C. R. Acad. Sci. Paris, t. 306, Série I, p. 791-794, 1988

Physique mathématique/*Mathematical Physics*

Sur les repères symétriques lorentziens

Bartolomé COLL et Juan Antonio MORALES

Résumé — Définition et propriétés des repères symétriques. Caractérisation des variétés admettant des repères symétriques naturels.

On the lorentzian symmetric frames

Abstract — *Definition and properties of the symmetric frames. Characterization of the manifolds admitting holonomic symmetric frames.*

1. Dans le but de transcrire à l'espace-temps de la Relativité certaines situations physiques d'intérêt, nous introduisons et étudions le concept de repère symétrique.

Un *repère symétrique* est ici, par définition, un repère tel que ses vecteurs sont métriquement indiscernables (modules égaux, produits scalaires mutuels égaux). Existe-il de tels référentiels en métrique non elliptique? Nous montrons qu'il en existe seulement si la métrique est lorentzienne, et obtenons alors le groupe maximal des transformations qui les relient.

Nous considérons ensuite les *repères symétriques naturels* (associés à des cartes locales). Notre résultat fondamental est que de tels référentiels existent dans *tous* les espace-temps qui admettent une synchronisation ombilicale conformément plate. Comme cela est le cas pour la plupart des univers cosmologiques, on peut penser que les coordonnées symétriques associées à ces repères joueront un rôle intéressant en Cosmologie.

2. Nous dirons que p vecteurs sont *métriquement permutables* si leurs modules, ainsi que leurs produits scalaires mutuels, sont égaux. Un *repère symétrique* est un repère de vecteurs métriquement permutables.

Pour analyser le nombre maximal de vecteurs permutables admis par une métrique, nous supposerons d'abord que la métrique considérée admet, au moins, un repère symétrique. En dimension $m \equiv n+1$, soit $\{\xi_A\}_{A=1}^m$ ce repère, et soit $\{\Theta^A\}_{A=1}^m$ son co-repère dual algébrique : $\Theta^A(\xi_B)=\delta_B^A \equiv \delta_{AB}$; la métrique $g=g_{AB}\,\Theta^A \otimes \Theta^B$ s'écrit alors :

$$g_{AB}=(\alpha-\beta)\,\delta_{AB}+\beta\, 1_A\, 1_B \tag{1}$$

où $\alpha \equiv g(\xi_A, \xi_A)$, $\forall A$, $\beta \equiv g(\xi_A, \xi_B)$, $\forall B \neq A$ et 1_A est le m-uple de $1's$.

A partir de (1) on peut montrer, par récurrence sur l'expression reliant entre eux deux mineurs principaux consécutifs, le lemme suivant :

LEMME. — *Le mineur principal d'ordre $k+1$ de g_{AB} peut s'écrire :*

$$\Delta_{k+1}=(\alpha+k\,\beta)(\alpha-\beta)^k. \tag{2}$$

Une conséquence directe importante est le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *g_{AB} est régulière si, et seulement si, on a*

$$D \equiv (\alpha+n\,\beta)(\alpha-\beta) \neq 0. \tag{3}$$

Note présentée par André LICHNEROWICZ.

0249-6291/88/03060791 $ 2.00

De (2) et (3), et moyennant les théorèmes de signature de Jacobi et de Gundelfinger, on déduit [$\mathrm{sg}(x)$ désignant le signe de x] :

THÉORÈME 1. — *En dimension $m \equiv n+1$, la signature σ des métriques admettant un repère symétrique est donnée par :*

$$\sigma = \mathrm{sg}(\alpha + n\beta) + n\,\mathrm{sg}(\alpha - \beta). \tag{4}$$

D'où l'on déduit, en particulier :

COROLLAIRE. — *Les seules métriques non elliptiques admettant des repères symétriques sont les métriques lorentziennes.*

En fait, il résulte de (4) que la métrique g est elliptique (resp. lorentzienne) si, et seulement si, $\mathrm{D} > 0$ (resp. $\mathrm{D} < 0$).

Nous avons supposé jusqu'ici que la métrique admet un repère symétrique. A partir des résultats ainsi obtenus, et en les appliquant à des sous-variétés linéaires convenablement choisies pour une métrique générale de type (p, q), $p+q=m$, $p-q=\sigma$, on peut montrer :

THÉORÈME 2. — *Le nombre maximal* N *de vecteurs métriquement permutables admis par une métrique de type (p, q) est donné par :*

$$\mathrm{N} = \max\{p, q\} + 1. \tag{5}$$

Notons que, à dimension égale, ce sont les métriques elliptiques celles qui admettent le plus grand N : les vecteurs correspondant sont les $\mathrm{N} = m+1$ rayons d'un $(m+1)$-èdre régulier.

3. La matrice inverse g^{AB} de g_{AB} est de la forme

$$g^{\mathrm{AB}} = (\mu - \nu)\,\delta^{\mathrm{AB}} + \nu\, 1^{\mathrm{A}}\, 1^{\mathrm{B}} \tag{6}$$

où $1^{\mathrm{A}} \equiv \delta^{\mathrm{AR}}\, 1_{\mathrm{R}}$, et μ et ν sont donnés par :

$$\mu = \mathrm{D}^{-1}\{\alpha + (n-1)\beta\}, \qquad \nu = -\mathrm{D}^{-1}\beta. \tag{7}$$

Il en résulte :

PROPOSITION. — *Le dual algébrique d'un repère symétrique est un repère symétrique.*

Soit ξ un vecteur arbitraire. On appelle *cône métrique* d'axe (la direction définie par) ξ, le lieu géométrique des directions formant avec ξ un angle constant. Il est aisé de voir que le cône métrique qui contient les m directions définies par les vecteurs d'un repère symétrique $\{\xi_{\mathrm{A}}\}$ est unique, son axe ξ étant donné par $\xi \equiv 1^{\mathrm{A}}\xi_{\mathrm{A}}$. Soit $\Theta \equiv 1_{\mathrm{A}}\Theta^{\mathrm{A}}$ l'axe du cône correspondant au dual algébrique $\{\Theta^{\mathrm{A}}\}$ de $\{\xi_{\mathrm{A}}\}$. On a alors :

PROPOSITION. — *L'axe du dual algébrique d'un repère symétrique est le dual métrique de son axe.*

C'est-à-dire $\Theta \equiv g(\xi)$. En outre, en appliquant (4) au cas lorentzien, il résulte $\mathrm{sg}\, g(\xi, \xi) = -\mathrm{sg}\, \sigma$, d'où il s'ensuit :

PROPOSITION. — *En métrique lorentzienne de dimension $m > 2$, l'axe d'un repère symétrique est une direction nécessairement temporelle.*

4. Il est clair que l'ensemble des transformations reliant les repères symétriques est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$. Pour l'obtenir, le résultat suivant est utile :

LEMME. — *La projection d'un repère symétrique sur l'hyperplan orthogonal à son axe, constitue un ensemble de $m = n+1$ vecteurs métriquement permutables pour la métrique elliptique n-dimensionnelle induite sur l'hyperplan.*

Dénotons par $\xi_A^\perp$ les projetés orthogonalement à ξ des m vecteurs ξ_A. Sur l'hyperplan $\Pi_\perp$ orthogonal à ξ, les vecteurs $\xi_A^\perp$ constituent, comme nous l'avons déjà indiqué, les rayons d'un m-èdre régulier. Ainsi, les seules transformations de $\Pi_\perp$ qui maintiennent le caractère métriquement permutable des m vecteurs $\xi_A^\perp$ sont les rotations et les dilatations. Ces dernières, $\bar{\xi}_A^\perp = a\,\xi_A^\perp$, correspondent, dans l'espace complet, à des transformations du type $\bar{\xi}_A = a\,\xi_A + b\,\xi$, et il en résulte :

THÉORÈME 3. — *Toute transformation entre repères symétriques est le produit d'une transformation orthogonale, d'une dilatation et d'une transformation du type*

$$\bar{\xi}_A = \xi_A + \frac{\lambda - 1}{m} 1^R \xi_R, \qquad \lambda \neq 0. \tag{8}$$

Les transformations orthogonales ne laissent pas invariant, en général, l'axe d'un repère symétrique, mais respectent, tout comme les dilatations, le caractère causal de ses vecteurs. Les dilatations et les transformations du type (8) laissent invariant l'axe, ces dernières pouvant encore modifier le caractère causal des vecteurs du repère.

La transformation (8) est règulière. Il suffit pour le voir de noter que son expression matricielle Λ_B^A est de la forme (1) :

$$\Lambda_B^A = (\lambda + n)\, m^{-1}\, \delta_B^A + (\lambda - 1)\, m^{-1}\, 1_B\, 1^A,$$

En lui appliquant alors la relation (2) pour $k = n$ il résulte $\det \Lambda_B^A = \lambda$.

Sous une telle transformation, les composantes $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ de la métrique $\bar{g}_{AB}$ sont reliées aux composantes α, β de g_{AB} par

$$\bar{\alpha} - \alpha = \bar{\beta} - \beta = \frac{1}{m} (\alpha + n\,\beta)(\lambda^2 - 1).$$

5. D'après le corollaire du théorème 1, en chaque point d'une variété lorentzienne on peut construire des repères symétriques, mais les champs de repères correspondant dans un ouvert seront, en général, non holonomes. Nous allons caractériser ici les variétés lorentziennes particulières qui admettent des champs de *repères symétriques naturels* (ou *holonomes*) c'est-à-dire, pouvant être obtenus comme les repères naturels associés à certaines cartes locales. Dans ce but, l'analyse des propriétés de l'axe est primordiale; en effet, il est aisé d'établir que :

PROPOSITION. — *L'axe d'un repère symétrique naturel est une direction intégrable et de distorsion nulle.*

Le langage « cinématique » de cette proposition admet, en termes de la *synchronisation* (feuilletage spatial de codimension 1) associée au caractère intégrable de l'axe, la transcription équivalente suivante :

PROPOSITION. — *Pour qu'il existe des repères symétriques naturels sur une variété lorentzienne, il faut qu'elle admette une synchronisation ombilicale.*

Pour compléter ce résultat avec une condition suffisante il est convenable d'associer, à chaque repère symétrique $\{\xi_A\}_{A=1}^m$, un repère auxiliaire orthonormé $\{\zeta_0, \zeta_a\}_{a=1}^n$ dont l'un des vecteurs est dans la direction de l'axe du repère symétrique. On peut montrer que, à une conformité et une rotation spatiale près, un tel repère est nécessairement de la forme :

$$(9)\quad \begin{cases} \zeta_0 = \dfrac{1}{\lambda_0} 1^{\mathrm{R}} \xi_{\mathrm{R}} \\ \zeta_a = \dfrac{\lambda_a}{\lambda_{a-1}}\left(\xi_{a-1} - \dfrac{1}{\lambda_a^2} \sum_{r=a}^{n} \xi_r\right) \end{cases}$$

où $\lambda_{\mathrm{A}} \equiv \sqrt{n+1-\mathrm{A}}$. Un calcul direct fournit, comme seuls produits scalaires non nuls :

$$g(\zeta_0, \zeta_0) = \alpha + n\beta, \qquad g(\zeta_a, \zeta_a) = \alpha - \beta$$

d'où l'on peut tirer :

$$(10)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{n+1}\{g(\zeta_0, \zeta_0) + ng(\zeta_a, \zeta_a)\} \\ \beta = \dfrac{1}{n+1}\{g(\zeta_0, \zeta_0) - g(\zeta_a, \zeta_a)\}. \end{cases}$$

De (9) il résulte que si le repère $\{\xi_{\mathrm{A}}\}$ est naturel, il en est de même du repère $\{\zeta_{\mathrm{A}}\}$. Dans ces conditions, en dénotant par $\{x^\alpha\}$ un système de coordonnées locales attaché à ce dernier ($\zeta_\alpha = \partial_\alpha$), la métrique g s'écrit :

$$g = g(\zeta_0, \zeta_0)\, dx^0 \otimes dx^0 + \sum_a g(\zeta_a, \zeta_a)\, dx^a \otimes dx^a.$$

A l'aide de l'inverse de (9), des relations (10) et de résultats connus, on obtient finalement le théorème suivant :

Théorème 4. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété lorentzienne admette un repère symétrique naturel est qu'il existe localement une synchronisation ombilicale conformément plate.*

Cette caractérisation nous permet d'affirmer que des espace-temps tels que ceux de Robertson-Walker ou de Schwarzschild admettent des repères symétriques naturels. Ces deux cas jouissent, en outre, d'une importante particularité : *les composantes de la métrique par rapport à ces repères sont des fonctions symétriques des coordonnées;* le groupe P_m (permutations de m éléments) d'invariance considéré, que nous avons ici supposé initialement agir sur l'espace tangent à la variété, agit ainsi sur la variété elle-même. Mais cette situation sera examinée ailleurs.

Note reçue le 22 février 1988, acceptée le 8 mars 1988.

B. C. : *Département de Mécanique relativiste, Université de Paris-VI,* Tour 66, 4, *place Jussieu,* 75252 *Paris Cedex* 05;

J. A. M. : *Departament de Física Teórica, Universitat de València,* 46100 *Burjassot, Valencia, Espagne.*