea un subconjunto de la forma $\{(x^1, \ldots, x^p) \in \mathbb{R}^p \; : \; |x^i - c^i| < l^i, \, i = 1, \ldots, p\}$, donde $c = (c^1, \ldots, c^p)$ es el centro del cubo y $2\, l^i$ es el lado del cubo paralelo al eje i. Si $c = 0$ y $\phi(m_0) = 0$, decimos que la carta es *cúbica centrada en* m_0. Es inmediato probar que si $\phi : U \to A$ es una carta alrededor de un punto m, podemos obtener a partir de ϕ una carta cúbica centrada en m mediante ϕ seguida de una traslación y de una reducción de su dominio. Aplicaremos esa técnica en el Teorema que sigue.

Teorema 3.3. *(Teorema del rango constante) Sea $f : M^p \to N^q$ una aplicación diferenciable entre variedades, cuyo rango se supone constante e igual a k. Entonces, si $m_0 \in M$, existen cartas de M y N, $\phi : U \to A$, $\psi : V \to B$ centradas en m_0 y en $f(m_0)$ respectivamente, tales que ϕ es cúbica, $f(U) \subset V$, $\psi(f(U)) = \{(t^1, \ldots, t^k, 0, \ldots, 0) \in B\}$, y $(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(t^1, \ldots, t^p) = (t^1, \ldots, t^k, 0, \ldots, 0)$ para todo $(t^1, \ldots, t^p) \in A$.*

Demostración. Sea $\tau : V \to C$ una carta cúbica de N centrada en $f(m_0)$ y supongamos que C es un cubo de lado $2L$. Por ser f_{*m_0} de rango k, también $f^*_{m_0} : T^*_{f(m_0)}N \to T^*_{m_0}M$ es de rango k. Las $d\tau^j_{f(m_0)}$, $j = 1, \ldots, q$, constituyen una base de $T^*_{f(m_0)}N$ y además se cumple $f^*_{m_0}(d\tau^j_{f(m_0)}) = d(\tau^j \circ f)_{m_0}$. Así pues, la dimensión del espacio generado por las $d(\tau^j \circ f)_{m_0}$, $j = 1, \ldots, q$, ha de ser k. En consecuencia, entre las $d(\tau^j \circ f)_{m_0}$ hay k linealmente independientes, que podemos suponer sin pérdida de generalidad son las k primeras. Por el Lema, existe una carta $\mu : U_0 \to A_0$ de M tal que $\mu^1 = \tau^1 \circ f, \ldots, \mu^k = \tau^k \circ f$, y tal que $f(U_0) \subset V$. Tendremos $\mu^i(m_0) = \tau^i(f(m_0)) = 0$, $i = 1, \ldots, k$. Así, $\mu(m_0)$ es de la forma $a := (0, \ldots, 0, a^{k+1}, \ldots, a^p)$. Sea t_{-a} la traslación de $\mathbb{R}^p$ determinada por $-a$, y pongamos $\phi = t_{-a} \circ \mu$. Entonces $\phi(m_0) = 0$, y $\phi^i = \tau^i \circ f,\ i = 1, \ldots, k$, como se comprueba fácilmente. Sea $A \subset t_{-a}(A_0)$ un cubo centrado en el origen, de lado $2l$, y sea $U = \phi^{-1}(A)$. Si $(t^1, \ldots, t^p) \in A$, entonces $(\tau \circ f \circ \phi^{-1})(t^1, \ldots, t^p) = (t^1, \ldots, t^k, b^{k+1}, \ldots, b^q) \in C$, donde las b^j serán ciertos números que dependerán de las coordenadas t^i, para $i = 1 \ldots, p$. En particular, vemos que $l \leq L$. Así, podemos reducir C para formar un cubo (realmente un paralelepípedo) con lados $2l$ en las k primeras coordenadas y de lados $2L$ en las $q - k$ últimas, cubo al que seguiremos llamando C.

Llamemos $\tilde{f} = \tau \circ f \circ \phi^{-1} : A \to C$, que es f vista a través de las cartas τ y ϕ. Escribimos el resultado anterior como $\tilde{f}(t^1, \ldots, t^p) = (t^1, \ldots, t^k, \tilde{f}^{k+1}(t^1, \ldots, t^p), \ldots, \tilde{f}^q(t^1, \ldots, t^p))$.

Ahora consideramos la matriz de la aplicación f_* que, como sabemos, está dada por las parciales $\partial(\tau^i \circ f)/\partial\phi^j = (\partial\tilde{f}^i/\partial r^j) \circ \phi$. Si $i \leq k$, se tiene $(\partial\tilde{f}^i/\partial r^j) \circ \phi = \partial(\tau^i \circ f)/\partial\phi^j = \partial\phi^i/\partial\phi^j = \delta^i_j$. Como por hipótesis el rango de esa matriz es k en todo punto, podemos asegurar que $\partial\tilde{f}^i/\partial r^j = 0,\ i, j > k$. Eso quiere decir que las últimas $q - k$ componentes $\tilde{f}^i$ de $\tilde{f}$ no dependen de las últimas $p - k$ coordenadas r^j. Como, según hemos visto, tampoco las k primeras dependen, tenemos que ninguna de las componentes $\tilde{f}^i,\ i = 1, \ldots, q$, depende de las coordenadas $r^{k+1}, \ldots, r^p$. Es decir $\tilde{f}$ no depende de las coordenadas $r^{k+1}, \ldots, r^p$. Podemos escribir, pues;

$$\tilde{f}(t^1, \ldots, t^p) = (t^1, \ldots, t^k, \tilde{f}^{k+1}(t^1, \ldots, t^k), \ldots, \tilde{f}^q(t^1, \ldots, t^k)).$$

Además, como τ es una carta centrada en $f(m_0)$, tendremos $\tilde{f}^j(0, \ldots, 0) = 0,\ j = k + 1, \ldots, q$. En la figura se han representado esas propiedades dibujando, como un trazo en $\mathbb{R}^q$ que pasa por el origen, la imagen de A por $\tilde{f}$.

Sea $W = \{(t^1, \ldots, t^q) \in \mathbb{R}^q\ :\ |t^i| < l, i = 1, \ldots, k\}$. Definimos la aplicación $j : W \to W$ mediante

$$j(t^1, \ldots, t^q) = (t^1, \ldots, t^q) - (0, \ldots, 0, \tilde{f}^{k+1}(t^1, \ldots, t^k), \ldots, \tilde{f}^q(t^1, \ldots, t^k)),$$

que es evidentemente diferenciable y tiene como inversa la aplicación diferenciable $h : W \to W$ dada por

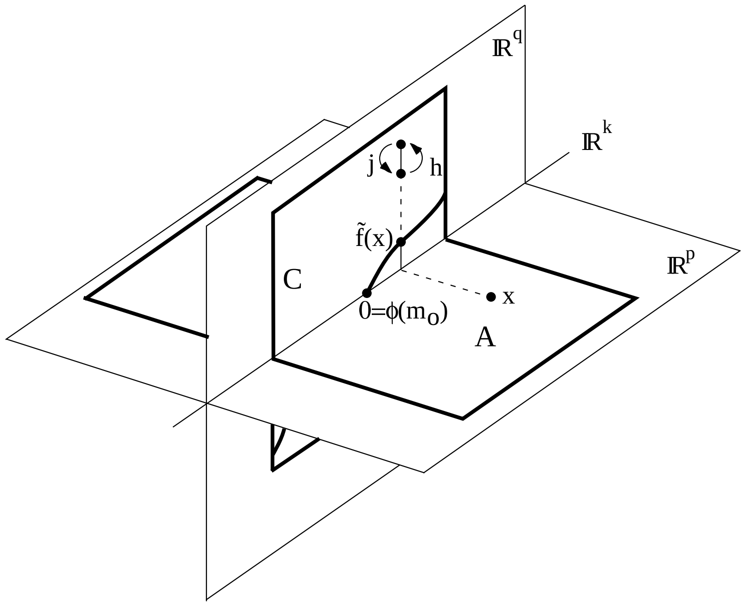
$$h(t^1, \ldots, t^q) = (t^1, \ldots, t^q) + (0, \ldots, 0, \tilde{f}^{k+1}(t^1, \ldots, t^k), \ldots, \tilde{f}^q(t^1, \ldots, t^k)).$$

Por tanto, j es un difeomorfismo. Construimos la carta $\psi : V \to B := j(C)$ poniendo $\psi = j \circ \tau$. En A se tiene entonces

$$\begin{aligned}
&(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(t^1, \ldots, t^p) = (j \circ \tilde{f})(t^1, \ldots, t^p) = j(t^1, \ldots, t^k, \tilde{f}^{k+1}(t^1, \ldots, t^k), \ldots, \tilde{f}^q(t^1, \ldots, t^k)) \\
&= (t^1, \ldots, t^k, \tilde{f}^{k+1}(t^1, \ldots, t^k), \ldots, \tilde{f}^q(t^1, \ldots, t^k)) - (0, \ldots, 0, \tilde{f}^{k+1}(t^1, \ldots, t^k), \ldots, \tilde{f}^q(t^1, \ldots, t^k)) \\
&= (t^1, \ldots, t^k, 0, \ldots, 0),
\end{aligned}$$

como deseábamos. Obsérvese que se cumple también la otra propiedad, es decir, $\psi(f(U)) = \{(t^1, \ldots, t^k, 0, \ldots, 0) \in B\}$ porque j no altera las primeras k coordenadas. □

Veamos alguna terminología referente a aplicaciones diferenciables de rango constante. Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable; decimos que f es una *inmersión* de M en N si f_{*m} es inyectiva para todo $m \in M$, o equivalentemente si el rango de f es constante e igual a $\dim M$; que es una *subvariedad* de N si es una inmersión y además f es inyectiva;



que es una *subvariedad regular* si es una subvariedad y para todo abierto U de M, $f(U)$ es un abierto de $f(M)$ con la topología relativa, o sea existe un abierto V de N tal que $f(U) = V \cap f(M)$; que es una *sumersión* si f_{*m} es suprayectiva para todo $m \in M$, o sea si f es de rango constante e igual a $\dim N$.

Si $\phi : M \to N$ es una inmersión (respectivamente, subvariedad, subvariedad regular, sumersión) entonces $\phi_* : TM \to TN$ es también una inmersión (resp., subvariedad, subvariedad regular, sumersión).

Ejercicio 3.4. Demostrar, utilizando el Teorema del rango constante, que si $\phi : M \to N$ es una inmersión (resp., subvariedad, sumersión) entonces $\phi_* : TM \to TN$ es también una inmersión (resp., subvariedad, sumersión). La prueba para el caso de subvariedad regular es algo más complicada.

Ejercicio 3.5. Supóngase que, en el enunciado del Teorema del rango constante, la aplicación f fuera una sumersión. Probar que las cartas $\phi : U \to A$, $\psi : V \to B$ satisfacen automáticamente $f(U) = V$, no sólo $f(U) \subset V$.

3.2 Subvariedades

Antes de probar el Teorema de la función implícita en variedades, daremos algunos resultados sin demostración. Esta se puede encontrar en el libro de Warner.

Proposición 3.6. *Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable, $\phi : P \to N$ una inmersión y $g : M \to P$ una aplicación tal que $f = \phi \circ g$. Se tiene: (a) Si g es continua, entonces es diferenciable. (b) Si ϕ es una subvariedad regular, entonces g es continua (y por tanto, diferenciable).*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & N \\ & P \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

El siguiente Teorema depende esencialmente de que la variedad M tenga una base numerable para su topología.

Teorema 3.7. *Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable, biyectiva y tal que $f_* : TM \to TN$ es inyectiva. Entonces, f es un difeomorfismo.*

Teorema 3.8. *(Teorema de la función implícita) Sea $f : M^c \to N^d$ una aplicación diferenciable, $n \in N$, $P := f^{-1}(\{n\}) \neq \emptyset$ y supongamos que $f_{*m} : T_mM \to T_{f(m)}N$ es suprayectiva para todo $m \in P$. Entonces P tiene una única estructura diferenciable tal que la inclusión $i : P \to M$ es una subvariedad regular de M y $\dim P = c - d$.*

Demostración. Sea (V, ψ) una carta centrada en n. Si $m \in P$, o sea $f(m) = n$, tenemos que f_{*m} es suprayectiva. Por tanto, f^*_m es inyectiva. Consideramos las funciones diferenciables $\psi^1 \circ f, \ldots, \psi^d \circ f : f^{-1}(V) \to \mathbb{R}$. Como las $d\psi^i_n, i = 1, \ldots, d$, son una base de T^*_nN tenemos que $d(\psi^i \circ f)_m = f^*_m(d\psi^i_n),\ i = 1, \ldots, d$, es un conjunto linealmente independiente. Por el Lema, existe una carta $\phi_m : U_m \to A_m$, que podemos considerar cúbica y centrada en m, tal que $f(U_m) \subset V$, y que $\phi^1_m = \psi^1 \circ f, \ldots, \phi^d_m = \psi^d \circ f$.

Veamos que $P \cap U_m = \{m' \in U_m : \phi^i_m(m') = 0,\ i = 1, \ldots, d\}$. Por una parte, si $m' \in P \cap U_m$, tendremos $\phi^i_m(m') = \psi^i(f(m')) = \psi^i(n) = 0,\ i = 1, \ldots, d$, porque ψ está centrada en n. Y si $m' \in U_m$ cumple $\phi^i_m(m') = 0$, $i = 1, \ldots, d$, entonces

$$\psi(f(m')) = \big((\psi^1 \circ f)(m'), \ldots, (\psi^d \circ f)(m')\big) = (\phi^1_m(m'), \ldots, \phi^d_m(m')) = 0,$$

de donde $f(m') = n$ y así $m' \in P$, como queríamos.

Ahora estamos en condiciones de construir el atlas de P. Está constituido por la familia de aplicaciones $\{\psi_m : V_m \to B_m\}_{m \in M}$, donde $V_m = P \cap U_m$, $\quad B_m = \mathbb{R}^{c-d} \cap A_m$, y donde $\psi_m = \phi_m\big|_{V_m}$.

Es claro que las aplicaciones ψ_m son biyectivas. Si $m' \in P$, tendremos $\psi_m(V_m \cap V_{m'}) = \phi_m(P \cap U_m \cap U_{m'}) = \mathbb{R}^{c-d} \cap \phi_m(U_m \cap U_{m'})$, que es abierto de $\mathbb{R}^{c-d}$. La inversa de ψ_m viene dada por $\psi_m^{-1} = \phi_m^{-1} \circ i_m$, donde $i_m : B_m = \mathbb{R}^{c-d} \cap A_m \to A_m$ es la inclusión. Así, $\psi_{m'} \circ \psi_m^{-1} = \phi_{m'} \circ \phi_m^{-1} \circ i_m$, que es diferenciable. Esas cartas forman, pues, un atlas de P.

Veamos finalmente que $i : P \to M$ con la estructura diferenciable de P definida por ese atlas, es una subvariedad regular de M. La inclusión es evidentemente inyectiva. Además, si $m \in P$, consideramos las cartas $\psi_m : V_m \to B_m$ alrededor de m en P y $\phi_m : U_m \to A_m$ alrededor de $i(m) = m$ en M. Claramente se tiene $i(V_m) \subset U_m$, y $\phi_m \circ i \circ \psi_m^{-1} = \phi_m \circ i \circ \phi_m^{-1} \circ i_m = i_m$, que es diferenciable y tiene rango $c - d$. Por ello, i es diferenciable, inyectiva y de rango $c - d$, es decir es una subvariedad. Si O es un abierto de P, será una unión de abiertos de la forma $\psi_m^{-1}(O' \cap B_m)$, donde O' es un abierto de $\mathbb{R}^{c-d}$. Se tiene $O' \cap B_m = (O' \times \mathbb{R}^d) \cap B_m$, y así $\psi_m^{-1}(O' \cap B_m) = \phi_m^{-1}(B_m) \cap \phi_m^{-1}(O' \times \mathbb{R}^d) = P \cap U_m \cap \phi_m^{-1}(O' \times \mathbb{R}^d) = P \cap \phi_m^{-1}(O' \times \mathbb{R}^d)$, que es un abierto de P con la topología relativa. Por ser O unión de subconjuntos de ese tipo, tenemos que es un abierto de la topología relativa, y así $i : P \to M$ es subvariedad regular.

Falta probar la unicidad. Llamemos E a la estructura diferenciable de P que acabamos de definir mediante ese atlas, y supongamos que existiera otra, E', que cumpla las mismas condiciones. Es decir, que $i : P \to M$ es una subvariedad regular cuando para P utilizamos el atlas de E'. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo, donde (P, E), (P, E') designan a P dotada de uno u otro atlas E o E', respectivamente:

$$\begin{tikzcd}
(P,E) \arrow[dd, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "i"] & \\
& M \\
(P,E') \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Podemos aplicar a este diagrama la Proposición 3.6, tanto si ponemos la flecha de la identidad hacia arriba como hacia abajo, de donde deducimos que la identidad es un difeomorfismo, o sea ambos atlas tienen cartas compatibles y definen la misma estructura diferenciable para P.

$\square$

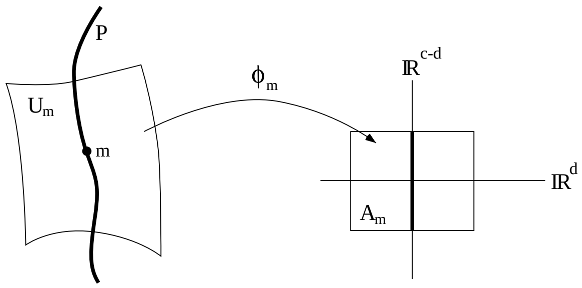


Figura 3.1:

Es muy conveniente saber caracterizar el espacio tangente a P en un punto $p \in P$. Sea $X \in T_pP$. Entonces existe una curva $\alpha :]a, b[\to P$ tal que $0 \in]a, b[$, $\alpha'(0) = X$. Tendremos entonces $f \circ i \circ \alpha = n$, que es constante. Por tanto $(f \circ i \circ \alpha)'(0) = f_{*p}(i_{*p}X) = 0$, es decir $i_{*p}X \in \ker f_{*p}$, o sea $i_{*p}(T_pP) \subset \ker f_{*p}$. Como por otra parte i_{*p} es inyectiva, tenemos $\dim i_{*p}(T_pP) = \dim T_pP = \dim P = c - d = \dim T_pM - \text{rango}(f_{*p}) = \dim \ker f_{*p}$. Se concluye que $i_{*p}(T_pP) = \ker f_{*p}$. que es la caracterización buscada.

Habitualmente, se considera $i_{*p} : T_pP \to T_pM$ como la inclusión, es decir se considera T_pP como un subespacio vectorial de T_pM. En efecto, si $\alpha \in \text{Curvas}(P, p)$ define $X = p(\alpha) \in T_pP$, la propia curva α se puede considerar como una curva en M, es decir α, o mejor aún $i \circ \alpha$, es una curva de $\text{Curvas}(M, p)$ que define un vector tangente a M en p, que estrictamente hablando se ha de escribir $i_{*p}X$. Además, si h es una función diferenciable en un entorno de p en M, se tiene $i_{*p}X(h) = (h \circ i \circ \alpha)'(0) = ((h \circ i) \circ \alpha)'(0) = X(h \circ i) = X(h\big|_P)$, con lo cual la acción de $i_{*p}X$ sobre la función h es la misma que la de X sobre la restricción de h a P. En otras palabras, considerar T_pP como un subespacio de T_pM no da origen a inconsistencias.

3.2.1 Ejemplos

Una curva regular en $\mathbb{R}^2$ es una inmersión, porque si esa curva es $\alpha :]a, b[\to \mathbb{R}^2$, entonces $\alpha_*(\theta(t_0)) = \alpha'(t_0) \neq 0$. Si además la curva es simple, tendremos un ejemplo de subvariedad. Hablando sin rigor, para que además la curva fuera una subvariedad regular sería preciso poder envolverla en un entorno abierto (un "tubo") cuya intersección con la curva sea solamente el "alma" del tubo (figura 3).

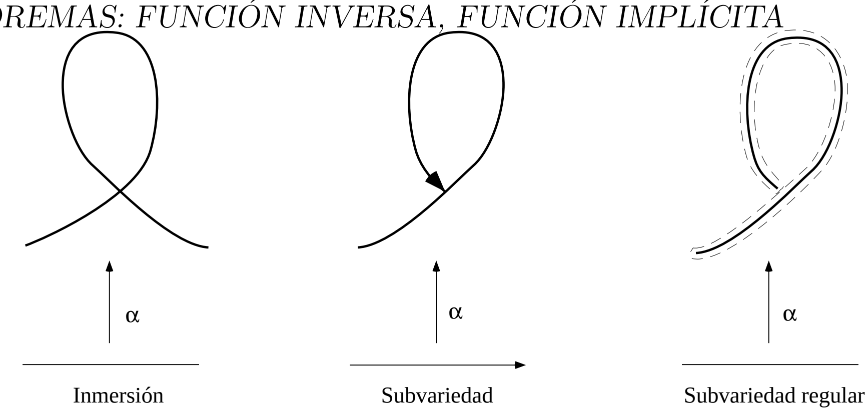


Figura 3.2:

Una superficie parametrizada es una aplicación diferenciable $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$, tal que $d\mathbf{x}_q$ es inyectiva para todo $q \in U$, siendo U un abierto de $\mathbb{R}^2$. Entonces, $\mathbf{x}$ es una inmersión, puesto que $d\mathbf{x}_q$ es precisamente la notación que en Análisis corresponde a la notación $\mathbf{x}_{*q}$ empleada en variedades diferenciables. Una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^3$. O más bien, según nuestra terminología, la inclusión $i : S \to \mathbb{R}^3$ es una subvariedad regular.

Veamos ahora un ejemplo muy diferente. Sean M^c, N^d variedades diferenciables y consideremos las proyecciones naturales $\pi_1 : M \times N \to M$, $\pi_2 : M \times N \to N$, que son, como sabemos, diferenciables. Definimos una aplicación $u : T(M \times N) \to TM \times TN$ mediante $u(X) = (\pi_{1*}(X), \pi_{2*}(X))$. Así, $u = (\pi_{1*}, \pi_{2*})$, con lo cual es diferenciable.

Esta aplicación u es un difeomorfismo que tiene como inverso la aplicación $v : TM \times TN \to T(M \times N)$ definida mediante $v(p(\alpha), p(\beta)) = p(\alpha, \beta)$, siendo $\alpha \in \text{Curvas}(M, m)$, $\beta \in \text{Curvas}(N, n)$, $(\alpha, \beta)(t) = (\alpha(t), \beta(t))$. Esta aplicación está bien definida, es decir no depende de los representantes, como se demuestra fácilmente derivando una función cualquiera de $\mathcal{F}\big((m, n)\big)$. Mediante ese difeomorfismo u, y su inverso v, suele identificarse $T(M \times N)$ con $TM \times TN$.

Prueba de que u es un difeomorfismo. Sean $\phi : U \to A$, $\psi : V \to B$ cartas de M y N respectivamente y sean $\tilde{\phi}$, $\tilde{\psi}$ las cartas inducidas para TM y TN, $\phi \times \psi$, $\widetilde{\phi \times \psi}$ las inducidas para $M \times N$ y $T(M \times N)$. La composición $(\tilde{\phi} \times \tilde{\psi}) \circ u \circ (\widetilde{\phi \times \psi})^{-1}$ está definida en el abierto $A \times B \times \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^d$ y se tiene

$$
\begin{aligned}
&(\tilde{\phi} \times \tilde{\psi}) \circ u \circ (\widetilde{\phi \times \psi})^{-1} = (\tilde{\phi} \times \tilde{\psi}) \circ u \circ (\phi \times \psi)_*^{-1} \circ \widetilde{\mathrm{id}}^{-1} = (\tilde{\phi} \times \tilde{\psi}) \circ \big(\pi_{1*} \circ (\phi \times \psi)_*^{-1}, \pi_{2*} \circ (\phi \times \psi)_*^{-1}\big) \circ \widetilde{\mathrm{id}}^{-1} = \\
&(\tilde{\phi} \times \tilde{\psi}) \circ \big((\pi_1 \circ (\phi \times \psi)^{-1})_*, (\pi_2 \circ (\phi \times \psi)^{-1})_*\big) \circ \widetilde{\mathrm{id}}^{-1} = (\tilde{\phi} \times \tilde{\psi}) \circ (\phi_*^{-1} \circ \pi_{1*}, \psi_*^{-1} \circ \pi_{2*}) \circ \widetilde{\mathrm{id}}^{-1} = \\
&(\widetilde{\mathrm{id}} \circ \phi_* \times \widetilde{\mathrm{id}} \circ \psi_*) \circ (\phi_*^{-1} \circ \pi_{1*}, \psi_*^{-1} \circ \pi_{2*}) \circ \widetilde{\mathrm{id}}^{-1} = (\widetilde{\mathrm{id}} \circ \pi_{1*}, \widetilde{\mathrm{id}} \circ \pi_{2*}) \circ \widetilde{\mathrm{id}}^{-1}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, si $(p, q, t^1, \ldots, t^{c+d})$ pertenece al dominio de esa aplicación, tendremos que ese punto es enviado a

$$
(\widetilde{\mathrm{id}} \circ \pi_{1*}, \widetilde{\mathrm{id}} \circ \pi_{2*}) \left(\sum_{i=1}^{c+d} t^i \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{(p,q)} \right) = \left(\widetilde{\mathrm{id}} \left(\sum_{i=1}^{c} t^i \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_p \right), \widetilde{\mathrm{id}} \left(\sum_{i=1}^{d} t^{c+i} \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_q \right) \right) = (p, t^1, \ldots, t^c, q, t^{c+1}, \ldots, t^{c+d}),
$$

porque, como se puede ver fácilmente, se tiene $\pi_{1*} \frac{\partial}{\partial r^i}|_{(p,q)} = \frac{\partial}{\partial r^i}|_p$ si $1 \leq i \leq c$, y es cero si $i > c$; y un resultado análogo vale para la actuación de π_{2*}.

Concluimos que $(\tilde{\phi} \times \tilde{\psi}) \circ u \circ (\widetilde{\phi \times \psi})^{-1}$ es un difeomorfismo, con lo cual u es un difeomorfismo local. Pero u es biyectiva, ya que $(v \circ u)(p(\gamma)) = v(p(\pi_1 \circ \gamma), p(\pi_2 \circ \gamma)) = p(\pi_1 \circ \gamma, \pi_2 \circ \gamma) = p(\gamma)$, y $(u \circ v)(p(\alpha), p(\beta)) = u(p(\alpha, \beta)) = (p(\pi_1 \circ (\alpha, \beta)), p(\pi_2 \circ (\alpha, \beta))) = (p(\alpha), p(\beta))$, de modo que $u \circ v = \mathrm{id}$, $v \circ u = \mathrm{id}$. Por tanto, u es un difeomorfismo local biyectivo y así es un difeomorfismo.

Ejercicio 3.9.

1. Sea $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$ y consideremos la aplicación $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(u, v, w) = (v^2 - w^2, u^2 - v^2)$. Probar que $\phi^{-1}(S^1)$ con la inclusión es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^3$ (utilícese el Teorema de la función implícita).

2. Comprobar que la aplicación $v : TM \times TN \to T(M \times N)$ está bien definida. Comprobar también que $\pi_{1*}\frac{\partial}{\partial r^i}|_{(p,q)} = \frac{\partial}{\partial r^i}|_p$ si $1 \leq i \leq c$, y es cero si $i > c$; y el resultado análogo para la actuación de π_{2*}.

3.3 Sumersiones

Así como las inmersiones más sencillas son las aplicaciones de $\mathbb{R}^p$ en $\mathbb{R}^q$, $p \leq q$, dadas mediante $(x^1, \ldots, x^p) \mapsto (x^1, \ldots, x^p, 0, \ldots, 0)$, las sumersiones más sencillas son las "proyecciones" de $\mathbb{R}^q$ en $\mathbb{R}^p$ dadas por $(x^1, \ldots, x^q) \mapsto (x^1, \ldots, x^p)$.

Otro ejemplo importante de sumersión es la aplicación $\pi : TM \to M$.

La propiedad más utilizada de las sumersiones es que admiten secciones locales. Veamos qué es eso. Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable. Si $V \subset N$ es abierto, llamamos *sección local de f en V* a una aplicación diferenciable $s : V \to M$ tal que $f \circ s = \mathrm{id}$.

Proposición 3.10. *1. La aplicación diferenciable $f : M^c \to N^d$ es una sumersión sii para cada $m \in M$ existe un abierto $V \subset N$ y una sección local de f en V, $s : V \to M$, tal que $m \in s(V)$ (o sea, "que pasa por m").*

2. Sea $f : M \to N$ una sumersión suprayectiva y $g : N \to P$ una aplicación tal que $g \circ f$ es diferenciable. Entonces g es diferenciable.

Demostración. (1) La condición es suficiente porque dado $m \in M$, si s es la sección descrita en el enunciado, existe $n \in V$ tal que $s(n) = m$ y tendremos $(f \circ s)_{*n} = f_{*m} \circ s_{*n} = \mathrm{id}_{*n} = \mathrm{id}$. Como id es suprayectiva, tiene que serlo f_{*m}. Como esto vale para todo $m \in M$, concluimos que f es sumersión.

Veamos que también es necesaria. Por el Teorema del rango constante, existen cartas (U, ϕ), (V, ψ) cúbicas centradas en m y en $f(m)$ respectivamente tales que $f(U) = V$ y que $(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(x^1, \ldots, x^c) = (x^1, \ldots, x^d)$. La sección buscada $s : V \to M$ viene dada por $s(n) = \phi^{-1}(\psi^1(n), \ldots, \psi^d(n), 0, \ldots, 0)$, para $n \in V$, ya que evidentemente s es diferenciable y se tiene $(f \circ s)(n) = (\psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1})(\psi^1(n), \ldots, \psi^d(n), 0, \ldots, 0) = \psi^{-1}(\psi^1(n), \ldots, \psi^d(n)) = (\psi^{-1} \circ \psi)(n) = n$. Además, $s(f(m)) = \phi^{-1}(0, \ldots, 0) = m$.

(2) Sea $n \in N$. Por ser f suprayectiva, existe $m \in M$ tal que $f(m) = n$ y por tanto existe una sección local s de f en un entorno abierto V de n. En V se tiene $g|_V = g \circ (f \circ s) = (g \circ f) \circ s$, que es diferenciable. Por tanto, g es diferenciable en V y se concluye que lo es en todo N puesto que n es arbitrario. $\square$

Ejercicio 3.11. 1. Llamemos *fibra sobre $n \in N$* al subconjunto $f^{-1}(\{n\}) \subset M$, siendo $f : M \to N$ una sumersión. Demuestra mediante el Teorema de la función implícita que las fibras de una sumersión son subvariedades regulares.

2. Toda sección local de una sumersión es una subvariedad regular.

3.4 Subgrupos de Lie

Si $\phi : H \to G$ es una aplicación diferenciable entre dos grupos de Lie, decimos que es un *homomorfismo de grupos de Lie* si además es un homomorfismo de grupos. Así, un homomorfismo de grupos de Lie aplica el neutro en el neutro.

Un homomorfismo de grupos de Lie es una aplicación de rango constante. En efecto, sea e el neutro de H (y de G, si no hay confusión), y supongamos que la aplicación $\phi_{*e} : T_eH \to T_eG$ tiene rango k. Si $h, h' \in H$, tenemos $(\phi \circ \lambda_h)(h') = \phi(hh') = \phi(h)\phi(h') = (\lambda_{\phi(h)} \circ \phi)(h')$, es decir $\phi \circ \lambda_h = \lambda_{\phi(h)} \circ \phi$, con lo cual $\phi = \lambda_{\phi(h)} \circ \phi \circ \lambda_{h^{-1}}$. Entonces

$$\phi_{*h} = (\lambda_{\phi(h)})_{*_e} \circ \phi_{*e} \circ (\lambda_{h^{-1}})_{*h}.$$

Como las traslaciones a la izquierda son difeomorfismos, sus diferenciales en cada punto son isomorfismos. Por tanto el rango de ϕ_{*h} es también k.

Definición 3.12. Un homomorfismo de grupos de Lie $\phi : H \to G$ que es además una subvariedad recibe el nombre de *subgrupo de Lie*.

Evidentemente, si $\phi : H \to G$ es un subgrupo de Lie, el subconjunto $\phi(H)$ es un subgrupo de G. Un Teorema muy importante, que no probaremos (la demostración está en el libro de Warner), es el siguiente:

Teorema 3.13. *Sea G un grupo de Lie y sea $H \subset G$ un subgrupo que es un subconjunto cerrado de G. Entonces, H admite una única estructura diferenciable que lo convierte en grupo de Lie, y tal que $i : H \to G$ es un subgrupo de Lie. Más aún, $i : H \to G$ es una subvariedad regular.*

Esto permite comprobar rápidamente que los grupos de Lie "clásicos" son efectivamente grupos de Lie. Todos ellos son subgrupos cerrados del grupo general lineal $Gl(n;\mathbb{R})$.

Se describen a continuación algunos ejemplos de grupos de Lie clásicos. En la descripción, se entiende que los vectores X, Y son cualesquiera y vienen dados por $(x^1, x^2, \dots)$, $(y^1, y^2, \dots)$, respectivamente.

1. $Gl(n:\mathbb{R})$, *grupo general lineal*, el grupo de isomorfismos de $\mathbb{R}^n$.

2. $Sl(n;\mathbb{R})$, *grupo lineal especial*, el grupo de isomorfismos de $\mathbb{R}^n$ cuyo determinante es igual a 1.

3. $O(n)$, *grupo ortogonal,* el grupo de los isomorfismos f de $\mathbb{R}^n$ para los cuales $g(f(X), f(Y)) = g(X, Y)$, siendo $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ el producto escalar euclídeo, o sea dado por $g(X, Y) = x^1y^1 + \cdots + x^ny^n$. Se dice que f deja invariante g.

4. $SO(n) = O(n) \cap Sl(n;\mathbb{R})$, *grupo ortogonal especial.*

5. $O(p, q)$, el grupo de isomorfismos f de $\mathbb{R}^n$, siendo $n = p + q$, que dejan invariante $g(X, Y) = -x^1y^1 - \cdots - x^py^p + x^{p+1}y^{p+1} + \cdots + x^ny^n$.

6. $SO(p, q) = O(p, q) \cap Sl(p + q;\mathbb{R})$.

7. $Sp(n;\mathbb{R})$, *grupo simpléctico*, el grupo de isomorfismos f de $\mathbb{R}^{2n}$ que dejan invariante $g(X, Y) = x^1y^{n+1} - y^1x^{n+1} + \cdots + x^ny^{2n} - y^nx^{2n}$.

El grupo simpléctico tiene mucha importancia en Mecánica teórica. Los grupos (4) y (5), concretamente $O(1, 3)$ y $SO(1, 3)$, se emplean en Relatividad. Los demás son de uso común en muchas ramas de la Matemática.

Tema 4

Campos vectoriales

4.1 Concepto de campo vectorial

La palabra campo, al hablar de campo vectorial o campo de vectores, se utiliza en un sentido análogo al que tiene al hablar de un campo de hierba: en cada punto del suelo nace una brizna de hierba. Un campo de vectores, definido en una variedad diferenciable M, consiste en fijar un vector $X(m)$, tangente a M en m, para cada punto m de M.

Definición 4.1. Un *campo vectorial (diferenciable) en la variedad diferenciable* M es una aplicación diferenciable $X : M \to TM$ tal que $\pi \circ X = \mathrm{id}$.

La condición $\pi \circ X = \mathrm{id}$ permite definir de modo equivalente un campo vectorial como una sección (diferenciable) de $\pi : TM \to M$. Esa condición no dice otra cosa que para cada $m \in M$ se tiene $X(m) \in T_m M$. Muchas veces omitiremos el adjetivo diferenciable, aunque se sobreentenderá. Para evitar un excesivo número de paréntesis, suele utilizarse también la notación $X_m := X(m)$.

Veamos en qué consiste la condición de diferenciabilidad. Esa condición se puede reducir a la comprobación de que, para cualquier carta $\phi : U \to A$ de M, se tiene que el dominio de $\tilde{\phi} \circ X \circ \phi^{-1}$ es abierto y que en ese dominio esa composición es diferenciable. Se entiende que $\tilde{\phi} : \pi^{-1}(U) \to A \times \mathbb{R}^c$, siendo $c = \dim M$, es la carta dada por

$$\tilde{\phi}(v) = \big(\phi(\pi(v)), v(\phi^1), \dots, v(\phi^c)\big), \qquad v \in \pi^{-1}(U).$$

Consideremos, para cada $m \in U$, las componentes de X_m en la base $(\partial/\partial\phi^1|_m, \dots, \partial/\partial\phi^c|_m)$ de $T_m M$. Denotamos esas componentes mediante $X^i(m), i = 1, \dots, c$. Como sabemos, vienen dadas por $X^i(m) = X_m(\phi^i)$. Tenemos, pues

$$X_m = X^i(m) \frac{\partial}{\partial \phi^i}\Big|_m,$$

lo que define funciones $X^i : U \to \mathbb{R}$ cuyo valor en $m \in U$ es $X^i(m)$. Esas funciones reciben el nombre de *componentes de* X *en la carta* ϕ.

Pues bien, el dominio de $\tilde{\phi} \circ X \circ \phi^{-1}$ es $\phi(U \cap X^{-1}(\pi^{-1}(U))) = \phi(U \cap (\pi \circ X)^{-1}(U)) =$

$\phi(U) = A$, que es abierto por ser ϕ una carta. Ahora, en A tenemos:

$$\begin{aligned}(\tilde{\phi} \circ X \circ \phi^{-1})(t^1, \ldots, t^c) &= \tilde{\phi}\big(X(\phi^{-1}(t^1, \ldots, t^c))\big) \\ &= \tilde{\phi}\left(X^i(\phi^{-1}(t^1, \ldots, t^c)) \frac{\partial}{\partial \phi^i}\Big|_{\phi^{-1}(t^1, \ldots, t^c)}\right) \\ &= \Big(t^1, \ldots, t^c, (X^1 \circ \phi^{-1})(t^1, \ldots, t^c), \ldots, (X^c \circ \phi^{-1})(t^1, \ldots, t^c)\Big).\end{aligned}$$

Esta aplicación es diferenciable sii cada una de las aplicaciones

$$(t^1, \ldots, t^c) \mapsto (X^i \circ \phi^{-1})(t^1, \ldots, t^c), \quad i = 1, \ldots, c,$$

es diferenciable, o sea, si las aplicaciones $X^i \circ \phi^{-1} : A \to \mathbb{R}$ son diferenciables. Recordando la definición de diferenciabilidad, vemos que X es diferenciable sii para cada carta de M, las componentes de X en esa carta son funciones diferenciables.

El conjunto $\mathfrak{X}(M)$ de los campos vectoriales diferenciables en M forma un $C^\infty(M)$-módulo. En efecto, si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ son dos de esos campos y $h, g \in C^\infty(M)$ son dos funciones diferenciables en M, la aplicación $hX + gY : M \to TM$ definida por $(hX + gY)(m) = h(m)X(m) + g(m)Y(m)$ es claramente un nuevo campo vectorial diferenciable en M. También se puede considerar $\mathfrak{X}(M)$ como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, como es obvio.

Si, como antes, $\phi : U \to A$ es una carta de M, podemos definir los *campos vectoriales coordenados en* U:

$$\frac{\partial}{\partial \phi^i} : U \to TU, \qquad \frac{\partial}{\partial \phi^i}(m) := \frac{\partial}{\partial \phi^i}\Big|_m.$$

Así, tendremos

$$X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial \phi^i},$$

donde $X^i : U \to \mathbb{R}$ son las componentes del campo vectorial X en la carta ϕ, como antes se ha dicho.

4.2 Corchete de Lie

La propia definición de vector tangente incluye el concepto de derivación. Hemos caracterizado, en efecto, los vectores tangentes en un punto como derivadas direccionales de las funciones diferenciables definidas en los alrededores de ese punto. Se puede extender esto para obtener una función que es la derivada de otra respecto a un campo vectorial. Sea $h \in C^\infty(M)$ una función diferenciable en M y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Definimos la función $X(h) \in C^\infty(M)$ mediante $X(h)(m) = X_m(h)$ (ahora se explica mejor el uso de la notación X_m, con objeto de evitar ambigüedades y excesivo número de paréntesis). Si $h, g \in C^\infty(M)$, se tiene evidentemente $X(h + g) = X(h) + X(g)$ y $X(hg) = hX(g) + gX(h)$.

Si (U, ϕ) es una carta en la que $X|_U = X^i \partial/\partial\phi^i$, tendremos

$$X(h)|_U = X^i \frac{\partial h}{\partial \phi^i}.$$

Cuando se estudian las derivadas parciales, se demuestra en Análisis el Teorema de Schwartz de la igualdad de las derivadas cruzadas. Para las derivadas respecto a campos vectoriales las cosas no son tan simples. Empecemos viendo un caso en que se cumple esa igualdad:

Proposición 4.2. *Sea $\phi : U \to A$ una carta de la variedad diferenciable M, y sean $m \in U, h \in C^\infty(U)$. Entonces*

$$\frac{\partial}{\partial\phi^i}\Big|_m \left(\frac{\partial h}{\partial\phi^j}\right) - \frac{\partial}{\partial\phi^j}\Big|_m \left(\frac{\partial h}{\partial\phi^i}\right) = 0.$$

Demostración. Para cualquier $m' \in U$ se tiene

$$\frac{\partial h}{\partial\phi^i}(m') = \frac{\partial(h\circ\phi^{-1})}{\partial r^i}(\phi(m')) = \left(\frac{\partial(h\circ\phi^{-1})}{\partial r^i}\circ\phi\right)(m'),$$

es decir

$$\frac{\partial h}{\partial\phi^i} = \frac{\partial(h\circ\phi^{-1})}{\partial r^i}\circ\phi.$$

Así

$$\frac{\partial}{\partial\phi^i}\Big|_m \left(\frac{\partial h}{\partial\phi^j}\right) = \frac{\partial}{\partial\phi^i}\Big|_m \left(\frac{\partial(h\circ\phi^{-1})}{\partial r^j}\circ\phi\right) = \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\phi(m)} \left(\frac{\partial(h\circ\phi^{-1})}{\partial r^j}\right) = \frac{\partial^2(h\circ\phi^{-1})}{\partial r^i\partial r^j}\Big|_{\phi(m)}$$

Por el Teorema de Schwartz, el último miembro no se altera si se intercambian las derivadas parciales, lo que demuestra la proposición. □

De acuerdo con esto, se suele escribir:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial\phi^i\partial\phi^j} = \frac{\partial}{\partial\phi^i}\left(\frac{\partial h}{\partial\phi^j}\right),$$

Si los dos campos vectoriales no son campos vectoriales coordenados de la misma carta, no se suele cumplir esa igualdad; más bien, la diferencia de las derivadas cruzadas equivale a la derivada respecto a un nuevo campo vectorial, llamado corchete de Lie. Veamos esto.

Proposición 4.3. *Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $m \in M$. Entonces, existe un vector $v_m \in T_mM$ tal que para toda función $h \in \mathcal{F}(m)$ se tiene*

$$X_m(Y(h)) - Y_m(X(h)) = v(h).$$

Demostración. Sean X^i, Y^i las componentes de X, Y en una carta (U,ϕ) tal que $m \in U$. Tenemos, utilizando la proposición anterior:

$$\begin{aligned}
X_m(Y(h)) - Y_m(X(h)) &= X^i(m)\frac{\partial}{\partial\phi^i}\Big|_m\left(Y^j\frac{\partial h}{\partial\phi^j}\right) - Y^i(m)\frac{\partial}{\partial\phi^i}\Big|_m\left(X^j\frac{\partial h}{\partial\phi^j}\right)\\
&= X^i(m)Y^j(m)\frac{\partial^2 h}{\partial\phi^i\partial\phi^j}\Big|_m - Y^i(m)X^j(m)\frac{\partial^2 h}{\partial\phi^i\partial\phi^j}\Big|_m\\
&\quad + \left(X^i(m)\frac{\partial Y^j}{\partial\phi^i}\Big|_m - Y^i(m)\frac{\partial X^j}{\partial\phi^i}\Big|_m\right)\frac{\partial h}{\partial\phi^j}\Big|_m\\
&= \left(X^i(m)\frac{\partial Y^j}{\partial\phi^i}\Big|_m - Y^i(m)\frac{\partial X^j}{\partial\phi^i}\Big|_m\right)\frac{\partial}{\partial\phi^j}\Big|_m(h) = v_m(h),
\end{aligned}$$

donde $v \in \mathfrak{X}(U)$ es el campo vectorial diferenciable dado por

$$v = \left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial\phi^i} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial\phi^i}\right)\frac{\partial}{\partial\phi^j}.$$

□

A ese vector se lo denota como $[X,Y]_m$. Al campo vectorial definido por $m \mapsto [X,Y]_m$ se le da el nombre de *corchete de Lie de X e Y*. De acuerdo con la proposición anterior, dado cualquier punto $m \in M$, existe una carta (U,ϕ) con $m \in U$ y un campo vectorial diferenciable en U que coincide con $[X,Y]$ en U. Esto demuestra que $[X,Y]$ es diferenciable, es decir pertenece a $\mathfrak{X}(M)$. Como consecuencia de la definición, si $h \in C^\infty(M)$, se tiene:

$$[X,Y](h) = X(Y(h)) - Y(X(h)).$$

Proposición 4.4. *1. $\mathfrak{X}(M)$ con el corchete de Lie es un álgebra de Lie.*

2. Si $g,h \in C^\infty(M)$ y $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, se tiene $[gX,hY] = gX(h)Y - hY(g)X + gh[X,Y]$.

Demostración. (1) Que el corchete de Lie constituye a $\mathfrak{X}(M)$ en una $\mathbb{R}$-álgebra es evidente, y es un álgebra de Lie porque cumple las dos propiedades características de este tipo de álgebras, o sea $[X,Y] = -[Y,X]$ (antisimetría) que es evidente, y $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ (identidad de Jacobi) que demostramos a continuación. Sea $h \in C^\infty(M)$. Se tiene:

$$\begin{aligned}[[X,Y],Z](h) &= [X,Y](Z(h)) - Z([X,Y](h)) \\ &= X(Y(Z(h))) - Y(X(Z(h))) - Z(X(Y(h))) + Z(Y(X(h))).\end{aligned}$$

Permutando cíclicamente las letras X,Y,Z y sumando las expresiones correspondientes, se comprueba en seguida que todos los términos se cancelan, como queríamos.

(2) Para toda $u \in C^\infty(M)$, se tiene

$$\begin{aligned}[gX,hY](u) &= gX(hY(u)) - hY(gX(u)) \\ &= gX(h)Y(u) + ghX(Y(u)) - hY(g)X(u) - ghY(X(u)) \\ &= \big(gX(h)Y - hY(g)X + gh[X,Y]\big)(u).\end{aligned}$$

□

4.3 Campos vectoriales relacionados por una aplicación

Ya hemos visto que si $\alpha :]a,b[\to M$ es una curva diferenciable, su tangente en $t_0 \in]a,b[$ es el vector $\alpha'(t_0) := \alpha_{*t_0}(\theta(t_0)) \in T_{\alpha(t_0)}M$. Tenemos así una aplicación $\alpha' :]a,b[\to TM$ tal que $\pi \circ \alpha' = \alpha$, llamada *campo tangente a α*. Así pues, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & TM \arrow[d, "\pi"] \\ ]a,b[\arrow[ur, "\alpha'"] \arrow[r, "\alpha"] & M \end{tikzcd}$$

.

El campo tangente es un ejemplo de un concepto más general, el de campo vectorial a lo largo de una aplicación.

Definición 4.5. Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable. Se llama *campo vectorial a lo largo de f* a una aplicación diferenciable $X : M \to TN$ tal que $\pi \circ X = f$, o sea que hace conmutativo el diagrama siguiente.

$$\begin{tikzcd} & TN \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[ur, "X"] \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Es evidente que los campos vectoriales a lo largo de la aplicación f se pueden sumar entre sí, y se los puede multiplicar por funciones diferenciables en M o por números reales. Como consecuencia, forman un $C^\infty(M)$-módulo o un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Cada campo vectorial $\tilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ define un campo vectorial a lo largo de f mediante la composición $\tilde{Y} \circ f$, ya que evidentemente se tiene $\pi \circ \tilde{Y} \circ f = f$. Por otra parte, si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo vectorial en M, Y define un campo vectorial a lo largo de f mediante la composición $f_* \circ Y : M \to TN$, ya que $\pi \circ f_* \circ Y = f \circ \pi \circ Y = f$. Esto sugiere la siguiente definición.

Definición 4.6. Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable. De un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ y un campo vectorial $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(N)$ se dice que están *f-relacionados* o *relacionados por f* si $f_* \circ X = \tilde{X} \circ f$.

Supongamos que f es una aplicación diferenciable de M en sí misma. Puede entonces ocurrir que el campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ cumpla $f_* \circ X = X \circ f$, o sea que esté f-relacionado consigo mismo. En tal caso, se dice que X es *invariante por f*, o bien que es f-invariante.

Proposición 4.7. *Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$, y supongamos que X está f-relacionado con $\tilde{X}$ y que Y lo está con $\tilde{Y}$. Entonces $[X, Y]$ lo está con $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$.*

Demostración. Sea $m \in M$ y sea $h \in \mathcal{F}(f(m))$. Tendremos

$$(f_* \circ [X, Y])_m(h) = [X, Y]_m(h \circ f) = X_m(Y(h \circ f)) - Y_m(X(h \circ f)).$$

Ahora bien, para cualquier $m' \in M$ tenemos:

$$(Y(h \circ f))(m') = Y_{m'}(h \circ f) = f_{*m'}(Y_{m'})(h) = \tilde{Y}_{f(m')}(h) = (\tilde{Y}(h))(f(m')),$$

de manera que $Y(h \circ f) = \tilde{Y}(h) \circ f$, con lo cual:

$$\begin{aligned} (f_* \circ [X, Y])_m(h) &= X_m(\tilde{Y}(h) \circ f) - Y_m(\tilde{X}(h) \circ f) = \tilde{X}_{f(m)}(\tilde{Y}(h)) - \tilde{Y}_{f(m)}(\tilde{X}(h)) \\ &= [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{f(m)}(h), \end{aligned}$$

de donde se desprende inmediatamente la afirmación. $\square$

Podemos enunciar esto diciendo que el conjunto de los campos vectoriales en M que están f-relacionados con campos vectoriales en N forman una subálgebra de $\mathfrak{X}(M)$.

Ejercicio 4.8. Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable, $n \in N$, $S = f^{-1}(\{n\}) \neq \emptyset$ tales que se cumplen las hipótesis del Teorema de la función implícita, de modo que la inclusión $i : S \to M$ es una subvariedad regular. Sea $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ tal que para todo $p \in S$ se tiene $\tilde{X}_p \in \ker f_{*p}$. Probar que existe un único campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(S)$ tal que $i_* \circ X = \tilde{X} \circ i$.

4.4 Algebra de Lie de un grupo de Lie

Definición 4.9. Sea G un grupo de Lie y $X \in \mathfrak{X}(G)$. Decimos que X es un campo vectorial *invariante a la izquierda* si para todo $s \in G$ se tiene $\lambda_{s*} \circ X = X \circ \lambda_s$. En otras palabras, todas las traslaciones a la izquierda dejan X invariante.

Los campos invariantes a la izquierda forman una subálgebra del álgebra de Lie de los campos vectoriales en un grupo de Lie. Esto procede de una propiedad que ya vimos. En efecto, si X, Y son invariantes a la izquierda, tenemos que, para todo $s \in G$, tanto X como Y están λ_s-relacionados consigo mismos. Por lo tanto también se tiene $\lambda_{s*} \circ [X, Y] = [X, Y] \circ \lambda_s$, de manera que $[X, Y]$ es también invariante a la izquierda. Denotamos por $\mathfrak{g}$ a esta subálgebra de campos invariantes a la izquierda, y la denominamos *álgebra de Lie de G*.

Proposición 4.10. *Sea G un grupo de Lie con neutro e y álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, y denotemos por $\nu : \mathfrak{g} \to T_eG$ la aplicación lineal dada por $\nu(X) = X_e$ (así, ν es la evaluación en e). Entonces, ν es un isomorfismo.*

Demostración. Sean $X \in \mathfrak{g}$, $s \in G$. Entonces, $\lambda_{s*}(\nu(X)) = \lambda_{s*}(X_e) = X(\lambda_s(e)) = X_s$. Por tanto, X queda completamente determinado por $\nu(X)$ y así ν es inyectiva. Sea ahora $y \in T_eG$. Definimos la aplicación $Y : G \to TG$ mediante $Y_s := \lambda_{s*}(y) \in T_sG$. Así, Y es un campo vectorial en G porque $\pi \circ Y = \mathrm{id}$. Hemos de probar que es diferenciable, que es invariante a la izquierda y que $\nu(Y) = y$. Esta última propiedad es trivial porque al ser $\lambda_e = \mathrm{id}$, se tiene también $\lambda_{e*} = \mathrm{id}$. Además, Y es invariante a la izquierda, ya que si $s, t \in G$ tenemos

$$(\lambda_{s*} \circ Y)(t) = \lambda_{s*}(Y_t) = \lambda_{s*}(\lambda_{t*}(y)) = (\lambda_s \circ \lambda_t)_*(y) = \lambda_{st*}(y) = Y_{st} = (Y \circ \lambda_s)(t).$$

Finalmente, Y es diferenciable.

Prueba de que Y es diferenciable. Consideramos las siguientes aplicaciones diferenciables:

1. $j_y : G \to G \times TG$ está dada por $j_y(s) = (s, y)$, donde $y \in T_eG$ es el vector que define Y;
2. $k : G \times TG \to TG \times TG$ viene dada por $k(g, X) = (0, X)$, donde el 0 se entiende que es el 0 de T_gG, es decir, si ponemos $\mathbf{0}$ para denotar el campo vectorial nulo en G tenemos $k = \mathbf{0} \times \mathrm{id}$, y así k es diferenciable;
3. $v : TG \times TG \to T(G \times G)$, que fue definida en el capítulo anterior;
4. $m : G \times G \to G$ es la multiplicación, o sea $m(g, s) = gs$.

Pues bien, sea $\beta \in \mathrm{Curvas}(G, e)$ tal que $p(\beta) = y$. Calculemos la composición $m_* \circ v \circ k \circ j_y$. Se tiene

$$(m_* \circ v \circ k \circ j_y)(s) = (m_* \circ v \circ k)(s, y) = (m_* \circ v)(0, y) = (m_* \circ v)(p(c_s), p(\beta)),$$

siendo c_s la curva constante igual a s. Seguimos:

$$(m_* \circ v)(p(c_s), p(\beta)) = m_*(p(c_s, \beta)) = p(m \circ (c_s, \beta)) = p(\lambda_s \circ \beta) = \lambda_{s*} p(\beta) = \lambda_{s*} y = Y_s.$$

Deducimos que $Y = m_* \circ v \circ k \circ j_y$, y así Y es diferenciable, como afirmábamos. □

El isomorfismo ν permite ahora dotar a T_eG de estructura de álgebra de Lie. En efecto, si $x, y \in T_eG$ son tales que $x = \nu(X)$, $y = \nu(Y)$, siendo $X, Y \in \mathfrak{g}$, nos basta poner $[x, y] := \nu([X, Y]) = [X, Y]_e$. A través de ese isomorfismo suelen identificarse $\mathfrak{g}$ y T_eG, y se denotan ambas álgebras por $\mathfrak{g}$.

El álgebra de Lie de un grupo de Lie G tiene una extraordinaria importancia. Por una parte, es un álgebra de dimensión finita, lo que permite conocerla con toda precisión. Por otra, las álgebras de Lie determinan casi completamente los grupos de Lie en el sentido siguiente: si G, H son dos grupos de Lie simplemente conexos y sus álgebras de Lie son isomorfas, entonces G y H son isomorfos como grupos de Lie, y además, si $\mathfrak{g}$ es una $\mathbb{R}$-álgebra de Lie de dimensión finita, existe un grupo de Lie cuya álgebra de Lie es el álgebra dada $\mathfrak{g}$.

4.5 Curvas integrales. El flujo de un campo vectorial

Definición 4.11. Sea M^c una variedad diferenciable y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Si $\alpha :]a,b[\to M$ es una curva diferenciable, decimos que es una *curva integral de* X si para todo $t \in]a,b[$, la tangente a α en t coincide con el valor de X en $\alpha(t)$. O sea, si $\alpha' = X \circ \alpha$.

Vamos a estudiar la existencia y unicidad de las curvas integrales. Sea (U, ϕ) una carta de M y sea $X|_U = X^i \partial/\partial\phi^i$. Si $\alpha :]a,b[\to M$ es una curva diferenciable, tendremos en el abierto $\alpha^{-1}(U)$:

$$\alpha' = (\alpha^i)' \left(\frac{\partial}{\partial \phi^i} \circ \alpha \right).$$

Así, α es una curva integral de X si para cada carta (U, ϕ) de M se tiene $(\alpha^i)' = X^i \circ \alpha$. De modo más explícito:

$$(\alpha^i)'(t_0) = (X^i \circ \phi^{-1})(\alpha^1(t_0), \ldots, \alpha^c(t_0)), \quad t_0 \in \alpha^{-1}(U).$$

Como las $X^i \circ \phi^{-1}$ son funciones diferenciables en $\phi(U) \subset \mathbb{R}^c$, esto es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en un abierto de $\mathbb{R}^c$. Sabemos que esos sistemas tienen solución única fijada una condición inicial. Teniendo esto en cuenta, podemos probar el siguiente resultado de existencia y unicidad de la curva integral maximal.

Proposición 4.12. *Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Para cada $m \in M$ existe una curva diferenciable $\gamma_m :]a(m), b(m)[\to M$ tal que*

1. *γ_m es una curva integral de X y se tiene $\gamma_m(0) = m$ (existencia).*
2. *Si $\mu :]p,q[\to M$ es otra curva integral de X tal que $0 \in]p,q[$ y $\mu(0) = m$, entonces $]p,q[\subset]a(m), b(m)[$ y $\mu = \gamma|_{]p,q[}$ (unicidad).*

Demostración. Por la existencia de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias definidas mediante funciones diferenciables, sabemos que existe, al menos, un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ que contiene al 0, en el cual está definida una curva integral de X que pasa por m para $t = 0$. Sea, pues, $]a(m), b(m)[$ la unión de todos esos intervalos. Por lo que hemos dicho, se tiene $a(m) < 0 < b(m)$. Si $t_0 \in]a(m), b(m)[$, definimos $\gamma_m(t_0)$ como el valor en t_0 de alguna de esas curvas integrales de X, para las cuales t_0 pertenece a su intervalo de definición. Nos basta probar que $\gamma_m(t_0)$ no depende de cuál de ellas se elija.

Supongamos que α y β son dos de ellas y sea $]p,q[$ la intersección de sus intervalos de definición, de modo que 0 y t_0 pertenecen a $]p,q[$. Sea $J = \{t \in]p,q[: \alpha(t) = \beta(t)\}$. El subconjunto J es cerrado por continuidad ya que M es Hausdorff. Es abierto, porque si $\alpha(t_1) = \beta(t_1)$, la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias nos dice que, por la unicidad, ambas curvas deben coincidir en un entorno de t_1. Finalmente es no vacío ya que $0 \in J$ porque $\alpha(0) = \beta(0) = m$. Por tanto, $J =]p,q[$; en particular $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$. □

No siempre se tiene $]a(m), b(m)[= \mathbb{R}$. Cuando esto falla, lo que ocurre es que a la curva integral “se le acaba la variedad en algún momento”. Por ejemplo, si $M = \mathbb{R}$ y $X = \theta$, entonces la ecuación de las curvas integrales $\alpha(t) = f(t)$ es $f'(t) = 1$, cuya solución es $f(t) = f(0) + t$, siempre definida en todo $\mathbb{R}$. Por el contrario, si M fuera sólo el intervalo $]0, 1[$ la solución, suponiendo $f(0) \in]0, 1[$, sería también $f(t) = f(0) + t$, pero con $t \in] - f(0), 1 - f(0)[$. Pero no hay que pensar que para que el intervalo maximal no sea todo $\mathbb{R}$ es preciso “recortar la variedad”. Para ver que eso no es así, está el ejercicio siguiente:

Ejercicio 4.13. Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ el campo vectorial definido por $X(t) = t^2\theta(t)$. Demostrar que el intervalo maximal de cualquier curva integral de X es menor que $\mathbb{R}$, excepto en un solo caso.

Todo esto nos lleva a considerar los subconjuntos

$$D_t = \{m \in M \ : \ t \in]a(m), b(m)[\}.$$

Es decir, si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo vectorial en la variedad diferenciable M, el punto m de M pertenece a D_t sii la curva integral maximal de X que para $t = 0$ pasa por m contiene a t en su intervalo de definición. Sea, como antes, $\gamma_m :]a(m), b(m)[\to M$ esa curva integral maximal. Entonces, si escribimos $\varphi_t(m) = \gamma_m(t)$ para $m \in D_t$, obtenemos, para cada $t \in \mathbb{R}$, una aplicación

$$\varphi_t : D_t \to M, \qquad \varphi_t(m) = \gamma_m(t).$$

El conjunto de las aplicaciones φ_t, o también la aplicación $t \mapsto \varphi_t$, recibe el nombre de *flujo de X*.

Si cualquiera que sea m la curva γ_m está definida en todo $\mathbb{R}$, tendremos entonces que $D_t = M$ para todo t. Se dice entonces que el campo vectorial X es *completo.* En general no será así, pero se tienen las siguientes propiedades que enunciamos sin demostración.

Teorema 4.14. *Con la notación precedente, se tiene:*

1. *Para cada $m \in M$ existe un entorno abierto V de m y un número real positivo ϵ tales que la aplicación $\varphi :]-\epsilon, \epsilon[\times V \to M$ dada por $\varphi(t, m') = \varphi_t(m') = \gamma_{m'}(t)$ está definida y es C^∞.*

2. *D_t es abierto para todo $t \in \mathbb{R}$, aunque podría ser vacío.*

3. *$\bigcup_{t>0} D_t = \bigcup_{t<0} D_t = M$.*

4. *$\varphi_t(D_t) = D_{-t}$, $\quad \varphi_t : D_t \to D_{-t}$ es un difeomorfismo y su inverso es φ_{-t}.*

5. *Sean $p, q \in \mathbb{R}$. Entonces $\mathrm{Dom}(\varphi_p \circ \varphi_q) \subset D_{p+q}$. Si p y q tienen el mismo signo, entonces $\mathrm{Dom}(\varphi_p \circ \varphi_q) = D_{p+q}$. En $\mathrm{Dom}(\varphi_p \circ \varphi_q)$ se tiene $\varphi_p \circ \varphi_q = \varphi_{p+q}$.*

Cuando X es completo está siempre definida la composición $\varphi_p \circ \varphi_q$ y se tiene entonces $\varphi_p \circ \varphi_q = \varphi_{p+q}$. Por ello al flujo de X se le llama también *grupo uniparamétrico de X*. Cuando X no es completo, al flujo de X se le llama *grupo uniparamétrico local*, aun a sabiendas de que las φ_t no constituyen entonces estrictamente un grupo.

Ejercicios 4.15.

1. Sea φ_t el flujo de $X \in \mathfrak{X}(M)$. Probar que $\varphi_{t*} \circ X \circ \varphi_{-t} = X$.
2. Probar que todo campo vectorial en una variedad compacta es completo.
3. Calcular las curvas integrales de $X = x\partial/\partial x + xy\partial/\partial y + z\partial/\partial z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$.
4. Sea $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación dada por $\varphi_t(x, y) = (xe^t, ye^t)$. Entonces las $\varphi_t,\ t \in \mathbb{R}$, constituyen el flujo de un cierto campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$. Hallar X.

Tema 5

Campos tensoriales. Formas diferenciales. Derivada de Lie

5.1 Concepto de campo tensorial

Si m es un punto de la variedad diferenciable M, pondremos

$$
\begin{aligned}
T_m^{(a,0)}M &:= \underbrace{T_mM \otimes \cdots \otimes T_mM}_{a \text{ veces}}, \\
T_m^{(0,b)}M &:= \underbrace{T_m^*M \otimes \cdots \otimes T_m^*M}_{b \text{ veces}}, \\
T_m^{(a,b)}M &:= \underbrace{T_mM \otimes \cdots \otimes T_mM}_{a \text{ veces}} \otimes \underbrace{T_m^*M \otimes \cdots \otimes T_m^*M}_{b \text{ veces}}, \\
T_m^{(0,0)}M &:= \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

siendo $a, b \in \mathbb{N}$. De la misma manera que se hizo para construir la variedad tangente TM a partir de la unión de los espacios tangentes T_mM, y la variedad cotangente T^*M a partir de la unión de los cotangentes, se hace ahora para obtener la *variedad tensorial tangente de tipo* (a, b) denotada $T^{(a,b)}M$. Tendremos, pues, $TM = T^{(1,0)}M$, $T^*M = T^{(0,1)}M$, $M \times \mathbb{R} = T^{(0,0)}M$. Si no hay riesgo de confusión utilizaremos la misma letra, π para denotar las proyecciones canónicas $\pi : T^{(a,b)}M \to M$ que a cada elemento aplican el punto a cuyo espacio tensorial tangente pertenece.

Consideraremos también las variedades construidas por unión de los productos exteriores de los espacios cotangentes, a saber $\bigwedge_m^b M := \underbrace{T_m^*M \wedge \cdots \wedge T_m^*M}_{b \text{ veces}}$. Se obtiene una variedad denotada $\bigwedge^b M$, llamada *variedad de b-formas sobre M.* También usaremos la letra π para denotar la proyección $\pi : \bigwedge^b M \to M$. Muchas veces es conveniente considerar que $\bigwedge_m^b M$ es un subespacio vectorial de $T_m^{(0,b)}M$, el de las aplicaciones multilineales completamente antisimétricas de $T_mM \times \cdots \times T_mM$ en $\mathbb{R}$. Y también, que $\bigwedge^b M \subset T^{(0,b)}M$.

Definición 5.1. Un *campo tensorial tangente de tipo* (a, b) *sobre* M (resp. una b*-forma diferencial sobre* M) es una sección diferenciable de $\pi : T^{(a,b)}M \to M$ (resp. de $\pi : \bigwedge^b M \to M$).

Que K es un campo tensorial de tipo (a,b) sobre M es lo mismo que decir que K es una aplicación de M en $T^{(a,b)}M$ que a cada $m \in M$ asigna, de modo diferenciable, un elemento $K_m \in T_m^{(a,b)}M$. Se suele decir entonces que K es un campo tensorial *a veces contravariante* y *b veces covariante*. La diferenciabilidad de K se caracteriza como sigue. Sea (U,ϕ) una carta de M. Una base de $T_m^{(a,b)}M$ está constituida por los productos tensoriales

$$\frac{\partial}{\partial\phi^{i_1}}\Big|_m \otimes\cdots\otimes \frac{\partial}{\partial\phi^{i_a}}\Big|_m \otimes d\phi_m^{j_1}\otimes\cdots\otimes d\phi_m^{j_b}, \qquad i_1,\ldots,i_a,j_1,\ldots,j_b = 1,\ldots,\dim M.$$

Así, K_m define de modo único números reales $K_{j_1\cdots j_b}^{i_1\cdots i_a}(m)$, llamados componentes de K_m en la base descrita, de manera que

$$K_m = K_{j_1\cdots j_b}^{i_1\cdots i_a}(m)\frac{\partial}{\partial\phi^{i_1}}\Big|_m \otimes\cdots\otimes \frac{\partial}{\partial\phi^{i_a}}\Big|_m \otimes d\phi_m^{j_1}\otimes\cdots\otimes d\phi_m^{j_b}$$

De este modo quedan definidas las componentes de K en la referencia coordenada de la carta ϕ, que son las funciones reales en U dadas por $m \mapsto K_{j_1,\ldots,j_b}^{i_1,\ldots,i_a}(m)$. Pues bien, de modo similar al realizado para campos vectoriales, se encuentra que K es diferenciable sii para toda carta de M las componentes de K en la referencia coordenada de esa carta son funciones diferenciables.

Lo mismo para formas diferenciales. Si ω es una b-forma diferencial en M, tendremos

$$\omega_m = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_b} \omega_{j_1\cdots j_b}(m)d\phi_m^{j_1}\wedge\cdots\wedge d\phi_m^{j_b}$$

Ejemplos 5.2.

1. Una función diferenciable $h : M \to \mathbb{R}$ equivale a un campo tensorial de tipo $(0,0)$ y a una 0-forma diferencial. Un campo tensorial de tipo $(1,0)$ es un campo vectorial. Un campo tensorial de tipo $(0,1)$ es una 1-forma diferencial.
2. La primera y la segunda formas fundamentales en una superficie regular son campos tensoriales 2 veces covariantes, o sea de tipo (0,2).
3. La diferencial de la normal unitaria u operador de forma en una superficie regular es un campo tensorial de tipo (1,1).

Los campos tensoriales se pueden sumar y multiplicar tensorialmente entre sí, o multiplicarlos por números reales y funciones, o se les puede aplicar los operadores de contracción. Las formas diferenciales se pueden multiplicar exteriormente entre sí para dar nuevas formas diferenciales. El resultado de una cualquiera de esas operaciones consiste en el campo tensorial o forma diferencial cuyo valor en un punto es el resultado de la correspondiente operación realizada sobre los valores de los tensores o formas en ese mismo punto. Por ejemplo $(K+L)_m = K_m + L_m$, $(K\otimes L)_m = K_m \otimes L_m$, etc. Con esto se entiende por qué se tiene:

$$\begin{aligned}
K|_U &= K_{j_1\cdots j_b}^{i_1\cdots i_a}\frac{\partial}{\partial\phi^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial\phi^{i_a}}\otimes d\phi^{j_1}\otimes\cdots\otimes d\phi^{j_b},\\
\omega|_U &= \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_b}\omega_{j_1\cdots j_b}d\phi^{j_1}\wedge\cdots\wedge d\phi^{j_b},
\end{aligned}$$

donde, por ejemplo, $d\phi^{i_1}$ es la 1-forma local (definida sólo en U) dada por $m \mapsto d\phi_m^{i_1}$.

Otro ejemplo es el siguiente. Sea K un campo tensorial de tipo (a, b), sean $X_1, \ldots, X_b$ campos vectoriales y $\alpha^1, \ldots, \alpha^a$, 1-formas. Puedo definir una función diferenciable $K(\alpha^1, \ldots, \alpha^a; X_1, \ldots, X_b)$ mediante

$$K(\alpha^1, \ldots, \alpha^a; X_1, \ldots, X_b)(m) = K_m(\alpha^1_m, \ldots, \alpha^a_m; X_{1m}, \ldots, X_{bm}).$$

En particular, si $K|_U$ tiene la expresión de arriba, entonces

$$K(d\phi^{j_1}, \ldots, d\phi^{j_a}; \frac{\partial}{\partial \phi^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \phi^{i_b}}) = K^{j_1 \ldots j_a}_{i_1 \ldots i_b}.$$

5.2 Campos tensoriales y aplicaciones entre variedades

Sea $f : M^c \to N^d$ una aplicación diferenciable entre variedades. Para cada $m \in M$ tenemos el homomorfismo $f_{*m} : T_m M \to T_{f(m)} N$, que a su vez define el homomorfismo dual $f^*_m : T^*_{f(m)} N \to T^*_m M$. Esto permite realizar algo muy importante, la retroacción de campos covariantes, es decir, la conversión de los campos covariantes en N, incluidas las formas diferenciales, en campos covariantes en M.

Definición 5.3. Sea $\omega : N \to T^{(0,b)} N$ un campo tensorial b veces covariante y $f : M \to N$ una aplicación diferenciable. Llamamos *retroacción de ω por f*, y la denotamos $f^*\omega$, al campo tensorial b veces covariante $f^*\omega : M \to T^{(0,b)} M$ definido como sigue: si $m \in M$ y $X_1, \ldots, X_b \in T_m M$, entonces $(f^*\omega)_m$ es la aplicación multilineal de $T_m M \times \cdots \times T_m M$ en $\mathbb{R}$ dada por

$$(f^*\omega)_m(X_1, \ldots, X_b) = \omega_{f(m)}\big(f_{*m}(X_1), \ldots, f_{*m}(X_b)\big).$$

Para evitar dudas acerca de esta definición cuando $b = 0$, si h es una función diferenciable en N, que podemos considerar como un campo 0 veces covariante, o sea de tipo $(0, 0)$, pondremos $(f^*h)(m) = h(f(m))$, y por consiguiente:

$$f^*h = h \circ f, \quad h \in C^\infty(N).$$

Por la propia manera de definir la retroacción, vemos que si α, β son campos covariantes del mismo tipo y $p, q \in \mathbb{R}$, se tiene $f^*(p\alpha + q\beta) = pf^*\alpha + qf^*\beta$.

Si α, β son campos covariantes (resp. formas diferenciales) en N y $h \in C^\infty(N)$, tenemos

$$f^*(h\alpha) = (f^*h)f^*\alpha = (h \circ f)f^*\alpha, \quad f^*(\alpha \otimes \beta) = f^*\alpha \otimes f^*\beta, \quad f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta,$$

dejándose la demostración como ejercicio.

Supongamos que α es una 1-forma en N y que $m \in M$, $X \in T_m M$. Entonces

$$(f^*\alpha)_m(X) = \alpha_{f(m)}(f_*X) = f^*_m(\alpha_{f(m)})(X).$$

De acuerdo con la definición, si ahora $X_1, \ldots, X_b \in \mathfrak{X}(M)$, se tiene

$$(f^*\omega)(X_1, \ldots, X_b) = (\omega \circ f)(f_* \circ X_1, \ldots, f_* \circ X_b),$$

en cuyo segundo miembro se ha de entender, como siempre, que la evaluación en cada punto se realiza evaluando primero cada operando en ese punto y luego realizando la operación.

5.3 La diferencial exterior

Las formas diferenciales tienen extraordinaria importancia en Geometría diferencial, entre otras por las siguientes razones: sobre ellas actúa la retroacción, admiten una antiderivación cuyo cuadrado es cero, y además toda integral puede verse como la integral de una forma diferencial. Para completar el cuadro, resulta que esas tres propiedades están interconectadas por importantes teoremas. Hemos visto la primera de ellas. Veamos la segunda, o sea la antiderivación llamada diferencial exterior. Utilizaremos la notación $A^a(M)$ para denotar el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las formas diferenciales de grado a en M. Pondremos $A(M) = \oplus_{a=0}^c A^a(M)$, siendo $c = \dim M$, para denotar la $\mathbb{R}$-álgebra exterior de las formas diferenciales en M.

Las propiedades de la retroacción vistas en el apartado anterior se pueden enunciar ahora diciendo que es un homomorfismo de las correspondientes álgebras exteriores de formas diferenciales.

Daremos primero la definición local, es decir el modo de calcular la diferencial exterior en el dominio de una carta, veremos luego sus propiedades y, con ayuda de éstas, probaremos que el resultado de ese cálculo no depende de la carta utilizada, es decir probaremos la consistencia de la definición.

Definición 5.4. La diferencial exterior $d : A(M) \to A(M)$ aplica una forma diferencial cualquiera $\alpha \in A^a(M)$ en una forma $d\alpha \in A^{a+1}(M)$ de la manera siguiente. Sea (U, ϕ) una carta de M en la que α se expresa como

$$\alpha|_U = \sum_{i_1<\cdots<i_a} \alpha_{i_1\ldots i_a} d\phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi^{i_a}.$$

Entonces $d\alpha$ se expresa en esa misma carta como

$$(d\alpha)|_U = \sum_{i_1<\cdots<i_a} d\alpha_{i_1\ldots i_a} \wedge d\phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi^{i_a},$$

donde $d\alpha_{i_1\ldots i_a}$ es la diferencial ordinaria de $\alpha_{i_1\ldots i_a}$ (que es una función diferenciable en U).

Veamos ahora sus propiedades, bien entendido que queda pendiente probar la consistencia de 5.4.

Proposición 5.5. *La diferencial exterior es una antiderivación de grado +1, cuyo cuadrado es cero, y coincide con la diferencial ordinaria cuando actúa sobre las funciones.*

Demostración. Evidentemente coincide con la diferencial ordinaria cuando $\alpha \in A^0(M)$, o sea para las funciones. Veamos que el cuadrado es cero. Teniendo en cuenta que

$$d\alpha_{i_1\ldots i_a} = \sum_{i=1}^{c} \frac{\partial \alpha_{i_1\ldots i_a}}{\partial \phi^i} d\phi^i,$$

tenemos por sustitución y aplicación repetida de la definición 5.4:

$$\begin{aligned} d^2\alpha &= d \sum_{i_1<\cdots<i_a} \sum_{i=1}^{c} \frac{\partial \alpha_{i_1\ldots i_a}}{\partial \phi^i} d\phi^i \wedge d\phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi^{i_a} \\ &= \sum_{i_1<\cdots<i_a} \sum_{i,j=1}^{c} \frac{\partial^2 \alpha_{i_1\ldots i_a}}{\partial \phi^i \partial \phi^j} d\phi^j \wedge d\phi^i \wedge d\phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi^{i_a} = 0, \end{aligned}$$

porque $d\phi^j \wedge d\phi^i$ es antisimétrico mientras que la derivada parcial segunda respecto a ϕ^i y a ϕ^j es simétrica. Así, cambiando en la expresión anterior la i por la j obtenemos que es igual a su opuesta y por tanto ha de ser cero.

Recordamos que una aplicación $d : A(M) \to A(M)$ es una antiderivación de grado $+1$ si es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal, que aplica $A^a(M)$ en $A^{a+1}(M)$, $a = 0, \ldots, c$, y que cumple

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^a \alpha \wedge d\beta$$

para toda forma $\alpha \in A^a(M)$ y toda forma $\beta \in A(M)$. Supongamos que $\beta \in A^b(M)$. Tendremos

$$(\alpha \wedge \beta)|_U = \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_a \\ j_1<\cdots<j_b}} \alpha_{i_1\ldots i_a}\beta_{j_1\ldots j_b} d\phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi^{i_a} \wedge d\phi^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\phi^{j_b}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
d(\alpha \wedge \beta) = &\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_a \\ j_1<\cdots<j_b}} d\alpha_{i_1\ldots i_a} \wedge d\phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi^{i_a} \wedge \beta_{j_1\ldots j_b} d\phi^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\phi^{j_b} \\
&+ \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_a \\ j_1<\cdots<j_b}} \alpha_{i_1\ldots i_a} d\beta_{j_1\ldots j_b} \wedge d\phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi^{i_a} \wedge d\phi^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\phi^{j_b} \\
=& d\alpha \wedge \beta + (-1)^a \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_a \\ j_1<\cdots<j_b}} \alpha_{i_1\ldots i_a} d\phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi^{i_a} \wedge d\beta_{j_1\ldots j_b} \wedge d\phi^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\phi^{j_b} \\
=& d\alpha \wedge \beta + (-1)^a \alpha \wedge d\beta,
\end{aligned}$$

como queríamos. □

Veamos ahora la consistencia de la definición 5.4. Será necesario probar que si (V, ψ) es otra carta, tenemos $(d_\phi\alpha)|_{U\cap V} = (d_\psi\alpha)|_{U\cap V}$, donde el subíndice tras la d indica que el cálculo se realiza en la carta correspondiente. Claramente la igualdad se cumple para $\alpha \in A^0(M)$ porque entonces ambas diferenciales coinciden con la diferencial ordinaria de funciones. Tendremos, pues, aplicando las propiedades demostradas:

$$\begin{aligned}
(d_\phi\alpha)|_{U\cap V} &= \sum_{i_1<\cdots<i_a} d\alpha_{i_1\ldots i_a}|_{U\cap V} \wedge d\phi^{i_1}|_{U\cap V} \wedge \cdots \wedge d\phi^{i_a}|_{U\cap V} \\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_a} (d_\psi\alpha_{i_1\ldots i_a})|_{U\cap V} \wedge (d_\psi\phi^{i_1})|_{U\cap V} \wedge \cdots \wedge (d_\psi\phi^{i_a})|_{U\cap V} \\
&= \left(\sum_{i_1<\cdots<i_a} d_\psi\alpha_{i_1\ldots i_a} \wedge d_\psi\phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d_\psi\phi^{i_a} \right) \Big|_{U\cap V} \\
&= \left(d_\psi \sum_{i_1<\cdots<i_a} \alpha_{i_1\ldots i_a} d_\psi\phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d_\psi\phi^{i_a} \right) \Big|_{U\cap V} \\
&= (d_\psi\alpha)|_{U\cap V},
\end{aligned}$$

según habíamos afirmado.

Hay una manera intrínseca (o sea, que no emplea las cartas) de calcular la diferencial exterior y es la siguiente. Sean $X_1, \dots, X_{a+1} \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces se tiene

$$
\begin{aligned}
(d\alpha)(X_1, \dots, X_{a+1}) = & \sum_{i=1}^{a+1} (-1)^{i-1} X_i(\alpha(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{a+1})) \\
& + \sum_{1 \le i < j \le a+1} (-1)^{i+j} \alpha \left([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_{a+1} \right),
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Se puede probar fácilmente esa fórmula para el caso de una $1-$forma, por ejemplo $\alpha = fdg$, siendo $f, g \in C^\infty(M)$. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, la fórmula anterior se escribe $d\alpha(X,Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y])$. En nuestro caso tendremos:

$$
\begin{aligned}
& (d\alpha)(X,Y) - X(\alpha(Y)) + Y(\alpha(X)) + \alpha([X,Y]) \\
= & (df \wedge dg)(X,Y) - X(fY(g)) + Y(fX(g)) + f[X,Y](g) \\
= & df(X)dg(Y) - df(Y)dg(X) - X(f)Y(g) - fX(Y(g)) \\
& + Y(f)X(g) + fY(X(g)) + fX(Y(g)) - fY(X(g)) \\
= & X(f)Y(g) - Y(f)X(g) - X(f)Y(g) + Y(f)X(g) = 0.
\end{aligned}
$$

Veamos ahora que la diferencial exterior conmuta con la retroacción.

Proposición 5.6. *Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable entre variedades. Entonces $f^* \circ d = d \circ f^*$.*

Demostración. Sea $h \in A^0(N)$ y $m \in M$. Entonces tenemos para todo vector $X \in T_mM$:

$$
\begin{aligned}
((f^* \circ d)(h))_m(X) &= (f^*(dh))_m(X) = dh_{f(m)}(f_{*m}(X)) = f_{*m}(X)(h) \\
&= X(h \circ f) = d(h \circ f)_m(X) = ((d \circ f^*)(h))_m(X),
\end{aligned}
$$

ya que por definición $f^*h = h \circ f$. Ahora, si $\alpha \in A^a(N)$ y (V, ψ) es una carta de N, tenemos:

$$
\begin{aligned}
(f^* d\alpha)\big|_{f^{-1}(V)} &= f^* \sum_{i_1 < \dots < i_a} d\alpha_{i_1 \dots i_a} \wedge d\psi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\psi^{i_a} \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_a} f^* d\alpha_{i_1 \dots i_a} \wedge f^* d\psi^{i_1} \wedge \dots \wedge f^* d\psi^{i_a} \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_a} df^* \alpha_{i_1 \dots i_a} \wedge df^* \psi^{i_1} \wedge \dots \wedge df^* \psi^{i_a} \\
&= d \sum_{i_1 < \dots < i_a} f^* \alpha_{i_1 \dots i_a} df^* \psi^{i_1} \wedge \dots \wedge df^* \psi^{i_a} \\
&= d \sum_{i_1 < \dots < i_a} (f^* \alpha_{i_1 \dots i_a}) f^* d\psi^{i_1} \wedge \dots \wedge f^* d\psi^{i_a} \\
&= d \left(f^* \sum_{i_1 < \dots < i_a} \alpha_{i_1 \dots i_a} d\psi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\psi^{i_a} \right) \\
&= ((d \circ f^*)(\alpha))|_{f^{-1}(V)},
\end{aligned}
$$

y la unión de todos los $f^{-1}(V)$ recubre M.

$\square$

Ejercicio 5.7. Probar que la fórmula (5.1) describe correctamente la diferencial exterior. Para ello:

1. Ver que (5.1), cuando se aplica a $\alpha|_U$ poniendo $X_k = \partial/\partial\phi^{i_k}$, siendo $i_1 < \cdots < i_{a+1}$, da el mismo resultado que $d_\phi\alpha(\partial/\partial\phi^{i_1}, \ldots, \partial/\partial\phi^{i_{a+1}})$.

2. Mostrar que $(d\alpha)(f_1X_1, \ldots, f_{a+1}X_{a+1}) = f_1 \cdots f_{a+1}(d\alpha)(X_1, \ldots, X_{a+1})$, donde las $f_i \in C^\infty(M)$ son funciones arbitrarias.

3. Deducir que esa fórmula coincide en U con $(d_\phi\alpha)(X_1|_U, \ldots, X_{a+1}|_U)$, cualesquiera que sean los campos vectoriales X_i.

5.4 La derivada de Lie

Sea M una variedad diferenciable y $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial en M. Ya hemos visto que si $Y \in \mathfrak{X}(M)$, queda definido otro campo vectorial, $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$, el corchete de Lie. Podemos ver esto como una aplicación de $\mathfrak{X}(M)$ en $\mathfrak{X}(M)$, definida por X, que envía Y a $[X, Y]$. La denotamos por $\mathcal{L}_X : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, y tenemos:

$$\mathcal{L}_X Y := [X, Y].$$

Llamamos a $\mathcal{L}_X Y$ *derivada de Lie de* Y *respecto a* X. Recordemos que X define también una aplicación de $C^\infty(M)$ en $C^\infty(M)$ dada por $X(h)$, siendo $h \in C^\infty(M)$. La llamamos también derivada de Lie, de modo que

$$\mathcal{L}_X h := X(h).$$

Entonces tenemos, usando la Proposición 2.1,(2) del Capítulo 4:

$$\mathcal{L}_X(hY) = [X, hY] = X(h)Y + h[X, Y] = (\mathcal{L}_X h)Y + h\mathcal{L}_X Y.$$

Por consiguiente, $\mathcal{L}_X$ se comporta como una derivación por lo que se refiere a la multiplicación de campos vectoriales por funciones. Vamos a ver que se puede extender esto para conseguir una derivación de la $\mathbb{R}$-álgebra de campos tensoriales en M.

En primer lugar, extendemos la definición a los campos una vez covariantes (1-formas). Para ello, empecemos por un caso particular, las 1-formas dadas por las diferenciales de funciones. Sea $h \in C^\infty(M)$. Entonces dh es un campo tensorial 1 vez covariante, o sea una 1-forma. Ponemos, pues:

$$\mathcal{L}_X dh := d\mathcal{L}_X h = d(X(h)).$$

Si $g \in C^\infty(M)$ pondremos $\mathcal{L}_X(gdh) = (\mathcal{L}_X g)dh + g\mathcal{L}_X dh = X(g)dh + gd(X(h))$, como debe ser, teniendo en cuenta que $g \otimes dh = gdh$, y que $\mathcal{L}_X$ ha de ser una derivación en el álgebra de campos tensoriales. Puesto que en el dominio de una carta (U, ϕ) cualquier 1-forma α se escribe $\alpha = \alpha_i d\phi^i$, podemos calcular fácilmente en U su derivada de Lie respecto a X, que será

$$\mathcal{L}_X\alpha = X(\alpha_i)d\phi^i + \alpha_i d(X(\phi^i)) = X^j\frac{\partial\alpha_i}{\partial\phi^j}d\phi^i + \alpha_i\frac{\partial X^i}{\partial\phi^j}d\phi^j = \left(X^j\frac{\partial\alpha_i}{\partial\phi^j} + \alpha_j\frac{\partial X^j}{\partial\phi^i}\right)d\phi^i,$$

donde se ha puesto $X|_U = X^j \partial/\partial\phi^j$. Una vez conocida la derivada de Lie de funciones, de campos tensoriales 1 vez contravariantes (vectoriales) y de campos tensoriales 1 vez covariantes (1-formas), se puede calcular la derivada de Lie de campos tensoriales cualesquiera. En efecto, en el dominio de una carta, todo campo tensorial se escribe como una suma de productos tensoriales de funciones por campos vectoriales por 1-formas. Las propiedades más importantes de la derivada de Lie se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 5.8. *En la variedad diferenciable M, sea X un campo vectorial, K y L campos tensoriales cualesquiera, $h \in C^\infty(M)$, $\alpha, \beta \in A(M)$. Se tiene entonces:*

1. $\mathcal{L}_X(K + L) = \mathcal{L}_X K + \mathcal{L}_X L, \quad \mathcal{L}_X(hK) = X(h)K + h\mathcal{L}_X K.$
2. $\mathcal{L}_X(K \otimes L) = (\mathcal{L}_X K) \otimes L + K \otimes \mathcal{L}_X L, \quad \mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X \beta.$
3. $C^{(p,q)}(\mathcal{L}_X K) = \mathcal{L}_X(C^{(p,q)} K)$, *es decir la derivada de Lie conmuta con las contracciones.*
4. $\mathcal{L}_X \alpha = d(i_X \alpha) + i_X d\alpha$, *donde i_X denota la multiplicación interior. En otras palabras, en $A(M)$ se tiene $\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X$.*
5. *En $A(M)$ la derivada de Lie conmuta con la diferencial exterior; o sea, $d\mathcal{L}_X \alpha = \mathcal{L}_X d\alpha$.*

Demostración. (1) y la primera parte de (2) son ciertas por construcción. La segunda parte de (2) se obtiene fácilmente de la primera expresando el producto exterior como suma de productos tensoriales.

En cuanto a (3), como toda contracción es esencialmente la de un campo vectorial con una 1-forma, basta probarla en este caso, y por la linealidad nos basta que la 1-forma se pueda escribir como gdh, $h, g \in C^\infty(M)$. Sea, pues, $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Tendremos

$$\mathcal{L}_X\big(C^{(1,1)}(Y \otimes gdh)\big) = \mathcal{L}_X(gY(h)) = X(g)Y(h) + gX(Y(h)).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} C^{(1,1)}\big(\mathcal{L}_X(Y \otimes gdh)\big) &= C^{(1,1)}\big([X,Y] \otimes gdh + Y \otimes (X(g)dh + gd(X(h)))\big) \\ &= g[X,Y](h) + X(g)Y(h) + gY(X(h)) = X(g)Y(h) + gX(Y(h)), \end{aligned}$$

como queríamos.

(4) La fórmula se cumple evidentemente para funciones, o sea formas de grado cero. Probemos que se cumple cuando $\alpha = gdh$. Tendremos

$$\begin{aligned} d(i_X(gdh)) + i_X(d(gdh)) &= d(gX(h)) + i_X(dg \wedge dh) \\ &= X(h)dg + gd(X(h)) + X(g)dh - X(h)dg = gd(X(h)) + X(g)dh \\ &= g\mathcal{L}_X(dh) + (\mathcal{L}_X g)dh = \mathcal{L}_X(gdh). \end{aligned}$$

Como toda 1-forma se puede expresar localmente como suma de ese tipo de productos, vemos, pues, que la fórmula vale para $A^1(M)$. Supongamos que está ya probada para formas de grado $\leq b$ y sean $\alpha \in A^1(M),\ \beta \in A^b(M)$. Tenemos

$$\begin{aligned}
d(i_X(\alpha\wedge\beta)) + i_X(d(\alpha\wedge\beta)) = {} & d(i_X\alpha\wedge\beta - \alpha\wedge i_X\beta) + i_X(d\alpha\wedge\beta - \alpha\wedge d\beta)\\
= {} & di_X\alpha\wedge\beta + i_X\alpha\wedge d\beta - d\alpha\wedge i_X\beta + \alpha\wedge di_X\beta\\
& + i_Xd\alpha\wedge\beta + d\alpha\wedge i_X\beta - i_X\alpha\wedge d\beta + \alpha\wedge i_Xd\beta\\
= {} & (di_X\alpha + i_Xd\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge(i_Xd\beta + di_X\beta)\\
= {} & \mathcal{L}_X\alpha\wedge\beta + \alpha\wedge\mathcal{L}_X\beta\\
= {} & \mathcal{L}_X(\alpha\wedge\beta).
\end{aligned}$$

Por inducción, la fórmula vale para formas de grado cualquiera, como afirmábamos.

(5) A partir de (4), tenemos $\mathcal{L}_X \circ d = i_X\circ d\circ d + d\circ i_X\circ d = d\circ(i_X\circ d + d\circ i_X) = d\circ\mathcal{L}_X$. □

Ejercicio 5.9.

1. Probar que si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\alpha \in A^1(M)$ se tiene
$$(\mathcal{L}_X\alpha)(Y) = X\big(\alpha(Y)\big) - \alpha([X,Y]).$$

2. En $\mathbb{R}^2$, cuyas coordenadas denotamos (x, y), se consideran los campos
$$\begin{aligned}
g &= dx\otimes dx - \operatorname{ch}^2 x\, dy\otimes dy,\\
J &= \frac{1}{\operatorname{ch} x}\frac{\partial}{\partial y}\otimes dx + \operatorname{ch} x\,\frac{\partial}{\partial x}\otimes dy,\\
X &= \cos y\frac{\partial}{\partial x} - \operatorname{sen} y\ \operatorname{th} x\,\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}$$
Probar: $\mathcal{L}_X g = 0, \quad \mathcal{L}_X J = 0$.

3. Probar que si $\phi : H \to G$ es un homomorfismo de grupos de Lie, $\phi_{*e} : T_eH \to T_eG$ es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Bibliografía

[1] F.W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Co., Glenview 1971

[2] R. Brickell and R.S. Clark, *Differentiable Manifolds*, Van Nostrand Reinhold Co., London 1970.

[3] S.T. Hu, *Differentiable Manifolds*, Holt, Rinehart and Winston Inc., New York 1969.