PRÁCTICAS DE ANÁLISIS DE FOURIER

Departamento de Análisis Matemático

Curso 2011/2012

Profesor responsable: Oscar Blasco de la Cruz

Práctica 1. Preliminares

Definición 1.1
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *y sea* $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ *una partición del intervalo* $[a, b]$*; se define*

$$V(P, f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

La variación total de f *en* $[a, b]$ *viene dada por:*

$$V_a^b(f) = \sup\{V(P, f) : P \quad \textit{es partición de } [a, b]\}$$

Si $V_a^b(f) < \infty$*, se dice que* f *es de variación acotada en* $[a, b]$ *(brevemente* $f \in VA(a, b)$ *).*

Se dice que f *es absolutamente continua en* $[a, b]$ *(brevemente* $f \in AC(a, b)$*) si:*

$$\forall \epsilon \quad \exists \delta \ : \ \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \epsilon \quad \text{si} \quad \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta,$$

para toda familia finita $\{]a_j, b_j[\}_{j=1}^n$ *de subintervalos de* $[a, b]$ *disjuntos dos a dos.*

Sea $0 < \alpha < 1$ *Se dice que* $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ *satisface una condición de Lipschitz de orden* α *(brevemente* $f \in Lip_\alpha(a, b)$*,* $f \in Lip(a, b)$ *en el caso* $\alpha = 1$*,) si existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que:*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha \qquad \forall x, y \in [a, b].$$

Ejercicios propuestos.

Ejercicio 1.1
Dada $f \in \mathcal{L}^1(a, b)$ *defininimos la función* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

(i) Probar que F *es absolutamente continua y además* $F' = f$ *c.p.p.*

(ii) Dada $f \in \mathcal{L}^p(a, b)$*,* $1 < p < \infty$ *entonces* $F \in Lip_{1/p}(a, b)$.

(iii) Dada $f \in \mathcal{L}^\infty(a, b)$*, entonces* $F \in Lip(a, b)$.

Ejercicio 1.2
(i) Demuestra que $Lip_{\alpha_2}(a, b) \subsetneq Lip_{\alpha_1}(a, b)$ *si* $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

(ii) Probar que $Lip(a, b) \subseteq AC(a, b) \subseteq VA(a, b)$.

Ejercicio 1.3
(i) Prueba que si $f(x) = \sqrt{x}$*, entonces* $f \in Lip_{1/2} \setminus Lip(0, 1)$ *pero* $f \in AC(0, 1)$.

(ii) Dada $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(0) = 0$*,* $f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n}$ *y* f *es lineal en cada intervalo* $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$*, probar que* f *es continua pero no absolutamente continua.*

(iii) Demuestra que una función de variación acotada es acotada. Dar un ejemplo de una función acotada pero no de variación acotada.

Ejercicio 1.4
Sean $f,\ g \in VA(a, b)$*. Prueba que* $f \cdot g \in VA(a, b)$.

Ejercicio 1.5
Prueba que, dadas $F \in Lip[c, d]$*,* $\phi : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ *absolutamente continua, entonces* $F \circ \phi \in AC(a, b)$.

Práctica 2.
Series de Fourier

Cuestiones propuestas.

Ejercicio 2.1
Probar que $H^1(\mathbb{T}) = \{f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0 \quad \forall n < 0\}$ *es un ideal cerrado de* $\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$.

Ejercicio 2.2
Resuelve la ecuación $f * f = f$ *en* $\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$.

Ejercicio 2.3
(i) Sea $f \in AC(\mathbb{T})$. *Prueba que* $\hat{f}(n) = o(\frac{1}{n})$.

(ii) Sea $f \in VA(\mathbb{T})$. *Prueba que* $|\hat{f}(n)| \leq \frac{V_{-\pi}^{\pi}(f)}{2\pi|n|}$.

(iii) Sea $f \in Lip_\alpha(\mathbb{T})$ *donde* $0 < \alpha < 1$. *Prueba que* $|\hat{f}(n)| \leq \frac{C}{n^\alpha}$.

Ejercicio 2.4
Sea $f \in C^1(0,\pi)$ *tal que* $f(0) = 0,\ f(\pi) = 0$. *Demuestra la desigualdad de Wirtinger:*

$$\int_0^\pi |f|^2 \leq \int_0^\pi |f'|^2$$

Ejercicio 2.5
Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ *con* $\hat{f}(n) = O(|n|^{-k})$. *Muestra que* $f \in AC(\mathbb{T})$ *con* $f' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ *si y sólo si* $k > \frac{3}{2}$.

Ejercicio 2.6
Sean $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$. *Prueba que la serie de Forier de* $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$. *Demuestra que*

$$\widehat{fg}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n-k)\hat{g}(k),$$

siendo la serie absolutamente convergente. Sugerencia: probarlo primero para las sumas parciales N*-ésimas de Fourier* $S_N(f,x)$ *y* $S_N(g,x)$ *y probar que la sucesión* $(S_N(f,x)S_N(g,x))_{N=1}^\infty$ *es* $\|.\|_1$*-convergente a* fg.

Ejercicio 2.7
Prueba que $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ *es un álgebra con la convolución. Prueba que* f *no es primo si y sólo si* $f \in A(\mathbb{T})$.

Ejercicio 2.8
Sea $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ *y sea* $g = \Re f$. *Demuestra que* $\hat{g}(n) = \frac{\hat{f}(n) + \overline{\hat{f}(-n)}}{2}$.

Ejercicio 2.9
Sea una función $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ *con serie de Fourier en forma trigonométrica*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt).$$

(1) Prueba que f es c.p.p. par si y sólo si $b_k = 0$ para todo $k = 1, 2 \ldots$.
(2) Prueba que f es c.p.p. impar si y sólo si $a_k = 0$ para todo $k = 0, 1, 2 \ldots$.

Ejercicio 2.10
Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ y

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)|}{t}dt < \infty,$$

entonces la serie de Fourier de f converge a f en x_0. (Ayuda ver Criterio de Dini)

Ejercicio 2.11
Demuestra que, dado $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x+2\pi\frac{k}{n}) = \| \ \|_2 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(kn)e^{iknx}$$

Deduce que:

$$\| \ \|_2 - \lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x+2\pi\frac{k}{n}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt.$$

Ejercicio 2.12
Si $f \in AC(\mathbb{T})$, $f' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$, demuestra que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{T})} + \sqrt{2\sum_{1}^{\infty} n^{-2}\|f'\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{T})}}$$

y por lo tanto la serie de Fourier de f converge a f.

Problemas propuestos.

Ejercicio 2.13
Halla la serie de Fourier de:

1. $f(x) = e^{bx}$, $\quad x \in [-\pi, \pi]$

   Solución:

$$\frac{\operatorname{senh} b\pi}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{b-ki}e^{ikt}$$

2. $f(x) = x$, $\quad x \in [-\pi, \pi]$

   Solución:

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen} kt$$

3. $f(x) := \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

   Solución:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen} kt.$$

4. $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{3}{2}x), \quad x \in [-\pi, \pi[$

   Solución:
$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}k}{\frac{9}{4}-n^2}\operatorname{sen} kt$$

5. $f(x) := \begin{cases} -1 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

   Solución:
$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2k-1)t}{2k-1}$$

6. $f(x) := \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

   Solución:
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2k-1)t}{2k-1}$$

7. $f(x) := x(\pi - |x|), \quad \pi \le x \le \pi.$

   Solución:
$$\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2k-1)t}{(2k-1)^3}$$

8. $f(x) := |\cos x|, \quad \pi \le x \le \pi.$

   Solución:
$$\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos 2kt}{4k^2-1}$$

9. $f(x) := \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ \operatorname{sen} x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

   Solución:
$$\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kt}{4k^2-1}+\frac{1}{2}\operatorname{sen} t.$$

10. $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$

    Solución:
$$-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 3t+\frac{3}{4}\operatorname{sen} t.$$

Ejercicio 2.14

Demuestra que

(i) $sen^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

(ii) $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \qquad x \in [-\pi, \pi]$

(iii) $sen^5 x = \frac{5}{8}\operatorname{sen} x - \frac{5}{16}\operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{16}\operatorname{sen}(5x) \qquad x \in \mathbb{R}$

(iv) $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \qquad x \in [-\pi, \pi] \qquad x \in [-\pi, \pi],$

(v) $|\operatorname{sen} x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)}\qquad x\in[-\pi,\pi]$.

Ejercicio 2.15
Demuestra que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}=\frac{\pi-2}{4}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+16n(n-1)}=\frac{\pi}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+b^2}=\frac{\pi}{2b}\operatorname{csch} b\pi-\frac{1}{2b^2}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+b^2}=\frac{\pi}{2b}\coth b\pi-\frac{1}{2b^2}$$

Ejercicio 2.16
Prueba que, dado $z\in\mathbb{C}-\mathbf{Z}$, $\;-\pi\le t\le\pi$:

$$\cos(zt)=\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z}+\frac{2z\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nt)}{z^2-n^2},$$

$$\pi\cot(\pi z)-\frac{1}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2},$$

$$\log\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),$$

Ejercicio 2.17
Prueba que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$$

Ejercicio 2.18
Demuestra que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

Sugerencia: Utilizar que:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}=(1+e^{ix})^n$$

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}e^{i(2kx-2nx)}=2^{2n}\cos^{2n}x$$

Práctica 3.
La transformada de Fourier

Dada $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$, se define la transformada de Fourier $\hat{f}$de f como:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix.\xi}\, dx.$$

Ejercicio 3.1
Sean dos reales $a < b$. Probar que la función $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ tiene como transformada de Fourier

$$f(\xi) = \begin{cases} 2\frac{\operatorname{sen}(\frac{b-a}{2}\xi)}{\xi}e^{-i\frac{b+a}{2}\xi} & \text{if } \xi \neq 0 \\ b-a & \text{if } \xi = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 3.2
Probar que si $a > 0$, la transformada de Fourier de $f(x) = e^{-ax^2}$ es

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

Ejercicio 3.3
Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-\|x\|^2}$ es

$$\hat{f}(\xi) = \pi^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4}}.$$

Ejercicio 3.4
Probar que si $a > 0$, la transformada de Fourier de $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ es

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{a}e^{-a|\xi|}.$$

Ejercicio 3.5
Obtener, para $a > 0$, la transformada de Fourier de $f(x) = \frac{1}{(a^2+x^2)^2}$ y de $g(x) = \frac{1}{1+(x-b)^2}$, $b \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 3.6
Probar que las siguientes relaciones son ciertas cuando Re $a > 0$:

(i)	$f(x) = e^{-ax}\chi_{(0,+\infty)}(x)$	$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{a+i\xi}$
(ii)	$f(x) = e^{ax}\chi_{(-\infty,0)}(x)$	$\hat{f}(\xi) = \frac{-1}{-a+i\xi}$
(iii)	$f(x) = \frac{x^k}{k!}e^{-ax}\chi_{(0,+\infty)}(x)$	$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(a+i\xi)^{k+1}}$
(iv)	$f(x) = \frac{x^k}{k!}e^{ax}\chi_{(-\infty,0)}(x)$	$\hat{f}(\xi) = \frac{-1}{(-a+i\xi)^{k+1}}$
(v)	$f(x) = e^{-a\|x\|}$	$\hat{f}(\xi) = \frac{2a}{a^2+\xi^2}$
(vi)	$f(x) = sig(x)e^{-a\|x\|}$	$\hat{f}(\xi) = \frac{-2i\xi}{a^2+\xi^2}.$

Ejercicio 3.7
Dada $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \backslash\{0\}$ y $\mu \in \mathbb{R}$ se define $g(x) := f(\lambda x - \mu)$. Mostrar que

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{|\lambda|}e^{-\frac{\lambda}{\mu}\xi}\hat{f}(\frac{\xi}{\lambda}).$$

Ejercicio 3.8
Sea $f(x) = (1-x^2)\chi_{[-1,1]}(x)$, probar que su transformada de Fourier es

$$\hat{f}(\xi) = \frac{4}{\xi^2}(\frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi} - \cos\xi).$$

Ejercicio 3.9
Si $x^k f(x)$ pertenecen a $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, para $k = 0, 1, ldots, p$, se llama momento de orden k a la cantidad

$$M_k = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)dx.$$

Mostrar que $M_k = i^k \hat{f}^{(k)}(0)$.

Ejercicio 3.10
Dada $f(x) = \int_0^1 e^{-(x-y)^2}dy$, probar que su transformada de Fourier existe y vale:

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \begin{cases} \pi & \text{if } \xi = 0 \\ i\pi e^{\frac{-\xi^2}{4}}\frac{(e^{i\xi}-1)}{\xi} & \text{if } \xi \neq 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3.11
Calcular

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^\delta \frac{\operatorname{sen}\alpha y}{y}dy = \frac{\pi}{2}.$$

Sug. Usar el teorema de localización de para la transformada de Fourier.

Ejercicio 3.12
Calcular para Re $a > 0$:

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\xi x}}{a+i\xi}d\xi.$$

Ejercicio 3.13
Dado $a > 0$, sea $f_a(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$. Usar la transformada de Fourier para demostrar que $f_a * f_b = f_{a+b}$.

Ejercicio 3.14
Dadas

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$\beta(p,q) := \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$$

demuestra que:

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Ejercicio 3.15
Calcula la transformada de Fourier de la función característica de un intervalo. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $g_n = 1_{[-n,n]}$,calcula $g_n * g_1$ y prueba que es la transformada de Fourier de $A\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(nx)}{x^2}$. Concluye que la transformada de Fourier no es una aplicación sobreyectiva de $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ en $C_0(\mathbb{R})$.

Ejercicio 3.16
Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define $h_n(t) = \frac{1-\cos(nt)}{\pi n t^2}$. demuestra que dada $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R})$, la sucesión $h_n * f$ converge a f en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R})$.

Ejercicio 3.17
Probar que las dos siguientes familias $(W_\lambda)_{\lambda>0}$ y $(P_\lambda)_{\lambda>0}$ son núcleos de sumabilidad:

(i) Núcleo de Gauss-Weierstrass,

$$W_\lambda(x) = (\frac{\lambda}{4\pi})^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4}\lambda}$$

.

(ii) Núcleo de Poisson en $\mathbb{R}^n$,

$$P_\lambda(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{\lambda^{-1}}{(\lambda^{-1} + \|x\|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Ejercicio 3.18
Sabiendo que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi$ y definiendo, para $f \in \mathcal{L}^p$:

$$F_n(x) = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x-y)}{\sqrt{ny(1-ny)}} dy$$

demuestra que

$$\lim nF_n = \pi f \quad \text{en} \mathcal{L}_p.$$

Podemos también trabajar con las transformadas seno y coseno de Fourier en el caso $n = 1$:

$$\hat{f}_c(\xi) = \int_0^\infty f(x) \cos(\xi x) dx$$

$$\hat{f}_s(\xi) = \int_0^\infty f(x)\operatorname{sen}(\xi x)dx.$$

Ejercicio 3.19
Sea $f \in LI(0,\infty) \cap \mathcal{L}^1(0,\infty)$. *Prueba que:*

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos \lambda x \int_0^\infty f(t)\cos(\lambda t)dtd\lambda$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{sen}(\lambda x) \int_0^\infty f(t)\operatorname{sen}(\lambda t)dtd\lambda.$$

Ejercicio 3.20
Prueba que

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{\operatorname{sen} t\cos(tx)}{t} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |x| < 1 \\ 0 & |x| 1 \\ \frac{\pi}{4} & |x| = 1. \end{cases}$$

Ejercicio 3.21
Demuestra que:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{b^2 + x^2}dx = \frac{\pi}{2b}e^{-|a|b} \qquad \forall b > 0.$$

Ejercicio 3.22
Halla la transformada de Fourier en seno y coseno de $e^{-x}\cos x$.

Ejercicio 3.23
Halla la transformada en coseno de e^{-x^2}.

Ejercicio 3.24
Halla transformada seno de $\frac{x}{1+x^2+x^4}$ *y transformada coseno de* $\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$.

Ejercicio 3.25
Sea f una función medible integrable Lebesgue en cada intervalo acotado de $\mathbb{R}$. *Probar que si*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx = 0$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, *entonces f es cero casi por todas partes.*

Ejercicio 3.26
Calcular la transformada de Fourier de la función $f(x) = xe^{-|x|}$, *y usarla para demostrar que:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^4}dx = \frac{\pi}{16}.$$

Ejercicio 3.27
Comprobar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{2} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}dx = \pi.$$

Ejercicio 3.28
Sean dos reales $a < b$. Probar que la función

$$f(\xi) = 2\frac{\operatorname{sen}(\frac{b-a}{2}\xi)}{\xi}e^{-i\frac{b+a}{2}\xi}$$

está en $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Calcular la transformada de Fourier en el caso en que $a < 0$ y $b = -a$.

Práctica 4. Aplicaciones.

Separación de variables.

La ecuación

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$$

regula las vibraciones transversales de una cuerda elástica con extremos fijos, donde u es la deflexión de la cuerda y $c^2 = \frac{T}{p}$, donde p es la masa de la cuerda y T la tensión.

El flujo de calor en un cuerpo está determinado por la ecuación

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_t = 0,$$

donde u es la temperatura y $c^2 = \frac{K}{p\gamma}$, donde K es la conductividad, γ es el calor específico y p la densidad.

En problemas de flujo de calor en estado estacionario, la función de temperatura satisface la ecuación de Laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Problemas propuestos

Ejercicio 4.1
Demuestra que:

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & 0 < x < \pi \\ u(0,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ u(x,0) = \pi - x & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

tiene por solución

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \operatorname{sen}((2n-1)x)) e^{-c^2(2n-1)^2 t}$$

Ejercicio 4.2
Demuestra que, dada $f \in \mathcal{L}^1(0,1)$:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2} u_{xx} + f & 0 \leq x \leq 1 \quad t \geq 0 \\ u(0,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(1,t) = 0 & t \geq 0 \\ \lim_{t \to 0} u(x,t) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

tiene por solucion:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{2}}}{\frac{\pi^2 n^2}{2}} \int_0^1 \sqrt{2} f(y) \operatorname{sen} n\pi y dy \sqrt{2} \operatorname{sen} n\pi x$$

Ejercicio 4.3
Demuestra que

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} & 0 < x < \pi, \quad t \geq 0 \\ u(0,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = 2x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ u(x,0) = 2(\pi - x) & \frac{\pi}{2} < x < \pi \\ u_t(x,0) = 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

tiene por solución:

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen}(2n+1)x \cos(2n+1)t$$

Ejercicio 4.4
Demuestra que:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < \pi, \ 0 < y < \pi \\ u(0,y) = 0 & 0 < y < \pi \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < \pi \\ u(x,\pi) = 0 & 0 < x < \pi \\ u(\pi,y) = 1 & 0 < y < \pi \end{cases}$$

tiene por solución:

$$u(x,y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{\operatorname{senh}((2n+1)x)}{\operatorname{senh}((2n+1)\pi)} \operatorname{sen}((2n+1)y)$$

Ejercicio 4.5
Demuestra que, dada $f \in \mathcal{L}^1(0,1)$:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + f & 0 < x < 1, \quad t \geq 0 \\ u(0,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < 1 \\ u_t(x,0) = 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

tiene por solución:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi t}{n^2\pi^2} \int_0^1 f(y)\sqrt{2} \operatorname{sen}(n\pi y) dy \sqrt{2} \operatorname{sen}(n\pi x)$$

Aplicaciones de la transformada de Fourier

Ejercicio 4.6
Demuestra que

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} & -\infty < x < \infty, \ t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \quad f \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \\ u_t(x,0) = 0 & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

tiene como solución:

$$u(x,t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$$

Ejercicio 4.7
Demuestra que

$$\left\{\begin{array}{lll} u_t = u_{xx} & -\infty < x < \infty, t \geq 0 & \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty & f \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \end{array}\right.$$

tiene como solución

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

Ejercicio 4.8
Demuestra que

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{xx} - u_t = f(x,t) & -\infty < x < \infty, \ t \geq 0 \\ u(x,0) = 0 & t \geq 0 \end{array}\right.$$

tiene como solución:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-s)^2}{4(t-r)}}}{\sqrt{t-r}} H(t-r) f(s,r) ds dr,$$

donde:

$$H(s) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & s \geq 0 \\ 0 & s < 0 \end{array}\right.$$

Ejercicio 4.9
Demuestra que

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{xx} = u_t & x \geq 0, \ t \geq 0 \\ u(x,0) = 0 & x \geq 0 \\ u(0,t) = g(t) & t \geq 0 \end{array}\right.$$

tiene por solución:

$$u(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(s)}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} ds$$

Ejercicio 4.10
Sea f una función arbitraria y sea F su transformada de Fourier. Prueba que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{\imath n 2\pi t}{T}} F(\frac{2n\pi}{T})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\frac{2\pi n}{T}).$$

Ejercicio 4.11
Prueba que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-a|n|} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + (2n\pi)^2}$$

$$\frac{a}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-a(t+n)^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{a}} \cos 2\pi n t.$$