

MANUAL DE Superficies

ANGEL MONTESINOS AMILIBIA

1. INTRODUCCIÓN

Superficies es un programa para visualizar la geometría intrínseca y extrínseca de las superficies en \mathbb{R}^3 y la geometría de un rectángulo en \mathbb{R}^2 dotado de una métrica pseudo-riemanniana. Intenta ser un instrumento docente, pero puede servir para lo que usted quiera, desde diseñar un jarrón hasta el análisis de una singularidad.

Para obtener el dibujo de una superficie, se deben escribir las ecuaciones que la definen y el dominio en que se ha de calcularla; entonces, **Superficies** dibuja la superficie de un modo realista. Una vez dibujada, se puede interaccionar con **Superficies** para obtener datos geométricos. Así, según se mueve el ratón, **Superficies** va mostrando en tiempo real las coordenadas y curvaturas de los puntos recorridos por el ratón. Mediante un cambio en el menú, se pueden obtener las líneas y direcciones asintóticas, las direcciones principales y líneas de curvatura, las direcciones y líneas de curvatura media (aritmética y armónica)¹, geodésicas, bolas geodésicas, aplicación exponencial, líneas de curvatura geodésica constante, y (con suerte) una geodésica entre dos puntos fijados libremente. En el caso de planos pseudo-riemannianos, superficies paramétricas o tubos, se puede también realizar el transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva en la superficie. Se puede visualizar también la superficie en modo “alambre”, lo que a veces ayuda a entender cómo es su disposición en el espacio. La superficie admite dos parámetros libres, que se pueden modificar interactivamente y obtener en tiempo real el resultado del cambio. La superficie se puede también girar, trasladar, ampliar o reducir.

Se puede cambiar la geometría del espacio ambiente \mathbb{R}^3 escogiendo en el menú la opción “Espacio de Minkowski”, de manera que a partir de ese momento, **Superficies** asume que el espacio ambiente tiene la métrica de Minkowski:

$$dx^2 + dy^2 - dz^2.$$

En este caso, se pueden obtener también los “rayos de luz”, es decir las líneas sobre la superficie cuyas tangentes tienen longitud nula.

Se puede definir la superficie de tres maneras, implícita, paramétrica y tubo. Para una superficie implícita, se debe suministrar una o varias funciones en \mathbb{R}^3 , digamos $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$, y fijar el lugar de interés como una esfera o un paralelepípedo $C \subset \mathbb{R}^3$ con lados paralelos a los ejes coordenados, para que **Superficies** dibuje la superficie implícita, o sea el conjunto $\{(x, y, z) \in C : f(x, y, z) = 0\} \cup \{(x, y, z) \in C : g(x, y, z) = 0\}$.

Date: October 16, 2011.

¹Dirección de curvatura media: una dirección en un punto cuya curvatura normal es igual a la curvatura media de la superficie en ese punto. De curvatura armónica media: lo mismo, pero ahora con la media armónica.

En el modo paramétrico, se han de escribir tres funciones $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ que parametrizan la superficie, y fijar el dominio del plano u, v , que debe ser un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados.

Si se opta por definir un tubo, se deben escribir las ecuaciones $x(t), y(t), z(t)$ de una curva, y una función adicional, $r(t)$. El programa dibujará una superficie generada por circunferencias $\mathbf{c}(t)$. Cada una de ellas, $\mathbf{c}(t)$, tiene su centro en el punto $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, tiene radio $r(t)$, y yace en el plano ortogonal a la tangente a la curva en ese punto $\mathbf{p}(t)$.

Finalmente, si se quiere ver la geometría de un rectángulo pseudo-riemanniano U de \mathbb{R}^2 , se habrán de escribir las funciones $E(x, y), F(x, y), G(x, y)$, y fijar el dominio U como en el caso paramétrico. Entonces, **Superficies** supone que en U se ha definido una métrica pseudo-Riemanniana

$$g = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2,$$

y dibuja el rectángulo coloreado de acuerdo con la curvatura de g . Como en el caso de las superficies, se mostrarán en tiempo real las coordenadas y la curvatura, y se podrán obtener rayos de luz, geodésicas, transporte paralelo, etc. Como las líneas de curvatura, las de curvatura media y las asintóticas son ciudadanas de la geometría extrínseca, es decir dependen del modo en que la superficie yace dentro de \mathbb{R}^3 , no estarán entonces habilitadas en el menú.

Se puede guardar la superficie en formato JPG, imprimirla, etc.

Para abreviar, utilizaré la terminología siguiente relativa al manejo del ratón: “Picar” en un sitio significará colocar el puntero del ratón en ese sitio y pulsar entonces su botón izquierdo; “arrastrar” será sinónimo de mover el ratón mientras se mantiene pulsado su botón (izquierdo o derecho, según se indique); tanto a picar como a arrastrar se les puede añadir (Nombre de tecla) para indicar que la operación correspondiente se ha de realizar mientras se mantiene pulsada esa tecla.

2. MODO DE DEFINIR LAS SUPERFICIES

Superficies se abre del modo usual picando dos veces sobre su icono. Aparece entonces una ventana con dos paneles blancos, preparados para dibujar una superficie paramétrica por defecto; el panel izquierdo se denomina “panel de parámetros” y el derecho, “panel de dibujo”. En el menú “Archivo” se hallan las cuatro opciones principales “Superficie paramétrica...”, “Superficie implícita...”, “Plano pseudo-riemanniano...” y “Tubo...”. Cuando se selecciona una de ellas, la ventana se ajusta al tipo de superficie, para mostrar los campos editables apropiados o suprimir o añadir alguno de los paneles. Sólo se puede abrir una ventana cada vez, y por ello, para cambiar de tipo de superficie, **Superficies** le preguntará si desea “Guardar” la superficie dibujada o los cambios realizados. Los archivos creados por **Superficies** tendrán la extensión “.gtv”.

Superficies es bastante liberal acerca del modo de escribir las ecuaciones. Es decir, conoce diferentes nombres de la misma función, por ejemplo “arctan” = “atan”, “sen = sin”; no necesita el símbolo de multiplicación “*” entre factores, ni siquiera un espacio en blanco, salvo en casos muy artificiosos. De todos modos, si usted desea estar más seguro, puede usar cualquiera de las dos cosas, espacio en blanco o signo “*”. **Superficies** reconoce que “pi” o “Pi” o “PI” indican 3.141592... pero no reconoce la letra griega π misma. Eso sí, exige que los argumentos de las funciones vengan encerrados entre paréntesis. Además, requiere que los números

vengan escritos como en los siguientes ejemplos 7.23, -5890.3, 28, 0.2345, etc., de modo que no son admisibles formatos como .35, -0.762E-12. Aparte de las funciones

“más” (+), “menos” (-), “por” (*), “dividido por” (/), y “elevado a” (a^b ó a**b),

se pueden usar las siguientes funciones (un signo igual tras un paréntesis indica las maneras admisibles de escribir la función) :

sqr (“cuadrado”), sqrt (“raíz cuadrada”), sin (= sen), cos, tan (= tg), cot (= cotan = cotg), arcsin (= asin = arcsen = asen), arccos (= acos = arcos), arctan (= atan = arctg), exp, ln (= log), sinh (= sh), cosh (= ch), tanh (= th), arcsinh (= asinh = argsh), arccosh (= acosh = argch), arctanh (= atanh = argtanh = argth), abs (“valor absoluto”).

Se pueden usar también integrales para definir las funciones. Supongamos el caso de que se quiera usar alguna integral en una fórmula de variables independientes x, y, z . La primera condición es que la integral ha de contener al menos una, y a lo sumo dos, de esas variables, por ejemplo en nuestro caso las variables y, z . Entonces habrá que usar el siguiente modelo:

$$\text{int} (f(y,z,r); g(y,z); h(y,z)).$$

Es decir, ha de comenzar con el nombre *int* o *integral* (los dos valen y se pueden usar mayúsculas), seguido por un paréntesis en el cual deben aparecer tres funciones separadas por punto y coma. La primera función es el integrando, y la variable según la cual se integra debe denotarse necesariamente como “r”. La segunda significa el límite inferior, y la tercera el límite superior. Así, el ejemplo anterior significa la función de y y z dada por

$$\int_{g(y,z)}^{h(y,z)} f(y, z, r) dr.$$

Las funciones f, g, h que definen la integral deben escribirse de acuerdo con las reglas dadas arriba, con dos condiciones: dentro de ellas no deben aparecer *parámetros* (ver abajo) ni integrales, es decir, no se permite meter integrales dentro de la definición de otras integrales. Sin embargo, en una fórmula se pueden poner varias. Así, la siguiente sería una fórmula válida para una función de las variables x, y, z :

$$\cos(\text{Int}(x \cos(y r); \sin(x-y); \cos(x+y))) + z \text{Integral}(r x^2; x+z; z^3).$$

Supongamos que se haya escogido la opción por defecto “Superficie paramétrica...” A la izquierda de la parte inferior de la ventana aparecen tres campos editables titulados “x(u,v) = ”, etc. Por defecto, y a guisa de ejemplo, muestran fórmulas que

el usuario puede cambiar. Por ejemplo, escriba

$$\begin{aligned}x(u, v) &= \cos(u) \operatorname{sen}(\pi v), \\y(u, v) &= \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(\pi v), \\z(u, v) &= 2 \cos(\pi v).\end{aligned}$$

Después, fije el dominio escribiendo

$$0 < u < 2\pi, \quad -1 < v < 1$$

Pique en el botón “Dibújala”. En unos instantes **Superficies** dibujará la superficie en el panel de la derecha (panel de la superficie). El panel en blanco a su izquierda representa el dominio de las coordenadas “u” y “v” (panel de parámetros). Ambos paneles están sincronizados, de modo que, salvo alguna excepción de algo que no tenga correspondencia entre los dos, lo que ocurre en uno de ellos se refleja simultáneamente en el otro por medio de la aplicación $\mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ o su inversa.

Cuando el ratón pasa junto a la esquina inferior derecha de alguno de los dos paneles, su icono cambia de forma para indicar que se puede modificar, arrastrando en diagonal, el tamaño de ese panel. He puesto unos límites a sus tamaños, que me parecen razonables (si usted piensa lo contrario, envíeme un e-mail).

Ahora, seleccione “Superficie implícita...” en el menú “Archivo”, escriba una fórmula para una función de las variables “x”, “y”, “z”, fije el cubo (abreviatura incorrecta, pero breve, de paralelepípedo) o la esfera de \mathbb{R}^3 que ha de limitar la superficie y pique en el botón “Dibújala”. Si se cansa de esperar, pique en el botón “Parar” que termina esa faena, o seleccione otra aplicación y deje a **Superficies** trabajando en la sombra. El programa permite dibujar simultáneamente varias superficies de este tipo, hasta un máximo de diez. Para ello basta separar sus ecuaciones mediante el signo &. Por ejemplo, si se introduce el texto siguiente

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad \& \quad x - 2y + z,$$

o de modo equivalente

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)(x - 2y + z),$$

el programa dibujará la esfera unidad centrada en el origen cortada y el plano de ecuación $x - 2y + z = 0$.

Seleccione “Tubo...”, escriba fórmulas para las funciones “x(t)”, “y(t)”, “z(t)”, y “r(t)” y pique en “Dibújala”. Una vez dibujado el tubo, se comportará a todos los efectos como una superficie paramétrica. Se entenderá esto en lo que sigue sin más comentario.

A partir de la versión 5.0, pero sólo para superficies paramétricas y tubos, (y a partir de la versión 6, también en las superficies implícitas) se pueden incluir hasta dos parámetros en las funciones que definen las superficies: sus símbolos han de ser p o q . Para cada uno de ellos se muestran en la parte inferior tres campos editables: para su valor mínimo, para su valor actual, y para su valor máximo. Más abajo se indicará cómo se puede deformar la superficie de modo continuo cambiando en tiempo real esos parámetros. Sin embargo, no se admiten parámetros dentro de las integrales.

Ahora, seleccione “Plano pseudo-riemanniano...”; si lo desea, edite las funciones de las variables “x”, “y” que definen la métrica, y el rectángulo de \mathbb{R}^2 que define el

dominio, y pique en “Dibújala”. **Superficies** coloreará el panel de acuerdo con la curvatura escalar.

Superficies mostrará, en la barra de estado al pie de la ventana, algunos mensajes acompañados de un sonido, para advertirle de cosas de interés, por ejemplo cuando no esté conforme con la sintaxis de alguna función que usted haya escrito.

3. SOBRE EL ASPECTO DE LAS SUPERFICIES EN PANTALLA

En la opción de planos pseudo-riemannianos, **Superficies** colorea el panel, que representa el dominio, para representar gráficamente el valor de la curvatura y si en sus diferentes puntos la métrica es definida (riemanniana), o no (pseudo-riemanniana). Así, cuando es definida, el color se mueve en una gama de rojos para los puntos de curvatura positiva, amarillos para los de curvatura negativa, y con una zona de transición tanto más blanca cuanto más se acerca a cero la curvatura. Para las regiones pseudo-riemannianas, la gama es azul para curvatura positiva, morado para negativa y blanca para curvatura próxima a cero. El cálculo se omite en los puntos en los que la métrica es degenerada y por eso tienen el color del fondo (blanco).

En el caso de superficies paramétricas e implícitas, **Superficies** dibuja cada cara de la superficie en un color diferente, dorado o turquesa por defecto, colores que el usuario puede cambiar mediante el menú. Excepto cuando se está moviendo la superficie, se supone que además de una luz ambiental, hay un foco de luz que ilumina la superficie y produce sombras. El cálculo de las sombras es muy costoso y por ello, mientras se mueve la superficie, el programa lo sacrifica en pro de la continuidad del movimiento.

En superficies paramétricas, surge a veces un problema cuando el programa no puede discriminar qué parte de la superficie está más cerca del observador. En esos casos puede aparecer un mosaico de triángulos adyacentes con colores distintos, dorado o turquesa. Habitualmente, eso es debido a “repeticiones”, y el único remedio que puedo recomendar es limitar el dominio para evitar repeticiones, o bien aumentar la densidad de la “Red” de puntos en el campo editable de ese nombre (la máxima densidad admitida es 127).

Más adelante se indica cómo hacer que **Superficies** dibuje líneas de curvatura, etc. Si después de haber dibujado líneas se necesita limpiarlas para volver a ver la superficie como al principio, se ha de elegir “Restaurar” en el menú “Archivo”, o bien pulsar $\langle \text{Control} \rangle + \langle \text{R} \rangle$. Se puede también ir eliminando una a una las curvas a partir de la última dibujada. Para ello basta pulsar la combinación $\langle \text{Control} \rangle + \langle \text{Z} \rangle$. Si al realizar ese comando el ratón está sobre el panel de dibujo de curvas, se eliminará la última curva de ese panel; si está en el panel de dibujo de superficies, se eliminará la última curva pintada sobre la superficie; si el ratón no estaba en ninguna de las dos, se elimina la última curva pintada en cada panel. Para poder redibujar el panel o para imprimir la superficie con buena resolución, esas líneas se guardan en memoria y pueden llegar a ocupar bastante espacio. Por eso, he puesto un límite, que, de superarse, origina un mensaje de aviso en la barra de estado al pie de la ventana. Cuando se ejecuta “Restaurar”, el programa libera toda esa memoria y puede empezar de nuevo a almacenar curvas.

Si la superficie contiene en el texto de las funciones que la definen alguno de los parámetros p o q , aparecerá en el borde de la parte superior del panel izquierdo (para el parámetro p) o en el de la izquierda (para q) una pequeña marca de color

marrón. Picando sobre ella y arrastrándola, se puede cambiar en tiempo real el valor del parámetro y ver el cambio originado en la superficie: para p , la posición extrema a la izquierda corresponde a su valor mínimo, y la de la derecha, a su valor máximo de acuerdo con los valores introducidos en los campos editables correspondientes. Para q esas posiciones son la superior para el valor máximo y la inferior para el mínimo. Al cambiar esas posiciones, los nuevos valores del los parámetro quedan actualizados inmediatamente en el campo editable correspondiente.

Una vez dibujada una superficie, se puede usar la opción “Guardar dibujo 2D en JPEG...” del menú “Archivo” para guardar en ese formato lo que esté dibujado en el panel de parámetros; y la opción “Guardar dibujo 3D en JPEG...” para guardar el dibujo del panel de la superficie. Análogamente, se muestra la opción de “Imprimir dibujo 2D...” o “Imprimir dibujo 3D...”.

4. PREFERENCIAS

En el menú “Preferencias” aparece en primer lugar la opción entre el espacio ambiente (\mathbb{R}^3) euclídeo o de Minkowski. En el primer caso, el producto escalar es el usual, es decir $(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$, y en el segundo es $(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = a_1a_2 + b_1b_2 - c_1c_2$, de manera que la tercera coordenada actúa como “tiempo” en el sentido de la Relatividad.

Cuando se dibujan líneas, hay tres opciones: se puede pedir que las líneas se muestren en ambas caras de la superficie, o bien en una a escoger, que convencionalmente se llaman en el menú anverso y reverso.

En superficies paramétricas o implícitas, se puede escoger entre mostrar o no un cubo que encierra la superficie (paramétricas).

En planos pseudo-riemannianos y en superficies paramétricas estará habilitado el ítem “Mostrar círculo unidad”; una vez seleccionado, se verá en el panel de parámetros, a medida que se mueve el ratón sobre ese panel o sobre la superficie, el “círculo unidad” del plano tangente (en los puntos pseudo-riemannianos, el “círculo” incluye también los vectores cuya longitud al cuadrado vale -1, y así consiste en dos hipérbolas). Se puede modificar el tamaño del círculo manteniendo pulsada la tecla \langle Control \rangle y pulsando entonces \langle Flecha abajo \rangle para disminuirlo, \langle Flecha arriba \rangle para aumentarlo, o \langle Flecha izquierda \rangle para volver al tamaño inicial.

Cuando la ventana es una superficie, bajo “Preferencias” hay un submenú encabezado “Vista”. Dentro de él se muestran las opciones “Estándar” y “Alambre”. La primera es el modo por defecto, un dibujo realista con sombras. La segunda dibuja simplemente un modelo de alambre. En ambas opciones, se puede girar la superficie en tiempo real arrastrando con el botón derecho; si, además de arrastrar se mantiene apretada \langle Control \rangle , la superficie se trasladará de un sitio a otro; si, en cambio, se mantiene apretada \langle Mayúsculas \rangle , se aumentará o disminuirá el tamaño de la superficie al arrastrar hacia arriba o hacia abajo.

Se puede cambiar la gama de colores utilizada al representar la superficie. En primer lugar, se puede pedir “Color por iluminación”, “Color por curv. de Gauss” o “Color por curv. media” y “Color por signo curvatura Gauss”. La idea básica es la siguiente. En el modo natural o por “iluminación”, la apariencia tridimensional viene producida principalmente por la iluminación. El programa calcula la iluminación de cada pixel de la superficie y le asigna un valor desde 1 (oscuridad) hasta 511 (máxima iluminación), busca el color correspondiente en una tabla de

511 colores, y dibuja el pixel en ese color. Esa tabla de colores es, pues, la “gama” de colores de la superficie. En realidad, como el programa distingue entre las dos caras de la superficie, utiliza una gama para el anverso y otra para el reverso.

De modo análogo, el programa utiliza una gama para el color según la curvatura de Gauss y otra para el color según la curvatura media (ahora no se distingue entre las dos caras de la superficie, y sólo muy levemente la presencia de iluminación y de sombras). Para la última opción, “Color por signo curvatura Gauss”, se usa una gama azul en las regiones elípticas (curvatura de Gauss positiva) y otra roja para las hiperbólicas (curvatura de Gauss negativa).

Bajo esas tres opciones aparece el ítem “Paletas”. Al pulsar en él se abre una ventana con cinco fichas, con las cuales se puede modificar la paleta a utilizar en cada tipo de coloración. Las dos primeras corresponden a las dos caras del color “por iluminación”. La tercera y cuarta, para el color por curvatura de Gauss y curvatura media. Los colores para el color según el “signo de la curvatura de Gauss” no se pueden modificar. Salvo en la quinta paleta, destinada al color de las curvas, a la izquierda aparece un hexágono regular coloreado, con un punto (de control) dibujado como un círculo negro: es la vista, desde “arriba” del cubo de color RGB (Red = rojo, Green = verde, Blue = azul); en medio, una regleta con un cursor; a la derecha, un polígono (cuadrilátero o hexágono irregular) en el cual hay una curva con varios puntos de control. Uno de sus extremos es un círculo y representa el primer color (número 1) de la gama; el otro, un cuadrado y representa el número 511; los puntos de control intermedios representan los colores 72, 144, 216, 288, 360, 436; los demás colores de la gama se distribuyen de una manera más o menos uniforme en el correspondiente intervalo. Así, el color número N de la gama es el color del polígono que cae bajo el punto N de la curva.

Se puede modificar la curva arrastrando con el botón izquierdo del ratón cualquiera de sus puntos de control. Si la gama que se está modificando corresponde al tipo de color seleccionado para la superficie, los cambios en la curva se reflejan instantáneamente sobre la superficie. También (si la gama corresponde al tipo de color de la superficie), se puede cambiar el color de fondo simplemente picando con el botón izquierdo del ratón sobre cualquier punto coloreado de la ventana de selección de color, mientras se mantiene apretada la tecla <Control>.

El hexágono de color y la regleta son medios para cambiar el polígono coloreado sobre el que se define la curva (y por tanto, la gama). El punto de control del hexágono, junto con el centro del cubo RGB, determinan una recta (la llamaremos el “eje” de ese punto de control). La posición del cursor en la regleta vertical determina un ángulo entre 0 y 2π , y ese ángulo determina la orientación de un plano que contiene al citado eje. Ese plano corta al cubo RGB según un polígono, cuya frontera se dibuja sobre el propio cubo. El interior de ese polígono queda dibujado a la derecha de la ventana para poder fijar sobre ese plano la gama deseada mediante la curva de puntos de control.

La quinta pestaña de la ventana “Paletas” se destina al color de las curvas. Su funcionamiento es muy simple; moviendo el punto de control del hexágono, se modifica el tono del color; moviendo entonces el punto de control de la regla, se modifica el brillo de ese color. A partir de ese momento, todas las curvas bajo el menú “Geometría” (excepto los segmentos inicial y final del transporte paralelo y las intersecciones de planos con la superficie que aparecen al usar los ítems de

“Corte con plano”, “Curvaturas normales” y “Teorema de Meusnier”) se dibujarán en el color fijado, hasta que se proceda a un nuevo cambio.

Los dos menús restantes, “Geometría” y “Dibujar malla” sólo se habilitan cuando la superficie está dibujada en el modo estándar.

5. GEOMETRÍA

A medida que el usuario mueve el ratón sobre la superficie o sobre el panel de parámetros, se muestra información sobre el punto señalado por él, en los campos titulados “Coordenadas” y “Curvaturas”. En “Coordenadas” aparecerán las variables de entrada (u y v en superficies paramétricas; x e y en planos pseudo-riemannianos, t en tubos) y las variables de \mathbb{R}^3 en los casos de superficies. En “Curvaturas” se tendrá la siguiente clave: K significa curvatura de Gauss para superficies o curvatura escalar para planos pseudo-riemannianos; H será curvatura media; k_1 y k_2 serán las curvaturas principales. Cuando el punto sobre el que está el ratón es pseudo-riemanniano, se denota este hecho precediendo el valor de K con un grueso punto negro.

En el menú “Geometría” sólo un ítem puede estar activo en cada momento. Por defecto no hay nada seleccionado. Si se selecciona “Líneas coordenadas”, al picar con el ratón en el panel de parámetros o en el panel de dibujo, **Superficies** dibuja las líneas coordenadas que pasan por ese punto (plano pseudo-riemanniano o superficie paramétrica), o la intersección con la superficie de los planos paralelos a los planos coordenadas, que pasan por el punto (implícitas).

El siguiente ítem “Rayos de luz” funciona con planos pseudo-riemannianos o con la opción “Espacio de Minkowski”. Seleccione “Rayos de luz”. Según se mueve el ratón, si hay rayos de luz que pasan por el punto, **Superficies** dibujará dos pequeños segmentos que representan las direcciones de longitud nula del plano tangente en ese punto. Si se pica con el ratón en uno de esos puntos, se dibujarán los rayos de luz que pasan por él.

El programa se comporta de modo similar cuando, en una superficie, se selecciona “Líneas de curvatura”, “Líneas de curvatura media”, “Líneas de curvatura armónica media” o “Líneas asintóticas”. Según se mueve el ratón, se dibujan las direcciones principales y al picar, las líneas de curvatura, en el primer caso; y las direcciones de curvatura media y al picar, las líneas de curvatura media, en el segundo o tercer caso. Direcciones principales y direcciones de curvatura media distinguidas sólo existen cuando el punto no es umbílico y en el caso de las de curvatura armónica media, sólo si la curvatura de Gauss no es negativa. Direcciones asintóticas sólo existen cuando la curvatura de Gauss no es positiva. Como en el caso de la circunferencia unidad, se puede reducir o aumentar el tamaño de los segmentos que indican las direcciones mediante la tecla (Control) y las teclas de flecha.

En algunos casos esas líneas son cerradas, de modo que nunca terminan; el programa procura detectar ese fenómeno y detiene el cálculo cuando se alcanza el punto inicial. Si no lo hace, tendrá que picar en el botón “Parar” para detener la rama que se está dibujando en ese momento (se dibujan cuatro ramas por cada punto inicial).

Existe la opción de dejar que el programa dibuje las curvas indefinidamente hasta que encuentre un obstáculo o el usuario lo detenga. Esto se consigue manteniendo

pulsada la tecla \langle Mayúsculas \rangle en el momento de picar con el ratón para iniciar la curva.

A continuación aparecen varias opciones relacionadas con las geodésicas. Todas ellas trabajan del mismo modo: supóngase que se ha seleccionado una de ellas, por ejemplo “Geodésicas”. Pique con el ratón sobre la superficie (o sobre el panel de parámetros) y arrastre; se verá un segmento que comienza en el punto picado inicialmente y que se extiende hasta el punto actual; ese segmento significa un vector del plano tangente a la superficie en el punto inicial. Al soltar el ratón se dibuja la geodésica cuya tangente inicial sea ese segmento. En ciertas ocasiones, por ejemplo cuando la superficie es compacta, la geodésica no termina nunca, de modo que se habrá de picar en el botón “Parar” para detenerla.

Por defecto, el programa dibuja la geodésica en el sentido marcado por la condición inicial. Si se desea que la dibuje en ambos sentidos, es decir hacia adelante y hacia atrás, manténgase pulsada la tecla \langle Alt \rangle mientras se fija la condición inicial.

De manera parecida se puede obtener la “Aplicación exponencial”, que es el resultado de aplicar la aplicación exponencial al vector tangente determinado por el ratón: se trata de la traza de la geodésica que tiene ese segmento como condición inicial y cuya longitud es la longitud de ese mismo segmento.

“Geodésica entre puntos” procura hallar y dibujar la geodésica de menor longitud que une el primer punto y el último señalado por el ratón, y que se mantiene dentro del dominio de la superficie. Nótese que esa geodésica no siempre existe; y, de existir, tal vez **Superficies** no sea capaz de encontrarla; y, si la encuentra, que quizás no minimice la distancia.

Supóngase que se dibujaran todas las geodésicas que parten de un punto, terminando cada una al alcanzar una longitud fijada, por ejemplo r_0 . Los puntos finales de esas geodésicas forman una curva, llamada “Bola geodésica” centrada en el punto inicial y de radio r_0 . En **Superficies** se fijará el punto inicial picando con el ratón, y el radio como la longitud del segmento tangente que une el punto inicial con el punto final al soltar el ratón. Cuando el punto es pseudo-riemanniano, **Superficies** dibuja la bola cuyo radio al cuadrado es r_0^2 , y también la bola cuyo radio al cuadrado es $-r_0^2$.

Una vez seleccionada la opción “Líneas de curv geod const”, al picar, arrastrar y soltar el ratón se obtiene la línea de curvatura geodésica constante cuya posición y dirección inicial es el segmento fijado por el ratón, y cuyo radio de curvatura geodésica es igual a la longitud de ese segmento. Para cambiar el sentido de giro inicial, es decir para que la curva pase de torcer a la izquierda a torcer a la derecha hay que mantener pulsada \langle Alt \rangle mientras se pica y arrastra el ratón.

Excepto para superficies implícitas, se dispone también de la opción “Transporte paralelo”, que ha de ejecutarse siempre en el panel de parámetros. Si se pica con el ratón, aparece un pequeño segmento que apunta a la derecha; a medida que se arrastra el ratón, éste va dejando la huella de su paso describiendo una curva verde, y en la posición presente se verá un pequeño segmento que es el resultado de transportar el segmento inicial hasta el punto actual. En superficies paramétricas se verá también la imagen del transporte en el panel de dibujo.

Cuando las funciones que definen la superficie paramétrica o tubo incluyen alguno de los parámetros p o q , y se cambian los parámetros como se ha indicado, si hay líneas ya dibujadas sobre la superficie, se verá que las líneas acompañan a la superficie en su movimiento, pero que su color pasa a gris. Se indica así que esas

líneas, en principio, cambian su carácter; es decir, si antes eran rojas y representaban por ejemplo líneas de curvatura, ahora dejarán de serlo y por eso se pintan en gris. Se podrán pintar nuevas líneas, cada una en su color, que perderán si se vuelven a cambiar los parámetros p o q .

Para superficies, todavía quedan otros tres items, “Corte con plano”, “Curvaturas normales” y “Teorema de Meusnier”. “Corte con plano” permite cortar la superficie con uno o más planos, dejando visible sólo el trozo de superficie que está a uno de los lados del plano. Al seleccionar esa opción, se muestra la superficie rodeada de una esfera, con una circunferencia dibujada sobre ésta (que aparece como una elipse); el plano de corte es el plano que contiene a esa circunferencia; si el plano corta la superficie, se verá la línea de corte dibujada en color blanco. Cuando el ratón pasa cerca de esa circunferencia, cambia su color a naranja, indicando así que se puede trasladar el plano de corte paralelamente a sí mismo al arrastrar con el ratón. Cuando el ratón no está junto a la circunferencia, al arrastrar se consigue girar el plano de corte. De este modo, el plano de corte se puede colocar en cualquier posición posible. El botón de dibujo muestra entonces la leyenda “Córtala”; al picar en él, se verá que de la superficie se ha suprimido toda la parte que está a un lado del plano. Para poder prever qué lado se suprime, obsérvese que la circunferencia que rodea la superficie tiene color gris a un lado del plano y amarillo al otro; pues bien, después de cortar, permanecerá la parte de superficie que está en el lado amarillo.

Se puede repetir la operación de corte. Una vez cortada la superficie una o más veces, se verá un botón con la leyenda “Sin cortes”. Al picar en él, se vuelve a dibujar la superficie tal como estaba inicialmente, sin corte alguno. En el caso de superficies paramétricas, el programa sombrea la parte del dominio cuya imagen ha sido eliminada por los cortes.

Con la opción “Curvaturas normales” se puede cortar la superficie según un plano definido por un vector tangente a la superficie y por un vector ortogonal al anterior. Para ello, basta picar en un punto de la superficie y arrastrar. Se verá un pequeño círculo rojo en el primer punto picado, una recta azul que lo une con la posición actual del ratón, una recta roja que es la normal a la superficie en el punto inicial y un disco traslúcido gris azulado que contiene a esas dos líneas y corta a la superficie según una línea blanca, llamada sección normal de la superficie en la dirección tangente definida por el ratón (línea azul). Bajo el campo “Curvaturas” se verá un valor adicional titulado k_n , que es la curvatura de la sección normal, también llamada curvatura normal en la dirección azul. Al soltar el ratón, aparecerá la leyenda “Córtala” en el botón de dibujo; al picar en él, se cortará la superficie de modo que desaparecerá la parte que queda a la derecha de la línea azul. Todo esto se puede realizar también (paramétricas, tubos) en el panel de parámetros. Cuando el ratón se mueve sobre la recta tangente o sobre la recta normal, su color cambia a naranja, indicando que se puede entonces modificar, arrastrando, la posición de esas líneas y cambiar así el plano de corte; la curvatura normal se actualiza simultáneamente.

La opción “Teorema de Meusnier” sirve para ilustrar ese teorema (aunque también lo hace la opción anterior), y mostrar algunos otros detalles. Llamemos S a la superficie. Pique un punto en S , al que llamaremos P , y arrastre. Al soltar el ratón suceden varias cosas: primero, la dirección tangente a S determinada por el arrastre se dibuja como una recta azul; para visualizar mejor los demás elementos, la superficie aparecerá cortada por un plano que pasa por P y es ortogonal a la

línea azul. Ese plano contiene a la normal a S en P y a la recta, también tangente a S en P , que es ortogonal a la línea azul; esa recta se dibuja en color gris; se muestra medio disco gris traslúcido que contiene a la línea azul y a la normal a S en P , y que corta a S según una línea blanca que llamaremos c . El borde recto del semi-disco gris es inicialmente la recta normal a S en P . A lo largo de ese borde se verán dos círculos rojos y una flecha roja. Uno de los círculos permanece fijo en P ; el otro representa el centro de curvatura de c en P ; y la flecha, el vector curvatura de c en P . La longitud de esa flecha será la curvatura k de c en P y la distancia de P al otro círculo rojo será el inverso de esa curvatura. Por la punta del vector curvatura se verá una recta azulada paralela a la línea gris (que, como se recuerda, es tangente a S en P). Ahora, si se mueve el ratón sobre el borde recto del semidisco, se verá que el vector curvatura normal cambia de color, indicando que entonces se puede modificar, arrastrando, la orientación de ese disco, de modo que se construyen así diferentes secciones de S en P , todas ellas conteniendo la misma tangente, la línea azul. Simultáneamente, se verá que los centros de curvatura de c se mueven describiendo una circunferencia y que la punta del vector curvatura de c permanece sobre la línea azulada. Como las proyecciones ortogonales de todos los puntos de esa recta sobre la normal a S en P caen sobre el mismo punto, vemos que todas las secciones planas de la superficie que comparten la misma línea tangente en P tienen la misma curvatura normal (Teorema de Meusnier). Se verá también otro círculo rojo que marca la proyección ortogonal de la punta del vector curvatura de c sobre el plano tangente a S en P ; todos esos círculos caen sobre la línea gris. El vector que une P con ese círculo es el vector curvatura geodésica de c en P .

Los dos últimos items bajo el menú “Geometría” sirven para dibujar las dos, una o ninguna de las foliaciones (aquí una foliación significa una familia de curvas que no se cortan) que constituyen los rayos de luz, o las líneas asintóticas, o las de curvatura, o las de curvatura media aritmética o armónica.

Si se selecciona cualquier item en el menú “Dibujar malla” (sólo para superficies) se obtendrá una red coordenada (superficies paramétricas), o bien una malla formada por las intersecciones de la superficie con planos, igualmente espaciados, paralelos a los planos coordenados. El tipo de líneas que se dibujarán se puede escoger mediante las opciones en la parte de arriba del menú, y el número de líneas o planos en cada dirección es el número que aparece en el item escogido de la parte inferior del menú.

6. NOTAS FINALES

Este programa se ha escrito en lenguaje Embarcadero Delphi, compilador XE2. Su uso es libre. El programa, su código fuente, este manual, algunos ejemplos y otros programas se pueden obtener gratuitamente en el sitio:

<<http://www.uv.es/montesin/>>

REFERENCES

- [1] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [2] B. O’Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1983.

7. APÉNDICE: TABLA DE ATAJO

Finalidad	Ratón izq.	Ratón der.	Arrastrar	Teclas
Borrar curvas				<Ctrl> + <R>
Borrar última curva				<Ctrl> + <Z>
Curvas 1º orden	•			
Curves 2º orden	•		•	
Transporte paralelo	•		•	
Curvas sin parar 1º ord.	•			<Mayúsculas>
Geodésica ambos sentidos	•		•	<Alt>
Cambiar giro curv geod cte	•		•	<Alt>
Aumentar radio círculo				<Arriba>
Disminuir radio círculo				<Abajo>
Radio círculo por defecto				<Izquierda>
Girar superficie		•	•	
Trasladar superficie		•	•	<Ctrl>
Aument-dismin superficie		•	•	<Mayúsculas>
Color fondo superficie	Paletas color			<Ctrl>
Aumentar tamaño aspas				<Arriba>
Disminuir tamaño aspas				<Abajo>
Tamaño aspas por defecto				<Izquierda>

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA, UNIVERSIDAD DE VALENCIA, VICENTE ANDRÉS
 ESTELLÉS, 1, 46100 VALENCIA, ESPAÑA
E-mail address: montesin@uv.es