MANUAL DEL PROGRAMA *METRICAS R*^{2}

ANGEL MONTESINOS-AMILIBIA

Abstract. El concepto de distancia le es familiar a cualquier estudiante de Matemáticas desde mucho antes de iniciar esa carrera. Lo mismo se puede decir de las relaciones entre distancia, esfera, bola, línea recta y segmento. Tal vez por eso, cuando nos vimos por primera vez enfrentados con la definición de la función abstracta *distancia*, nos sentimos inclinados a suponer que las bolas, esferas, líneas o segmentos tendrían que gozar de propiedades similares a las que todos conocíamos. He escrito este programa para mostrar visual e interactivamente cuán equivocados estábamos al hacer esa suposición. De paso, espero que el programa sirva para mejorar la comprensión de la topología de espacios métricos.

1. Notación y definiciones básicas

Sea E un conjunto y sea $d : E \times E \to \mathbb{R}$ una función con las siguientes propiedades, referidas a elementos cualesquiera $x, y, z \in E$:

a) $d(x, y) \geq 0$;
b) $d(x, y) = d(y, x)$;
c) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
d) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Decimos entonces que d es una función *distancia* o una *métrica* en E y que $d(x, y)$ es la *distancia de x a y*. En el resto de esta sección supondremos que E está dotado de la función distancia d.

La *bola cerrada* (resp. *abierta*) *de radio $r >= 0$ con centro en $x \in E$* es el conjunto $\bar{B}(r, x) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$ (resp. $B(r, x) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$). Por ejemplo, cualquiera que sea d, se tiene $B(0, x) = \emptyset$, $\bar{B}(0, x) = \{x\}$.

Tomo aquí las definiciones más elementales de segmento y línea definidos por dos puntos de E (cfr. [1], pero hay definiciones diferentes en la literatura). El *segmento* determinado por dos puntos $x, y \in E$ es el subconjunto $S(x, y) = \{z \in E : d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\}$. De la definición de distancia se deduce inmediatamente que $x, y \in S(x, y)$.

La *línea* determinada por dos puntos distintos $x, y \in E$ es el subconjunto

(1.1)
$$L(x, y) = \{z \in E : d(x, y) + d(y, z) + d(z, x) = 2\mathrm{Max}\ \{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\}.$$

Esta definición generaliza la noción euclidiana (o sea, la de la vida diaria) de que un punto está en la línea determinada por los otros si los tres puntos están alineados. Y están alineados si el perímetro del triángulo que forman, o sea $d(x, y) + d(y, z) + d(z, x)$ es igual a dos veces el lado mayor. Hay también otro modo de verlo, que

Date: March 6, 2014.
Agradezco a Juan Monterde la idea de escribir este programa.

se deduce de esa definición. Supongamos que $d(x,y)$ es el máximo del conjunto $\{d(x,y), d(y,z), d(z,x)\}$ Entonces, la condición 1.1 consiste en que

$$d(x,y) + d(y,z) + d(z,x) = 2d(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad d(x,z) + d(z,y) = d(x,y),$$

es decir, z pertenece a $S(x,y)$. Por otra parte, si $d(x,z) = \text{Max}\ \{d(x,y), d(y,z), d(z,x)\}$, entonces, como antes, la condición consiste en que $y \in S(x,z)$. Finalmente, si $d(y,z) = \text{Max}\ \{d(x,y), d(y,z),\ d(z,x)\}$, tendremos que $x \in S(y,z)$. En otras palabras, $z \in L(x,y)$ si $z \in S(x,y)$ o bien $x \in S(y,z)$, o bien $y \in S(x,z)$. Esto corresponde a nuestra intuición: z está en la línea recta determinada por x e y si está en el segmento determinado por x e y, o bien si x está en el segmento determinado por z e y, o bien y está en el segmento determinado por x y z. Nótese que $S(x,y) \subset L(x,y)$.

Observemos que si $x = y$, entonces $d(x,y) + d(y,z) = d(x,z)$ para todo $z \in E$, por lo cual y pertenece siempre al segmento determinado por x y z. Así, de no haber exigido en la definición 1.1 la condición $x \neq y$, la línea determinada por x e y sería todo el espacio E, cualquiera que fuera la métrica.

En lo que sigue, E será igual al plano real $\mathbb{R}^2$, o a un semiplano (métrica hiperbólica), o a un toro llano bidimensional, y se hará un estudio de las métricas que se incluyen en el programa. Si $x \in \mathbb{R}^2$, se entenderá que $x = (x_1, x_2)$.

2. Métrica discreta

Es la métrica más trivial. Se define mediante la siguiente función distancia:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Es bastante evidente entonces que

$$\begin{aligned}
&B(0,x) = \emptyset, \quad \bar{B}(0,x) = \{x\}. \\
&B(r,x) = \bar{B}(r,x) = \{x\}, \text{ si } 0 < r < 1. \\
&B(1,x) = \{x\}, \quad \bar{B}(1,x) = \mathbb{R}^2. \\
&B(r,x) = \bar{B}(r,x) = \mathbb{R}^2, \text{ si } r > 1. \\
&S(x,y) = \{x,y\}. \\
&L(x,y) = \{x,y\} \quad \text{(se supone que } x \neq y).
\end{aligned}$$

3. Métrica euclidiana

La denotamos en lo que sigue como $e : E \times E \to \mathbb{R}$, y viene dada como

$$e(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

No voy a explicar aquí por qué las bolas corresponden a las esferas macizas abiertas (sin piel) o cerradas (con piel), los segmentos a los segmentos habituales $\{x + ty\ :\ t \in [0,1]\}$, y las líneas a las líneas rectas habituales $\{x + ty\ :\ t \in \mathbb{R}\}$. En lo que sigue, denotaremos por $B_e(r,x)$, $\bar{B}_e(r,x)$, $S_e(x,y)$, $L_e(x,y)$ las bolas, el segmento y la línea determinados por r, x e y con la métrica euclidiana.

4. Métrica del ascensor

Sugiere lo siguiente: para ir de un punto x al punto y, se usa el ascensor como sigue: si $y_1 = x_1$ se sube o baja en el ascensor directamente de x a y, de modo que el camino recorrido es $|y_2 - x_2|$. Si $y_1 \neq x_1$, desde x se baja o se sube en el ascensor a la calle (eje de abscisas), se camina por la calle hasta situarse en la abscisa y_1, y finalmente se sube o se baja en el ascensor hasta y. Ésta es la definición formal:

$$d(x,y) = \begin{cases} |y_2 - x_2| & \text{si } x_1 = y_1, \\ |x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2| & \text{si } x_1 \neq y_1. \end{cases}$$

Sea $0 \leq r \in \mathbb{R}$. Entonces la bola de radio r centrada en x es la unión de dos subconjuntos. Uno es el segmento definido por $\{y \in \mathbb{R}^2 \,:\, y_1 = x_1,\ |y_2 - x_2| < r\}$, es decir el segmento rectilíneo vertical de abscisa x_1, centrado en x y de longitud igual a $2r$. Se tomará ese segmento rectilíneo abierto o cerrado según se requiera la bola abierta o cerrada.

El otro subconjunto es

$$\{y \in \mathbb{R}^2 \,:\, y_1 \neq x_1,\ |y_1 - x_1| + |y_2| < r - |x_2|\}.$$

Esto es el conjunto de los $y \in \mathbb{R}^2$ con abscisa distinta de la de x, y tales que $|y_1 - x_1| + |y_2| < r - |x_2|$. Ese subconjunto es vacío sii $r \leq |x_2|$, así que supondremos que $r > |x_2|$. Hay que considerar cuatro casos, según sea el signo de $y_1 - x_1$ y el signo de y_2. Supongamos que ambos signos son no negativos. Entonces las condiciones son

$$y_1 > x_1, \quad y_2 >= 0, \quad y_1 + y_2 < r + x_1 - |x_2|,$$

que es el triángulo con vértices $(x_1, 0)$, $(x_1, r - |x_2|)$, $(x_1 + r - |x_2|, 0)$. Se sumará este conjunto a los otros tres triángulos. El resultado final es un rombo (y en realidad, también un cuadrado) de vértices

$$(x_1,\, r - |x_2|),\ (x_1 + r - |x_2|,\, 0),\ (x_1,\, |x_2| - r),\ (x_1 + |x_2| - r,\, 0),$$

al que hay que quitar la diagonal vertical, o sea el segmento rectilíneo de extremos $(x_1,\, r - |x_2|)$ y $(x_1,\, |x_2| - r)$. Pero esa diagonal está incluida en el primer subconjunto, como se puede comprobar con facilidad. Por consiguiente, la bola abierta (resp. cerrada) de radio r centrada en x está constituida por el segmento rectilíneo abierto (resp. cerrado) descrito arriba, al que hay que unir, cuando $r > |x_2|$, el rombo abierto (resp. cerrado) cuyos vértices se han mostrado.

Veamos ahora cómo es el segmento $S(x,y)$. Vamos a probar que pertenecen a $S(x,y)$ solamente los puntos que están en el itinerario mínimo para ir de x a y. Tenemos dos casos, según x_1 sea igual o no a y_1. Así, comencemos suponiendo que $x_1 = y_1$. Entonces tenemos $d(x,y) = e(x,y)$. Por tanto, todo el segmento rectilíneo cuyos extremos son x e y pertenece a $S(x,y)$, y no hay otros puntos en esa vertical que pertenezcan a $S(x,y)$. ¿Hay algún otro punto en $S(x,y)$? Supongamos que $z_1 \neq x_1$ y que $z \in S(x,y)$. Así:

$$\begin{aligned} d(x,z) + d(z,y) - d(x,y) &= |x_2| + |x_1 - z_1| + |z_2| + |y_2| + |y_1 - z_1| + |z_2| - |x_2 - y_2| \\ &\geq 2|z_2| + 2|x_1 - z_1| + |x_2| + |y_2| - |x_2 - y_2| \geq 2|z_2| + 2|x_1 - z_1| > 0, \end{aligned}$$

que es absurdo. Así $S(x,y)$ es el segmento rectilíneo que une x con y.

Supongamos ahora que $x_1 \neq y_1$ y que $z \neq x$ pero $z_1 = x_1$ Entonces

$$\begin{aligned} d(x,z) + d(z,y) - d(x,y) &= |x_2 - z_2| + |z_2| + |z_1 - y_1| + |y_2| - |x_2| - |x_1 - y_1| - |y_2| \\ &= |x_2 - z_2| + |z_2| - |x_2| \geq 0, \end{aligned}$$

por la desigualdad triangular en la recta real, que es una igualdad sii $x_2 - z_2$, y z_2 tienen el mismo signo. Si ese signo es positivo, tendremos $0 < z_2 < x_2$. Si es negativo, $x_2 < z_2 < 0$. En cualquier caso, la condición es que z pertenezca al segmento de extremos x y $(x_1, 0)$. Por simetría, los únicos puntos de $S(x, y)$ con la misma abscisa que y son los del segmento de extremos y y $(y_1, 0)$. Supongamos finalmente que z_1 no es igual a x_1 ni a y_1. Entonces tendremos:

$$\begin{aligned} d(x,z) + d(z,y) - d(x,y) &= |x_2| + |x_1 - z_1| + |z_2| + |z_2| + |z_1 - y_1| + |y_2| \\ &- |x_2| - |x_1 - y_1| - |y_2| = |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| - |x_1 - y_1| + 2|z_2|. \end{aligned}$$

O sea $z \in S(x, y)$ sii $z_2 = 0$ y $|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| - |x_1 - y_1| = 0$. Esta última condición es equivalente a que $x_1 - z_1$ y $z_1 - y_1$ tengan el mismo signo, o sea que $z = (z_1, 0)$ pertenezca al segmento rectilíneo de extremos $(x_1, 0)$ y $(y_1, 0)$. Por consiguiente, $S(x, y)$ es la unión del segmento rectilíneo que une x con $(x_1, 0)$, el segmento rectilíneo que une $(x_1, 0)$ con $(y_1, 0)$, y el segmento rectilíneo que une $(y_1, 0)$ con y. Y esto es precisamente lo que queríamos probar.

Finalmente, veamos la línea determinada por x e y, siendo $x \neq y$. Supongamos primero que estamos en el caso $x_1 = y_1$ y sea $z \in \mathbb{R}^2$. Claramente, si $z_1 = x_1$, entonces $z \in S(x, y) \subset L(x, y)$, porque en la recta $(x_1, t),\ t \in \mathbb{R}$, la métrica coincide con la euclidiana. Si $z_1 \neq x_1$, entonces $x \in S(z, y)$ sii $x_2 y_2 \geq 0$ y $|y_2| > |x_2|$, o bien $y \in S(x, z)$ si $x_2 y_2 \geq 0$ y $|x_2| > |y_2|$. En caso contrario, $x \notin S(z, y)$ and $y \notin S(z, x)$. Por consiguiente este caso se resume así: *Si $x_1 = y_1$ y $x_2 y_2 \geq 0$, entonces $L(x, y) = \mathbb{R}^2$. Si $x_1 = y_1$ y $x_2 y_2 < 0$, entonces $L(x, y) = L_e(x, y)$.*

Nos falta por estudiar el caso en que $x_1 \neq y_1$. Voy a enunciar los resultados que se obtienen por simple comprobación directa.

(1) Si $x_1 \neq y_1,\ x_2 \neq 0$ e $y_2 \neq 0$, entonces $L(x, y)$ está formada por la semirrecta $\{(x_1, tx_2)\ :\ 0 \leq t \in \mathbb{R}\}$, junto con el segmento rectilíneo de extremos $(x_1, 0)$, $(y_1, 0)$ y con la semirrecta $\{(y_1, ty_2),\ 0 \leq t \in \mathbb{R}\}$.

(2) Si $x_1 \neq y_1,\ x_2 = 0$ e $y_2 \neq 0$, entonces $L(x, y)$ es la unión de la semirrecta $\{(y_1, ty_2),\ 0 \leq t \in \mathbb{R}\}$ con el segmento rectilíneo de extremos x e $(y_1, 0)$, y con todo el semiplano cerrado que no contiene a y limitado por la recta de abscisa x_1. El caso $x_2 \neq 0$ e $y_2 = 0$ es similar por simetría.

(3) Si $x_1 \neq y_1,\ x_2 = y_2 = 0$, entonces $L(x, y)$ está formado por la unión del semiplano cerrado que no contiene a y, limitado por la recta de abscisa x_1, con el segmento rectilíneo que une x con y, y con el semiplano cerrado que no contiene a x, limitado por la recta de abscisa y_1

5. Métrica de correos

Es lo que recorre una carta para ir de un destino a otro, suponiendo que el servicio de correos recoge la carta directamente del remitente, la lleva hasta la central de correos, y la entrega finalmente en el domicilio del destinatario. Se puede describir así:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ e(x, 0) + e(0, y) & \text{si } x \neq y \end{cases},$$

donde e denota la métrica euclidiana. Tendremos entonces, como siempre, $B(0, x) = \emptyset,\ \bar{B}(0, x) = \{x\}$. También se ve rápidamente que si $r > 0$ entonces

$$B(r, x) = \{x\} \cup B_e(r - e(0, x), x), \quad \bar{B}(r, x) = \{x\} \cup \bar{B}_e(r - e(0, x), x),$$

donde, como ya se advirtió, $B_e(r,z), \bar{B}_e(r,z)$ denotan las bolas euclidianas abierta y cerrada, respectivamente, de radio r y centro z, y que pueden ser vacías si el radio es menor o igual (las abiertas) que cero.

Sea $x \neq y$ y supongamos que z no es igual a x ni a y. Entonces

$$d(x,z)+d(z,y)-d(x,y) = e(0,x)+e(0,z)+e(0,z)+e(0,y)-e(0,x)-e(0,y) = 2e(0,z).$$

Por consiguiente, $S(x,y) = \{0,x,y\}$.

Finalmente, tendremos que si $x \neq 0$ e $y \neq 0$ entonces $L(x,y) = \{0,x,y\}$, mientras que si $x \neq 0$ entonces $L(0,x) = \mathbb{R}^2$, ya que si $z \in \mathbb{R}^2$, entonces $0 \in S(x,z) = \{0,x,z\}$.

6. Métrica del taxi

Viene definida mediante

$$d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Es decir, mide la mínima distancia euclidiana que se ha de recorrer para ir de un punto a otro mediante una sucesión finita de tramos rectos horizontales o verticales.

Se deja como ejercicio todo lo que sigue en esta sección. Probar que $B(r,x)$ es el rombo abierto de ángulos rectos (o sea, un cuadrado sin su frontera, pero tal que sus lados forman ángulos de 45 grados con los ejes de $\mathbb{R}^2$), centrado en x, cuya diagonal es igual a $2r$. Por su parte $\bar{B}(r,x)$ es el rombo anterior junto con sus lados.

Probar que $S(x,y)$ es el rectángulo de lados paralelos a los ejes, una de cuyas diagonales tiene por extremos a x e y. Finalmente, probar que $L(x,y)$ es igual a $S(x,y)$, junto con los cuadrantes cerrados con lados paralelos a los ejes y vértice en x que contienen a $x-(y-x)$, y junto con los cuadrantes cerrados con lados paralelos a los ejes y vértice en y que contienen a $y-(x-y)$.

Una métrica similar es la del alfil del ajedrez. En ella la distancia es la longitud que ha de recorrerse para llegar de un punto a otro mediante una cantidad finita de tramos rectos que forman ángulos de 45º con los ejes coordenados.

7. Métrica del semiplano hiperbólico

Es una métrica que se define en la mitad de $\mathbb{R}^2$ dada por los puntos cuya ordenada es positiva, o sea en $H = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$. Consiste en un espacio en el que los *metros* con los que se mide la distancia son tanto mayores, en relación con los metros euclidianos, cuanto mayor es la ordenada a la que se encuentran. Así, por ejemplo, si consideramos dos puntos $x,y \in H$ tales que $x_1 = y_1$, entonces la longitud del segmento rectilíneo que los une viene dada por

$$\left| \int_{x_2}^{y_2} \frac{dy}{y} \right| = \left| \ln y \Big|_{x_2}^{y_2} \right| = \left| \ln \left(\frac{y_2}{x_2} \right) \right|.$$

No voy a detallar aquí cómo se define en general la longitud de un arco de curva cuando los *metros* que la miden cambian de longitud o sea son una función del punto del espacio. El cálculo anterior puede dar una idea de lo que se quiere decir, pero la definición rigurosa y la demostración de las propiedades de tal espacio suele abordarse en cursos de Geometría Diferencial. Baste decir que en el caso del semiplano hiperbólico podemos definir la distancia $d(x,y)$ como el ínfimo de las longitudes de los arcos formados por un número finito de tramos rectos, y que comienzan en x y terminan en y. Para entender el resultado siguiente hace falta definir las dos cantidades c y r referidas al par $x, y \in H$, donde se supone que $x_1 \neq y_1$:

$$c = \frac{(y_1^2 + y_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)}{2(y_1 - x_1)}, \quad r = \sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2}.$$

$$d(x, y) = \begin{cases} \left|\ln\left(\frac{y_2}{x_2}\right)\right| & \text{si } x_1 = y_1 \\ \left|\ln\left(\frac{y_2(x_1-c+r)}{x_2(y_1-c+r)}\right)\right| & \text{si } x_1 \neq y_1. \end{cases}$$

Si se calcula el centro y radio de la circunferencia que tiene el centro en el eje de abscisas y pasa por x e y se encontrará que ese centro viene dado por $(c, 0)$ y que ese radio es r. Se puede calcular ahora la longitud del arco de esa circunferencia delimitado por x e y, cuando los metros son proporcionales a la ordenada. En coordenadas polares centradas en $(c, 0)$ el punto x viene dado por $(r, \phi_1 = \arccos \frac{x_1 - c}{r})$, y el punto y por $(r, \phi_2 = \arccos \frac{y_1 - c}{r})$. Si midiéramos el arco con la métrica euclidiana, tendríamos que calcular la integral $\int_{\phi_1}^{\phi_2} r d\phi$. Como los metros son proporcionales a la ordenada de cada punto, que sería $r \sin \phi$, tendremos que hacer el siguiente cálculo:

$$\left| \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{r}{r \sin \phi} d\phi \right| = \left| \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1}{\sin \phi} d\phi \right| = \left| \ln \tan \frac{\phi}{2} \Big|_{\phi_1}^{\phi_2} \right| = \left| \ln \frac{\tan \frac{\phi_1}{2}}{\tan \frac{\phi_2}{2}} \right|.$$

Pero sabemos que $\tan \frac{\phi}{2} = \frac{\sin \phi}{1 + \cos \phi}$. Por consiguiente, puesto que $\sin \phi_1 = \frac{x_2}{r}$, y

$$1 + \cos \phi_1 = 1 + \frac{x_1 - c}{r} = \frac{r - c + x_1}{r},$$

tendremos

$$\tan \frac{\phi_1}{2} = \frac{x_2}{r - c + x_1}, \quad \tan \frac{\phi_2}{2} = \frac{y_2}{r - c + y_1}$$

Por consiguiente la longitud de ese arco medida de este modo nos da:

$$\left| \ln \frac{y_2(r - c + x_1)}{x_2(r - c + y_1)} \right|,$$

que es precisamente la distancia entre x e y. O sea, se nos dice que ese arco de circunferencia nos proporciona un camino mínimo para ir de x a y. Y la realidad es que efectivamente ese arco es precisamente el segmento $S(x, y)$. También se puede probar que, si $x_1 = y_1$, $L(x, y)$ es toda la semirrecta $\{(x_1, t), t > 0\}$. Y que en caso contrario es la semicircunferencia de ordenadas positivas, radio r y centro $(c, 0)$. Finalmente, la bola $B(r, x)$ (resp. $\bar{B}(r, x)$) es el círculo abierto (resp. cerrado) centrado en $(x_1, x_2 \cosh r)$ cuyo radio es $\sinh r$. Sin embargo, no probaré aquí nada de esto.

8. Métrica con meseta cuadrada

Se puede expresar del modo siguiene. Sea $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$, que es el cuadrado de lado igual a 2, lados paralelos a los ejes, y centro en el origen. Entonces, si $x, y \in C$ ó $x, y \notin C$ se tiene $d(x, y) = e(x, y)$; de lo contrario, $d(x, y) = 2 + e(x, y)$.

Una primera tarea es averiguar si se trata realmente de una métrica. Eso está claro respecto a las tres primeras propiedades. Hay que verificar la desigualdad triangular. Si x, y, z están todos ellos en C o fuera de C, esa desigualdad procede de la correspondiente a la métrica euclidiana. Hay, pues, que considerar dos casos:

primero, que dos de los puntos estén en C y el tercero fuera de C; después, que un punto esté en C y los otros dos fuera de C.

Supongamos, pues, que $x, y \in C$, $z \notin C$. Así:

$$\begin{aligned}
d(x,y)+d(y,z)-d(x,z) &= e(x,y)+2+e(y,z)-2-e(x,z)\\
&= e(x,y)+e(y,z)-e(x,z)\geq 0,\\
d(x,y)-d(y,z)+d(x,z) &= e(x,y)-2-e(y,z)+2+e(x,z)\\
&= e(x,y)-e(y,z)+e(x,z)\geq 0,\\
-d(x,y)+d(y,z)+d(x,z) &= -e(x,y)+2+e(y,z)+2+e(x,z)\\
&= -e(x,y)+e(y,z)+e(x,z)+4\geq 4.
\end{aligned}$$

Vemos, pues, que se cumple la desigualdad triangular. En el otro caso, suponemos que $x, y \notin C$, $z \in C$. Vemos que en realidad la prueba de este caso no es muy diferente del anterior porque lo único que importa es que, como antes, de las tres distancias hay dos obtenidas añadiendo 2 a la distancia euclidiana.

Estudiemos ahora los segmentos. Es claro que si x e y pertenecen a C, entonces $S(x,y) = S_e(x,y)$. Supongamos que $x, y \notin C$. Estudiamos dos casos. En el primer caso, $z \in C$. Entonces $z \in S(x,y)$ sii la cantidad siguiente se anula:

$$d(x,z)+d(z,y)-d(x,y) = 2+e(x,z)+2+e(y,z)-e(x,y)\geq 4,$$

lo cual es absurdo. En el otro caso, si $z \notin C$ tenemos

$$d(x,z)+d(z,y)-d(x,y) = e(x,z)+e(y,z)-e(x,y),$$

que se anula sii z pertenece al segmento rectilíneo determinado por x e y. Por consiguiente, hemos probado que si $x, y \notin C$, $S(x,y) = S_e(x,y)\backslash C$.

Veamos ahora el caso en que $x \in C$, $y \notin C$. Como antes, supongamos que $z \in C$. Entonces

$$d(x,z)+d(z,y)-d(x,y) = e(x,z)+2+e(z,y)-2-e(x,y) = e(x,z)+e(z,y)-e(x,y),$$

por lo cual $z \in C \cap S(x,y)$ sii $z \in S_e(x,y)$. Si, por el contrario, $z \notin C$, entonces

$$d(x,z)+d(z,y)-d(x,y) = 2+e(x,z)+e(y,z)-2-e(x,y) = e(x,z)+e(y,z)-e(x,y),$$

de modo que hemos probado que entonces $S(x,y) = S_e(x,y)$. Todo esto se puede resumir diciendo que si x o y están en C, entonces $S(x,y) = S_e(x,y)$, y si $x, y \notin C$, entonces $S(x,y) = S_e(x,y)\backslash C$.

Veamos ahora $L(x,y)$. Primer caso, $x, y \notin C$: si $z \in C$, tenemos $z \notin S(x,y) = S_e(x,y)\backslash C$. Así, si $z \in L(x,y) \cap C$ tendremos $x \in S(z,y) = S_e(z,y)$, o $y \in S(z,x) = S_e(x,z)$. Esto implica que $z \in L_e(x,y)\backslash\big(C \cap S_e(x,y)\big)$. Se deja al lector como ejercicio completar este estudio para llegar a la conclusión de que

$$x, y \notin C \quad\Longrightarrow\quad L(x,y) = L_e(x,y)\backslash\big(C\cap S_e(x,y)\big).$$

Ahora suponemos que $x, y \in C$. Si $z \in C$, entonces claramente $z \in L(x,y)$ sii $z \in L_e(x,y)$. Si $z \notin C$, entonces $S(x,y) = S_e(x,y)$, $S(y,z) = S_e(y,z)$, $S(z,x) = S_e(z,x)$. Tenemos, pues,

$$x, y \in C \quad\Longrightarrow\quad L(x,y) = L_e(x,y).$$

Para acabar el estudio de las líneas, nos falta el caso $x \in C$, $y \notin C$. Entonces supongamos que $z \in C$. Tendremos $z \in L(x,y)$ sii $z \in S_e(x,y)$, o bien $x \in S_e(z,y)$ o bien $y \in S_e(z,x)$, es decir sii $z \in L_e(x,y)$. Si $z \notin C$, entonces $z \in L(x,y)$ sii $z \in S_e(x,y)$, o bien $x \in S_e(z,y)\backslash C$ lo que es absurdo, o bien $y \in S_e(z,x)$. En otras palabras, z debe pertenecer a $L_e(x,y)\cap C$, o bien a la semirrecta que parte de x y contiene a y.

Falta por estudiar las bolas. Tendremos, si $x\in C$, la siguiente condición sobre $y\in\mathbb{R}^2$:

$$d(x,y)<\begin{cases} e(x,y), & \text{si } y\in C\\ e(x,y)+2, & \text{si } y\notin C\end{cases}$$

Esto significa que $B(r,x)=\big(B_e(r,x)\cap C\big)\cup\big(B_e(r-2,x)\cap(\mathbb{R}^2\backslash C)\big)$.

Si, por el contrario, $x\notin C$, tendremos $y\in B(r,x)$ sii:

$$d(x,y)<\begin{cases} e(x,y), & \text{si } y\notin C\\ e(x,y)+2, & \text{si } y\in C\end{cases}$$

En otros términos, escribimos $B(r,x)=\big(B_e(r-2,x)\cap C\big)\cup\big(B_e(r,x)\cap(\mathbb{R}^2\backslash C)\big)$. El cálculo de las bolas cerradas se lo dejo al lector.

9. Métrica tierra-mar

Se supone que cierto móvil puntual puede viajar en la región $H=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_2>0\}$ (mar) a una velocidad igual a 1, mientras que puede viajar en su complementaria $\mathbb{R}^2\backslash H$ (tierra) a velocidad igual a 2. La distancia entre dos puntos $x,y\in\mathbb{R}^2$ se mide por el ínfimo del tiempo que ha de tardar ese móvil en alcanzar y desde x yendo por cualesquiera trayectorias continuas que admitan, a trozos, una definición de velocidad (o sea, continuas, y diferenciables a trozos).

Para tratar este problema hemos de calcular cuáles son los itinerarios mínimos, si los hay, o si no, cómo proponer itinerarios en que se invierta un tiempo tan próximo al ínfimo como se quiera.

Para empezar, es claro que si x está en tierra, esto es $x_2\le 0$, el móvil no puede alcanzar el mar sin invertir un tiempo mayor que $\frac{1}{2}|x_2|$. Así, cuando $x_2\le 0$ y $r\le\frac{1}{2}|x_2|$, tenemos $B(r,x)=B_e(2r,x)$. De la misma manera, si $x_2>0$ y $r\le x_2$, tendremos $B(r,x)=B_e(r,x)$. También está claro que el itinerario más rápido para ir de x a y, cuando ambos están en tierra (o sea, $x_2,y_2\le 0$) es recorrer el segmento $S_e(x,y)$. Pero en cambio, es más difícil la respuesta para el caso en que al menos uno de los puntos está en el mar. Empecemos suponiendo que $x_2\le 0$ e $y_2>0$, y por brevedad supongamos que $x_1\le y_1$. Estudiemos un posible itinerario mínimo. Como ese itinerario ha de ser continuo, tendrá un último punto en tierra, $(s,0)$. Si el tramo entre x y $(s,0)$ no es recto, la sustitución del itinerario dado por el segmento rectilíneo desde x hasta $(s,0)$ invertirá menos tiempo que el itinerario original, de modo podemos suponer que habrá un primer tramo recto desde x hasta $s,0$, seguido por un itinerario en el mar entre $(s,0)$ e y. Si no es recto, podemos mejorarlo con el segmento que une $(s,0)$ con y. Esto es, para encontrar el itinerario mínimo, nos basta calcular el tiempo empleado, $t(s)$ para recorrer el segmento $S_e(x,(s,0))$ por tierra seguido del segmento $S_e((s,0),y)$ por mar. Además, se puede argumentar fácilmente que $x_1\le s\le y_1$, porque si, por ejemplo, $s<x_1$, el itinerario $x\to(x_1,0)\to y$ requiere menor tiempo. Podemos suponer, pues que

$$t(s)=\frac{1}{2}\sqrt{(s-x_1)^2+x_2^2}+\sqrt{(y_1-s)^2+y_2^2}.$$

Derivamos respecto a s, y obtenemos:

$$t'(s)=\frac{s-x_1}{2\sqrt{(s-x_1)^2+x_2^2}}-\frac{y_1-s}{\sqrt{(y_1-s)^2+y_2^2}}.$$

Entonces, podemos escribir la ecuación $t'(s) = 0$ como $\sin\alpha = 2\sin\beta$, donde α es el ángulo que el segmento terrestre del itinerario, $S_e(x,(s,0))$, forma con el eje de ordenadas, y β es el ángulo que el segmento marino del itinerario, $S_e((s,0),y)$ forma con el eje de ordenadas. Tenemos así la ley de Snell-Descartes. No creo que se pueda dar una expresión sencilla de la solución s que hace $t'(s) = 0$ en términos de las componentes de x e y, porque requiere encontrar los ceros de un polinomio de cuarto grado. Mediante cálculo numérico no es difícil calcularla con la precisión que se necesite, como veremos a continuación.

La relación $\sin\alpha = 2\sin\beta$, para ángulos entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, es equivalente a

$$\tan\beta = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{4+3\tan^2\alpha}}$$

Pongamos $h = |y_1 - x_1|$ y $u = |s - x_1|$. Entonces

$$\tan\alpha = \frac{u}{-x_2}, \quad \frac{\tan\alpha}{\sqrt{4+3\tan^2\alpha}} = \frac{u}{\sqrt{4x_2^2+3u^2}}, \quad \tan\beta = \frac{h-u}{y_2},$$

donde se supone que $0 \le u \le h$. Pongamos

$$\delta(u) = \frac{u}{\sqrt{4x_2^2+3u^2}} - \frac{h-u}{y_2}.$$

Calculamos los valores extremos de d :

$$\delta(0) = -\frac{h}{y_2} < 0, \qquad \delta(h) = \frac{h}{\sqrt{4x_2^2+3h^2}} > 0.$$

A partir de aquí, usamos la *regula falsi* hasta llegar a la aproximación que deseemos de δ a cero.

Del resultado anterior se desprenden dos importantes consecuencias. Si $x_1 = y_1$, vemos que

$$t'(s) = \frac{3}{2}\frac{s-y_1}{\sqrt{(s-x_1)^2+y_2^2}}$$

de modo que $t'(s) = 0$ sii $s = x_1$. Esto significa que el itinerario mínimo consiste en la recta que une x con y. El otro caso especial consiste en suponer que $x_1 < y_1$ y $x_2 = 0$. En tal caso, $\sin\alpha = 1$, mientras que $\sin\beta = 1/2$, es decir, $\beta = \frac{\pi}{6}$ (30 grados sexagesimales). Otro modo de verlo es percatarse de que entonces

$$t'(s) = \frac{1}{2} - \frac{y_1 - s}{\sqrt{(y_1-s)^2+y_2^2}},$$

de modo que $t'(s) = 0$ sii $4(y_1-s)^2 = (y_1-s)^2 + y_2^2$, es decir

$$x_1 \le s = y_1 - \frac{y_2}{\sqrt{3}}.$$

Para que esto sea posible es necesario y suficiente que $x_1 \le y_1 - \frac{y_2}{\sqrt{3}}$. De lo contrario, se concluye que el itinerario mínimo es el segmento $S_e(x,y)$.

Si $x_1 > y_1$, el mismo argumento indica que para el caso en que $x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{3}} < y_1$, el itinerario mínimo es el segmento rectilíneo de x a $(x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{3}},\, 0)$ seguido del segmento rectilíneo que une este punto con y. De lo contrario, el itinerario mínimo es $S_e(x,y)$.

Nos falta por resolver el caso en que $x_1 < y_1$, $x_2, y_2 > 0$, o sea ambos puntos están en el mar. Se comprende fácilmente que si ambos puntos están relativamente mucho más cerca de tierra que ellos entre sí, sea más breve el ir desde x a la orilla, o sea a cierto punto $(s_1,0)$, luego ir por la orilla desde $(s_1,0)$ hasta $(s_2,0)$, con

$x_1 \leq s_1 \leq s_2 \leq y_1$, y finalmente ir desde este último punto hasta y. Tendremos que comparar este itinerario con el segmento $S_e(x, y)$ y quedarnos con el de menor tiempo. Primero, veamos cómo se puede optimizar el primer itinerario escogiendo adecuadamente s_1 y s_2. Según acabamos de ver, si $s_1 \neq x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{3}} \leq s_2$, se puede mejorar el itinerario entre x y $(s_2, 0)$ poniendo $s_1 = x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{3}}$. Del mismo modo, si después de esto tenemos $s_1 \leq y_1 - \frac{y_2}{\sqrt{3}} \neq s_2$, podemos mejorar el itinerario entre $(s_1, 0)$ e y poniendo $s_2 y_1 - \frac{y_2}{\sqrt{3}}$. En otras palabras, si

$$x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{3}} \leq y_1 - \frac{y_2}{\sqrt{3}}, \tag{9.1}$$

entonces, el mejor itinerario de x a y que toca tierra consiste en

$$x \to (x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{3}}, 0) \to (y_1 - \frac{y_2}{\sqrt{3}},) \to y \tag{9.2}$$

Supongamos que no se cumple esa condición. En tal caso, el mejor itinerario que toca tierra será tal que toque tierra en un solo punto $(s, 0)$. En efecto, si hay un segmento $(s_1, 0), (s_2, 0)$ en la orilla, con $x_1 \leq s_1 < s_2 \leq y_1$, y el itinerario no es mejorable moviendo s_1, concluimos que necesariamente $s_1 = x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{3}}$, pero entonces $s_2 > y_1 - \frac{y_2}{\sqrt{3}}$, con lo cual el itinerario es mejorable poniendo $s_2 = s_1$. Ahora, es claro que si el itinerario tiene un solo punto en tierra, requerirá más tiempo que el segmento $S_e(x, y)$.

Por consiguiente, si se cumple la condición 9.1, lo que hemos de hacer calcular el tiempo requerido para el itinerario 9.2 es decir

$$\sqrt{\frac{x_2^2}{3} + x_2^2} + \frac{1}{2}(y_1 - \frac{y_2}{\sqrt{3}} - x_1 - \frac{x_2}{\sqrt{3}}) + \sqrt{\frac{y_2^2}{3} + y_2^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 + y_2) + \frac{1}{2}(y_1 - x_1),$$

compararlo con $e(x, y)$ y elegir el más corto de los dos. Si los dos son iguales, los dos son itinerarios mínimos.

Los segmentos se obtienen ahora a partir de estos itinerarios mínimos. Así, si $x_2, y_2 \leq 0$, tenemos $S(x, y) = S_e(x, y)$. Si $x_2 \leq 0$, $y_2 > 0$, tenemos que el segmento viene determinado por la ley de Snell-Descartes. Finalmente, si $x_2, y_2 > 0$, tenemos que distinguir varios casos: Si se cumple la condición 9.1, el itinerario será el descrito por 9.2, el $S_e(x, y)$, o ambos si

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 + y_2) + \frac{1}{2}(y_1 - x_1)$$

es menor, mayor o igual a $e(x, y)$, respectivamente. Si, por el contrario, no se cumple la condición 9.1, el itinerario mínimo es $S_e(x, y)$.

Las líneas se obtienen a partir de los segmentos. En lo que sigue se sobreentiende que $x \neq y$ y que en caso de ser $x_2 = y_2$, se tiene $x_1 < y_1$. Así, vemos que si $x_2 = y_2 < 0$, entonces $L(x, y) = L_e(x, y)$. Si $x_2, y_2 < 0$ y $x_2 \neq y_2$, entonces $L(x, y)$ está formada por la parte de $L_e(x, y)$ que está incluída en la tierra, seguida por una semirrecta en el mar cuyo ángulo con el eje de ordenadas satisface con el de $L_e(x, y)$ la ley de Snell-Descartes. Si $x_2 < 0, y_2 \geq 0$, entonces $L(x, y)$ está formada por dos semirrectas que parten del eje de abscisas, una en tierra, la otra en el mar, pasando la primera por x, la segunda por y, y cumpliendo ambas la ley de Snell.

Si $x_2 = y_2 = 0$, entonces $z \in S_e(x, y)$, o bien $x \in S(y, z)$, o bien $y \in S(z, x)$. Supongamos que $x \in S(y, z)$. Entonces $z_2 \geq 0$ y $z_1 + \frac{z_2}{\sqrt{3}} \leq x_1$. Si, en cambio, $y \in S(x, z)$, entonces $z_2 \geq 0$ y $z_1 - \frac{z_2}{\sqrt{3}} \geq y_1$. Así $L(x, y)$ es la unión de $S_e(x, y)$ junto con dos sectores cerrados, el primero definido por las inecuaciones $z_2 \geq 0,\ z_1 + \frac{z_2}{\sqrt{3}} \leq x_1$, y el segundo por las inecuaciones $z_2 \geq 0,\ z_1 - \frac{z_2}{\sqrt{3}} \geq y_1$.

Si $x_2 = 0$, $y_2 > 0$, hay que distinguir dos casos. Si $x_1 > y_1 - \frac{y_2}{\sqrt{3}}$, entonces $L(x, y)$ está formado por dos semirrectas que parten de x, una en el mar que pasa por y y la otra en tierra, de modo que cumplen la ley de Snell. Si $x_1 \leq y_1 - \frac{y_2}{\sqrt{3}}$, tenemos por una parte el segmento $S(x, y) \subset L(x, y)$. Por otra $y \in S(z, x)$ sii z está en la semirrecta que parte de $\big(y_1 - \frac{y_2}{\sqrt{3}}, 0\big)$ y contiene a y. Finalmente $x \in S(z, y)$ sii:

$$z_2 \geq 0, \quad z_1 + \frac{z_2}{\sqrt{3}} \leq x_1, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}(z_2 + y_2) + \frac{1}{2}(y_1 - z_1) \leq \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2},$$

lo cual define cierta región con interior no vacío.

Nos queda por estudiar el caso en que $x_2, y_2 > 0$. Para abreviar supondremos que $y_2 < x_2$. Si el ángulo que forman el eje de ordenadas con el segmento $S_e(x, y)$ es menor que $\pi/6$, entonces $L(x, y)$ estará formado por dos semirrectas, una en el mar y otra en tierra, que concurren en el eje de ordenadas cumpliendo la ley de Snell. Si ese ángulo es igual a $\pi/6$, entonces $L(x, y)$ está formada por la semirrecta en el mar que contiene a x, y, junto con el conjunto de puntos z que cumplen:

$$z_2 \geq 0, \quad z_1 \geq \frac{x_2}{\sqrt{3}} + x_1, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}(z_2 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1 - z_1) \leq e(x, z).$$

Finalmente, si ese ángulo es mayor que $\pi/6$, ya sabemos que $S(x, y) \in L(x, y)$. Supongamos que $S(x, y)$ consta de un solo segmento, es decir $S(x, y) = S_e(x, y)$. Entonces, $x \in S(z, y)$ sii $S(z, y) = S_e(z, y)$ y $x \in S_e(z, y)$. Esta última condición se puede escribir como $z = x + t(x - y),\ t \geq 0,\ x_2 + t(x_2 - y_2) \geq 0$, con lo cual la condición $S(z, y) = S_e(z, y)$ se expresa como sigue:

$$(1 + t)e(x, y) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\big(x_2 + y_2 + t(x_2 - y_2)\big) + \frac{1}{2}(1 + t)|x_1 - y_1|,$$

de donde se puede calcular rápidamente el final de $L(x, y)$ en "el lado de x". De modo análogo se trata la condición restante $y \in S(z, x)$ sii $S(z, x) = S_e(z, x)$ e $y \in S_e(z, x)$.

Si, por el contrario, $S(z, y)$ está formado por tres segmentos, dos de los cuales forman ángulo $\pi/6$ con el eje de ordenadas y el tercero está incluido en el eje de abscisas, entonces $x \in S(z, y)$ sii

$$z_2 \geq x_2, \quad z_1 + \frac{z_2}{\sqrt{3}} = x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{3}}, \quad e(z, y) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(z_2 + y_2) + \frac{1}{2}(y_1 - z_1).$$

Y $y \in S(z, x)$ sii

$$z_2 \geq y_2, \quad z_1 - \frac{z_2}{\sqrt{3}} = y_1 - \frac{y_2}{\sqrt{3}}, \quad e(z, x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(z_2 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1 - z_1).$$

Estudiaré ahora las bolas. Claro está que:

$$\{x_2 < 0,\ r \leq -2x_2\} \Longrightarrow B(r, x) = B_e\Big(\frac{r}{2}, x\Big),$$
$$\{x_2 > 0,\ r \leq x_2\} \Longrightarrow B(r, x) = B_e(r, x).$$

Supongo ahora que $x_2 < 0$ y $r > -2x_2$. La parte de $B(x, r)$ en la región de ordenadas no positivas es el segmento circular correspondiente del círculo $B_e(2r, x)$. Su intersección con el eje de abscisas es un segmento limitado por los puntos $(x_1 \pm$

$\sqrt{4r^2 - x_2^2},\ 0)$. El ángulo α_m de incidencia del segmento que une x con uno de esos puntos satisface

$$|\cos \alpha_m| = \frac{-x_2}{2r}$$

Vamos a calcular el punto y situado a distancia $d(x, y) = r$, al que se llega desde x por un itinerario mínimo que parte de x con ángulo α respecto al eje de ordenadas. Ese itinerario alcanza el eje de abscisas en el punto $z = (x_1 - x_2 \tan \alpha,\ 0)$. a partir de ahí continúa con un segmento que forma con el eje de ordenadas un ángulo β para el cual $\sin \alpha = 2 \sin \beta$. Calculemos la longitud s de ese segmento. Tendremos:

$$s + d(x, z) = s - \frac{x_2}{2 \cos \alpha} = r \implies s = r + \frac{x_2}{2 \cos \alpha}$$

Por consiguiente, el punto y vendrá dado por

$$y = (x_1 - x_2 \tan \alpha + \frac{s}{2} \sin \alpha,\ s \cos \beta) \tag{9.3}$$

$$= \left(x_1 - \frac{3}{4} x_2 \tan \alpha + \frac{r}{2} \sin \alpha,\ \frac{1}{2} \left(r + \frac{x_2}{2 \cos \alpha} \right) \sqrt{3 + \cos^2 \alpha} \right). \tag{9.4}$$

Así, un modo de dibujar la parte de ordenadas positivas de $B(r, x)$ sería calcular numéricamente, para cada ordenada y_2 correspondiente a un pixel por encima de la orilla, el valor corespondiente de $\cos \alpha$ para el cual la segunda componente de 9.4 es igual a y_2. Mediante ese valor de $\cos \alpha$, calcular la primera componente, que tendrá dos posibles valores, $x_1 \pm a$, según el signo de α. Finalmente, se dibuja el segmento rectilíneo que va de $(x_1 - a, y_2)$ hasta $(x_1 + a, y_2)$. Esto ha de hacerse hasta que y_2 alcanza el valor $r + \frac{x_2}{2}$.

Ahora, supongamos que $x_2 \geq 0$. Hay que examinar tres casos:

(1) $r \leq x_2$.
(2) $x_2 < r \leq \frac{2x_2}{\sqrt{3}}$.
(3) $r > \frac{2x_2}{\sqrt{3}}$.

9.0.1. *Caso 1.* Claramente tenemos entonces que $B(r, x) = B_e(r, x)$.

9.0.2. *Caso 2.* Todas las rectas que parten de x hacia el eje de abscisas con ángulo β mayor o igual que $\frac{\pi}{6}$ salen fuera de la bola $B_e(r, x)$ al llegar o antes de llegar a ese eje. Por tanto, para que una de esas rectas llegue al eje de abscisas habiendo recorrido una distancia marina menor que r es preciso que $\beta \leq \frac{\pi}{6}$. Así, el itinerario mínimo que comienza con un segmento rectilíneo que parte de x con uno de esos ángulos, β, llega al punto $(x_1 \pm x_2 \tan \beta, 0)$, habiendo transcurrido un tiempo $\frac{x_2}{\cos \beta}$, y si $\sin \alpha = 2 \sin \beta$, continúa con un segmento rectilineo hasta el punto

$$\Big(x_1 \pm x_2 \tan \beta \pm (r - \frac{x_2}{\cos \beta}) \sin \alpha, -(r - \frac{x_2}{\cos \beta}) \cos \alpha \Big).$$

Estos puntos, cuando

$$-\sqrt{1 - \frac{x_2^2}{r^2}} \leq \sin \beta \leq \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{r^2}},$$

constituyen la frontera terrestre de $B(r, x)$.

9.0.3. *Caso 3.* Ahora $r > \frac{2x_2}{\sqrt{3}}$. Entonces, además de los itinerarios mínimos que terminan en tierra que hemos estudiado en el caso 2, y que ahora se obtienen para $-\frac{\pi}{6} \leq \beta \leq \frac{\pi}{6}$, hay itinerarios mínimos de longitud menor o igual que r, unos que tocan tierra y otros que no. Los que no tocan tierra están formados por un segmento único de longitud euclidiana menor o igual que r, y su frontera es parte de la circunferencia de radio r centrada en x. Los que tocan tierra están constituidos por dos o tres segmentos, y sólo me voy a ocupar de los de longitud total r. Todos ellos, salvo un par que terminan en la orilla, están formados por tres segmentos. Si denotamos por y el punto final de uno cualquiera de esos itinerarios, su longitud tierra-mar es

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(y_2 + x_2) + \frac{1}{2}|y_1 - x_1| = r.$$

Así, tenemos que la ecuación de la frontera de la parte de bola alcanzada por estos itinerarios es

$$\pm y_1 + \sqrt{3}\, y_2 = 2r \pm x_1 - \sqrt{3}\, x_2.$$

Y esa frontera va desde que $y_2 = 0$ hasta que $e(x, y) = r$. Esto completa las bases para la comprensión y cálculo de las bolas.

10. Métrica del toro llano

Entenderemos aquí por toro llano T_a a un cuadrado en el que se identifican los lados opuestos. Una definición más rigurosa es como sigue: si $0 < a \in \mathbb{R}$, el toro llano T_a es el conjunto cociente de $\mathbb{R}^2$ bajo la relación de equivalencia por la que x e y, puntos de $\mathbb{R}^2$, son equivalentes sii se puede escribir $y = x + (2ia, 2ja)$, donde $i, j \in \mathbb{Z}$. Así, si tomo un punto cualquiera $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ vemos que dado $x \in \mathbb{R}^2$, existe un solo representante de $[x]$ en el cuadrado definido como

$$C_p = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, p_1 - a \leq u < p_1 + a,\; p_2 - a \leq v < p_2 + a\}.$$

A través de ese único representante podemos identificar T_a con C_p. La distancia $d : T_a \times T_a \to \mathbb{R}$, se define como sigue. Si $x, y \in \mathbb{R}^2$, tenemos:

$$d([x], [y]) = \mathrm{Min}\ \{e(\bar{x}, \bar{y}) \,:\, \bar{x} \in [x],\; \bar{y} \in [y]\}.$$

Vamos a ver el modo de calcular $d([x], [y])$. Consideramos el cuadrado C_x, centrado en x. Sabemos que hay un único representante $\bar{y}$ de $[y]$ que pertenezca a C_x. Otro representante cualquiera tendrá la forma $\bar{y} + (2ia, 2ja)$. Pongamos $\bar{y} - x = (pa, qa)$. Entonces tendremos $-1 \leq p, q < 1$. Además

$$\begin{aligned} e\big(x, \bar{y} + (2ia, 2ja)\big)^2 &= a^2\big((p + 2i)^2 + (q + 2j)^2\big) \\ &= e(x, \bar{y})^2 + 4a^2(i(i + p) + j(j + q)) \geq 0, \end{aligned}$$

En efecto, si $i \neq 0$, se tiene que $p + i = 0$ equivale a tener $i = -1$ y $p = 1$, porque $-1 \leq p < 1$. Y si $-1 \neq i \neq 0$, se tiene $i(p + i) > 0$. Lo mismo sucede con j. Esto tiene varias consecuencias. La más importante es que $d(x, y) = e(x, \bar{y})$. Otra es que la mayor distancia que puede existir entre dos puntos de T_a es igual a $\sqrt{2}\, a$. Y otra consecuencia es que si $y \in \mathbb{R}^2$ es tal que $d([x], [y]) = e(x, y)$, entonces cualquier $\bar{y} \in [y]$ tal que $d([x], [y]) = e(x, \bar{y})$ pertenece a la clausura de $C_x, \bar{C}_x$. y por consiguiente, si $\bar{y} \notin C_x$, necesariamente $\bar{y} - x = (p, q)$ siendo $p = a$ o $q = a$. De aquí podemos concluir lo siguiente:

(1) Si $\bar{y} \in C_x$ es de la forma $\bar{y} = x + (-a, q)$, con $-a < q < a$, entonces existe un único otro punto $z \in [y]$ tal que $z \in \bar{C}_x$ y $d([x],[y]) = e(x,z)$, y ese punto es $z = y + (a, q)$.
(2) Si $\bar{y} \in C_x$ es de la forma $\bar{y} = x + (p, -a)$, con $-a < p < a$, entonces existe un único otro punto $z \in [y]$ tal que $z \in \bar{C}_x$ y $d([x],[y]) = e(x,z)$, y ese punto es $z = y + (p, a)$.
(3) Si $\bar{y} = x + (-a, -a) \in C_x$, entonces existen solamente otros tres puntos en $[y]$ para cualquiera de los cuales, digamos z, se cumple $z \in \bar{C}_x$ y $d([x],[y]) = e(x,z)$, y esos puntos son $x + (a, -a),\ x + (a, a),\ x + (-a, a)$.

Estudiaremos ahora los segmentos, que se obtienen como consecuencia de la propiedad siguiente, cuya prueba se deja al lector. Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$ tales que $d([x],[y]) = e(x,y)$. Entonces, si $z = x + t(y - x)$, siendo $t \in [0,1]$, se tiene $[z] \in S([x],[y])$. El recíproco no es cierto porque ya hemos visto que si por ejemplo se tiene $y = (x_1, x_2 - a),\ \bar{y} = (x_1, x_2 + a)$, entonces $[y] = [\bar{y}]$ y así tanto las clases $[x+t(y-x)]$ como las $[x+t(\bar{y}-x)]$, para $t \in [0,1]$ pertenecen a $S(x,y)$. Y así puede ocurrir que $S(x,y)$ esté formado por $[x],[y]$ y la unión de las clases de uno, dos o cuatro segmentos rectilíneos abiertos de longitud $e(x,y)$, y esa unión es disjunta.

Con todos estos resultados, conviene ahora tratar del modo de trabajar cuando se trata de modelizar la métrica del toro llano en una ventana de ordenador. Supongamos, pues, que una cierta ventana de ordenador tiene pixels que se identifican como (i,j), donde $i, j \in \mathbb{Z}$ son tales que $0 \le i, j < 2a$, donde $a \in \mathbb{Z}$. Vamos a tratar de modelizar T_a con esa ventana.

En primer lugar, tenemos que saber calcular $d([x],[y])$, cuando las componentes de x e y son no negativas y menores que $2a$. De acuerdo con lo anterior hemos de hallar el representante $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ de $[y]$ en C_x. Para ello, ponemos $p = y_1 - x_1,\ q = y_2 - x_2$. Si $-a \le p, q < a$, se tiene $y \in C_x$, con lo cual ya hemos alcanzado el objetivo, tenemos $d([x],[y]) = e(x,y)$. Si, por el contrario $p \ge a$ pondremos $\bar{y}_1 = y_1 - 2a$, y consecuentemente $\bar{p} = p - 2a = \bar{y}_1 - x_1$. Si hubiéramos tenido $p < -a$, pondremos $\bar{y}_1 = y_1 + 2a,\ \bar{p} = p + 2a$. Hacemos lo mismo con la segunda coordenada de y. Obtenemos así el representante $\bar{y}$ de $[y]$ en C_x y tendremos $d([x],[y]) = \sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2}$.

No es difícil escribir un algoritmo para proyectar un segmento $S_e(x,y) \subset \mathbb{R}^2$ sobre T_a identificado como el cuadrado $\tau = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le z_1, z_2 < 2a\}$ que representa la ventana del ordenador. Eso es lo que haremos ahora con el segmento $S_e(x,\bar{y})$, que, si bien permanece en C_x, puede salir de τ cuando $\bar{y} \notin \tau$. La advertencia que hay que hacer ahora es que si se anula alguna de las componentes de $\bar{y}$, hemos de añadir la proyección del segmento o segmentos (uno o tres) de $\mathbb{R}^2$ obtenidos cambiando por a cualquiera de las componentes de $\bar{y}$ que se anulen.

Tenemos que estudiar ahora las líneas. Dados $[x],[y] \in T_a$, sabemos por definición que $[z] \in L([x],[y])$, sii $[z] \in S([x],[y])$, o bien $[x] \in S([z],[y])$, o bien $[y] \in S([z],[x])$. El primer caso lo conocemos bien: supongamos que elegimos y de modo que $y \in C_x$. Entonces los puntos del segmento rectilíneo que los une son representantes de $S([x],[y])$. Además, si alguno de los números $|y_1 - x_1|$, $|y_2 - x_2|$ es igual a a, tendremos otro u otros tres segmentos abiertos que parten de x y terminan en los restantes representantes de y situados en $\bar{C}_x$. Los puntos en esos segmentos representan los restantes puntos de $S([x],[y])$. Vayamos al segundo caso, para el cual tendremos $[x] \in S([z],[y])$. Elegimos z, y de modo que $z, y \in C_x$. Tendremos así $d([z],[x]) = e(z,x),\ d([x],[y]) = e(x,y)$, con lo cual $d([z],[y]) = e(z,x) + e(x,y)$. Si $z \in C_y$, entonces $d([z],[y]) = e(z,y)$, lo que implica que $x \in S_e(z,y)$. Si, por el contrario, $z \notin C_y$, entonces, existe un representante z' de $[z]$ en C_y tal que $d([z],[y]) = e(z',y)$. Así, $e(z',y) = e(z,x)+e(x,y)$. Pero entonces $e(z,y) \geq e(z',y) = e(z,x)+e(x,y)$, lo cual sólo puede darse si la desigualdad es una igualdad, y esto demuestra que $x \in S_e(z,y)$, esto es $z \in L_e(x,y)$. Entonces podemos escribir $z = x+t(x-y)$, con $t_x \geq 0$. Pero hemos de tener que $|z_1-y_1|$, $|z_2-y_2| \leq a$. Así

$$(1+t)|x_1-y_1| \leq a \quad \Rightarrow t \leq \frac{a}{|x_1-y_1|}-1,$$

y la desigualdad correspondiente a la segunda coordenada. Por tanto

$$0 \leq t \leq t_x = \text{Min}\,\{\frac{a}{|x_1-y_1|}-1, \frac{a}{|x_2-y_2|-1}\}.$$

Obsérvese que si $S([x],[y])$ está formado por las antiimágenes de dos o cuatro segmentos, se tendrá $t_x = t_y = 0$, lo cual indica que entonces $L([x],[y]) = S([x],[y])$. Haciendo lo mismo ahora para el caso en que $[y] \in S([z],[x])$, llegamos a la conclusión de que $L([x],[y])$ está constituido por las clases de los puntos de un segmento rectilíneo que va desde el punto $x+t_x(x-y)$ hasta el punto $y+t_y(y-x)$.

Quedan por estudiar las bolas de T_a. Puesto que la definición de bola es muy clara, lo único que conviene observar es que el máximo radio de esas bolas es igual a $\sqrt{2}a$. En el ordenador se puede proceder pixel a pixel de τ, calculando su distancia a x, y cambiando el color de ese pixel según sea esa distancia menor, o mayor o igual, que el radio fijado.

11. Métrica de la puerta

Describe la distancia en un espacio separado en dos semiplanos complementarios

$$V^- = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 < 0\}, \qquad V^+ = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 \geq 0\},$$

de modo que para ir de un semiplano al otro es preciso pasar por una "puerta" situada en el origen. Es decir:

$$d(x,y) = \begin{cases} e(x,0)+e(0,y), & \text{si } \{x \in V^-, y \in V^+\}, \text{ o } \{x \in V^+,\, y \in V^-\} \\ e(x,y), & \text{si } x,y \in V^-, \text{ o } x,y \in V^+. \end{cases}$$

No es evidente la desigualdad triangular. Si x,y,z pertenecen a mismo semiplano entonces claramente se cumple. Si dos de ellos, digamos x,y, pertenecen al mismo semiplano, y z al otro, tendremos:

$$\begin{aligned} d(x,y)+d(y,z)-d(x,z) &= e(x,y)+e(y,0)+e(0,z)-e(x,0)-e(0,z) \\ &= e(x,y)+e(y,0)-e(x,0) \geq 0, \\ d(y,z)+d(z,x)-d(y,x) &= e(y,0)+e(0,z)+e(z,0)+e(0,x)-e(x,y) \\ &= 2e(z,0)+e(y,0)+e(0,x)-e(x,y) \geq 2e(z,0) \geq 0. \end{aligned}$$

La desigualdad que falta se obtiene de la primera permutando x por y.

Las bolas se caracterizan fácilmente. Sea V el semiplano al que pertenece x. Si $r \leq e(0,x)$ entonces $B(r,x) = B_e(r,x) \cap V$, $\bar{B}(r,x) = \bar{B}_e(r,x) \cap V$. Si, por el contrario, $r > e(0,x)$, entonces

$$B(r,x) = \big(B_e(r,x) \cap V\big) \cup \big(B_e(e(0,x)-r,0) \cap V'\big)$$

donde V' denota el semiplano al que no pertenece.

En cuanto a los segmentos, si x e y pertenecen al mismo semiplano, entonces $S(x,y) = S_e(x,y)$. Si no, $S(x,y) = S_e(x,0)+S_e(0,y)$, lo cual es evidente.

Estudiamos ahora la línea $L(x, y)$, que puede tener algún caso no evidente a primera vista. Estas son las conclusiones, que el lector puede probar sin gran dificultad.

(1) Si $x = 0$ then $L(x, y) = L_e(0, y) \cap V$, siendo V el semiplano al que pertenece y.
(2) Si x e y pertenecen al mismo semiplano y no están alineados con el origen, entonces $L(x, y) = L_e(x, y) \cap V$, siendo V el semiplano al que x, y pertenecen.
(3) Si x e y pertenecen al mismo semiplano, están alineados con el origen, y $0 \notin S_e(x, y)$, entonces $L(x, y) = \big(L_e(x, y) \cap V\big) \cup V'$, donde V denota el semiplano al que x, y pertenecen, y V' denota el otro semiplano. Si, por el contrario, $0 \in S_e(x, y)$, pero $x, y \neq 0$, entonces $L(x, y)$ es el eje de ordenadas.
(4) Si x e y pertenecen a semiplanos diferentes y ninguno de los dos es el origen, entonces

$$L(x, y) = \big(L_e(x, 0) \cap V\big) \cup \big(L_e(0, y) \cap V'\big),$$

donde V denota el semiplano que al que pertenece x, y V', el otro semiplano.

12. Métrica de la tira perdida

Se supone que se ha eliminado de $\mathbb{R}^2$ la tira $\tau = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 < 1\}$ y luego hemos juntado las dos componentes de lo que queda, pero mantenemos las distancias que inicialmente tenían. Así, si "ahora" dos puntos x, y satisfacen $x_1 \geq 0$, e $y_1 < 0$, o bien $x_1 < 0$ e $y_1 \geq 0$, es decir si x e y pertenecen a distinto semiplano (ver notación en la sección precedente), esos puntos proceden, respectivamente de los puntos $(x_1 + 1, x_2)$, $(y_1 - 1, y_2)$, de manera que les atribuiremos la distancia entre estos dos puntos "antiguos".

Para bolas, segmentos o líneas razonaremos como sigue. La métrica es la misma que la del subconjunto $\mathbb{R}^2 \backslash \tau$, si consideramos que a todos los puntos de V^- se les ha de restar $(1, 0)$, y que a todos los de V^+ se les ha de añadir $(1, 0)$. Para bolas, segmentos y líneas razonaremos con los puntos modificados de ese modo, como si la métrica fuera la euclidiana.

Tendremos, pues, las siguientes propiedades de las bolas. Si $x_1 < 0$, o sea si $x \in V^-$, entonces

$$B(r, x) = \big(B_e(r, x) \cap V^-\big) \cup \big(B_e(r, (x_1 - 2, x_2)) \cap V^+\big)$$

Si $x_1 \geq 0$ entonces

$$B(r, x) = \big(B_e(r, x) \cap V^+\big) \cup \big(B_e(r, (x_1 + 2, x_2)) \cap V^-\big)$$

Para los segmentos tendremos que si x e y pertenecen al mismo semiplano entonces $L(x, y) = L_e(x, y)$. Supongamos que no es así, y que $x \in V^-$, $y \in V^+$. Tomamos el segmento que une $x - (1, 0)$ con $y + (1, 0)$, le quitamos su intersección con τ, y luego añadimos $(1, 0)$ al trozo de segmento que ha quedado en las abscisas negativas, y añadimos $(1, 0)$ al que ha quedado en las abscisas no negativas. El trozo del segmento desde $x - (1, 0)$ a $y + (1, 0)$, que tras el traslado final quedará en V^-, termina cuando $t \in [0, 1]$ cumple que la abscisa de $x - (1, 0) + t\big(y - x + (2, 0)\big)$ es igual a -1. O sea, $x_1 - 1 + t(y_1 - x_1 + 2) = -1$ lo que nos da el valor de t, llamémoslo t^-, y la ordenada h^- de ese extremo del segmento, que serán

$$t^- = \frac{-x_1}{y_1 - x_1 + 2}, \quad h^- = x_2 + t^-(y_2 - x_2),$$

de modo que tendremos finalmente el segmento desde x hasta el punto $(0, h^-)$. De modo análogo, buscamos el valor de t, digamos t^+, para el cual la recta que une los dos puntos "antiguos" tiene asbscisa igual a 1. Tendremos así, como antes, los valores de t^+ y h^+:

$$t^+ = \frac{2 - x_1}{y_1 - x_1 + 2}, \quad h^+ = x_2 + t^+(y_2 - x_2).$$

Así, el trozo de $S(x, y)$ que finalmente queda en V^+ parte del punto $(0, h^+)$ y termina en y.

Para las líneas se harán unos cálculos parecidos teniendo en cuenta que ahora $L(x, y) = L_e(x, y)$ solamente si $x_1 = y_1$. En caso contrario, la línea $L(x, y)$ corta al eje de ordenadas, aunque los dos puntos pertenezcan al mismo semiplano, y da un salto al llegar al eje de abscisas. El cálculo de ese salto y de la pendiente se hacen siguiendo las pautas indicadas.

13. Métrica del transporte radial

Simula el recorrido mínimo que se necesita para llegar de un punto a otro sabiendo que sólo se permiten movimientos radiales hacia o desde el origen. Así, si $S_e(x, y)$ es radial, tenemos $d(x, y) = e(x, y)$, y en caso contrario $d(x, y) = e(x, 0) + e(0, y)$.

Suponiendo en lo que sigue que $r > 0$, se tiene, evidentemente, que si $x = 0$, entonces $B(r, 0) = B_e(r, 0)$. Si $x \neq 0$ y $e(x, 0) \geq r$, entonces

$$B(r, x) = \left\{ tx \,:\, 1 - \frac{r}{e(x, 0)} < t < 1 + \frac{r}{e(x, 0)} \right\}$$

Y si $x \neq 0,\ e(x, 0) < r$, entonces $B(r, x)$ es la unión del segmento anterior con la bola $B_e(r - e(x, 0), 0)$.

Para segmentos tendremos que si $S_e(x, y)$ es radial, entonces $S(x, y) = S_e(x, y)$. Mientras que en caso contrario el segmento es $S(x, y) = S_e(x, 0) \cup S_e(0, y)$.

Para las líneas, y suponiendo de antemano que $x \neq y$, tendremos que si x e y pertenecen a una semirrecta cerrada que parte del origen, entonces $L(x, y) = \mathbb{R}^2$. De lo contrario, $L(x, y) = \{tx \,:\, t \geq 0\} \cup \{ty \,:\, t \geq 0\}$.

References

[1] James N. Bellinger, *Generalized Geometrical Objects in Metric Spaces*, que puede obtenerse en http://www.hep.wisc.edu /~jnb/line.ps