



# PRÁCTICAS DE TEORÍA DE LA MEDIDA

Departamento de Análisis Matemático

Curso 2007/2008

Profesor responsable  
Oscar Blasco

Práctica 1	Espacios de medida . . . . .	1
Práctica 2	Medibilidad e integrabilidad. . . . .	4
Práctica 3	Medida producto y Teorema de Fubini . . . . .	9
Práctica 4	Teorema de Radon-Nikodym. . . . .	14

# Práctica 1

## Espacios de medida

### Ejercicio 1.1

Sea  $\mathcal{R}$  un anillo, es decir un conjunto verificando que  $\emptyset \in \mathcal{R}$ , si  $A, B \in \mathcal{R}$  entonces  $A \cup B \in \mathcal{R}$  y  $A \setminus B \in \mathcal{R}$ . Probar que  $(\mathcal{R}, \Delta, \cap)$  es un anillo en sentido algebraico.

### Ejercicio 1.2

Sea  $\mathcal{M}$  una clase no vacía de subconjuntos de  $X$  y  $\mathcal{R}(\mathcal{M})$  el anillo generado por  $\mathcal{M}$ . Probar que todo elemento de  $\mathcal{R}(\mathcal{M})$  se puede cubrir por un número finito de elementos de  $\mathcal{M}$ .

### Ejercicio 1.3

Sea  $\mathcal{R}$  la familia de uniones finitas de intervalos  $n$ -dimensionales del tipo  $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_n, b_n]$ . Probar que  $\mathcal{R}$  es un anillo sobre  $\mathbb{R}^n$ .

### Ejercicio 1.4

Muestra que la unión de  $\sigma$ -álgebras no es necesariamente una  $\sigma$ -álgebra.

### Ejercicio 1.5

Halla la  $\sigma$ -álgebra sobre  $\mathbb{R}$  generada por los puntos de  $\mathbb{R}$ .

### Ejercicio 1.6

Sea  $\mathcal{M}$  una clase no vacía de subconjuntos de  $X$  y sea  $Y \subset X$ . Denotamos  $\mathcal{M}_Y$  la colección  $\{Y \cap E : E \in \mathcal{M}\}$ .

i) Comprobar que si  $\mathcal{M}$  es  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$  entonces  $\mathcal{M}_Y$  es  $\sigma$ -álgebra sobre  $Y$  (se llama  $\sigma$ -álgebra inducida por  $\mathcal{M}$  sobre  $Y$ ).

ii) Dar una caracterización de  $\mathcal{M}_Y$  en el caso que  $Y \in \mathcal{M}$ .

iii) Si  $\mathcal{A}$  está engendrada por la familia  $\mathcal{M}$ , probar que  $\mathcal{A}_Y$  está engendrada por la familia  $\mathcal{M}_Y$ .

iv) Si  $Y$  es un subconjunto de un espacio topológico  $X$  entonces la  $\sigma$ -álgebra de Borel asociada a la topología en  $Y$  inducida por  $X$  es la  $\sigma$ -álgebra inducida sobre  $Y$  por la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $X$ . Examinar el caso en que  $Y$  es un boreliano de  $X$ .

### Ejercicio 1.7

Sea  $(A_n)$  una colección de subconjuntos de  $X$ .

(a) Si definimos  $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ . Probar que  $\limsup A_n$  coincide con el conjunto de puntos que están en infinitos conjuntos  $A_n$ .

(b) Si definimos  $\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ . Probar que  $\liminf A_n$  coincide con el conjunto de puntos que están en todos los conjuntos  $A_n$  salvo un número finito de ellos.

### Ejercicio 1.8

Se dice que una colección de conjuntos tiene límite si  $\liminf A_n = \limsup A_n$ .

Probar que toda sucesión monótona creciente o decreciente tiene límite y calcularlo.

### Ejercicio 1.9

Probar que, si  $\sigma(\mathcal{A})$  denota la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{A}$ , entonces  $\sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))$  coincide con  $f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$ .

### Ejercicio 1.10

Sean  $\mu_1, \mu_2$  medidas en  $(X, \mathcal{A})$ . Prueba que si  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ , entonces  $\mu = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$  es una medida.

### Ejercicio 1.11

Sean  $\mu_n$  medidas con  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq \dots$ . Prueba que  $\mu(A) = \lim \mu_n(A) = \sup \mu_n(A)$  es una medida.

**Ejercicio 1.12**

Sea  $\mu_n$  sucesión de medidas en  $(X, \mathcal{A})$  y sean  $\alpha_n > 0$ . Sea  $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n$ . ¿Es  $\mu$  una medida?

**Ejercicio 1.13**

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida y sea  $(A_n)$  una sucesión de modo que cada  $A_j$  corta a lo sumo a otro conjunto de la sucesión. Demostrar que

$$\mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq 2\mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j).$$

**Ejercicio 1.14**

Estudiar si las siguientes funciones de conjunto son medidas exteriores sobre  $\mathcal{P}(X)$  o no.

- (i) Sea  $X$  arbitrario,  $a \in X$  y  $\lambda = \delta_a$ .
- (ii) Sea  $X$  arbitrario y  $\lambda(A) = 1$  para todo  $A \subset X$ .
- (iii) Sea  $X = (a_{i,j})$  matriz 10 por 10 y  $\lambda(A)$  el número de columnas donde hay un elemento de  $A$ .
- (iv) Sea  $X = \mathbb{N}$  y  $\lambda(A) = \limsup \frac{\text{card}(A \cap \{1, 2, \dots, k\})}{k}$ .
- (v) Sea  $X = \mathcal{R}$  y  $\lambda(A) = 0$  si  $A$  es numerable,

$\lambda(A) = 1$  si  $A$  es no numerable y  $A \setminus I$  es numerable para  $I$  interv. acot.,

$\lambda(A) = \infty$  en otro caso .

- (vi) Sea  $X = \mathbb{Z}$  y  $\lambda(A) = 0$  si  $A$  es vacío,

$$\lambda(A) = \frac{a}{a+1} \text{ si } A \text{ es finito, siendo } a = \sup\{|n| : n \in A\},$$

$\lambda(A) = 1$  si  $A$  es infinito .

- (vii) Sea  $X$  un espacio métrico con distancia  $d$  y  $\alpha > 0$ . Sea

$$\lambda_{\alpha} = \sup_{\varepsilon > 0} \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\delta(A_k))^{\alpha} : A = \cup A_k, \delta(A_k) < \varepsilon \right\},$$

donde  $\delta(A_k) = \text{diam}(A_k) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A_k\}$ .

**Ejercicio 1.15**

Sea  $\lambda^*$  la medida exterior de Lebesgue en  $\mathbb{R}$  y sea  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\pi(x, y) = x$ . Sea  $\mu^*(A) = \lambda^*(\pi(A))$ . Prueba que  $\mu^*$  es una medida exterior y que  $B$  es  $\mu^*$ -medible si y sólo si existen conjuntos medibles Lebesgue  $B_0, B_1$  tales que  $B_0 \subseteq B_1$ ,  $\lambda^*(B_1 - B_0) = 0$ ,  $B_0 \times \mathbb{R} \subseteq B \subseteq B_1 \times \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 1.16**

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integrable y positiva. Prueba que  $\mu(A) = \int_A f(x) dx$  es una medida sobre los conjuntos medibles Lebesgue.

**Ejercicio 1.17**

Sea  $F_n \in \mathcal{A}$  una sucesión de conjuntos. Prueba que  $\mu(\liminf F_n) \leq \liminf \mu(F_n)$ . Además si  $\exists n_0 : \mu(\cup_{i=n_0}^{\infty} F_i) < \infty$  entonces  $\mu(\limsup F_n) \geq \limsup \mu(F_n)$ .

**Ejercicio 1.18**

Sea  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$  y  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y estrictamente creciente. Probar que la medida de Borel-Stieljes definida por  $F$  coincide con la imagen por  $F^{-1}$  de la medida de Lebesgue sobre los borelianos de  $F(I)$ .

**Ejercicio 1.19**

Describir la medida de Lebesgue-Stieltjes  $m_F$  asociada a las siguientes funciones:

- (i)  $F(x) = [x]$ ,
- (ii)  $F(x) = \chi_{[0, \infty)}(x)$ ,
- (iii)  $F(x) = (x - 1)^+$ .

**Ejercicio 1.20**

Sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x) = (1 + x)\chi_{[-1, 0)} + (2 + x^2)\chi_{[0, 2)} + 9\chi_{[2, \infty)}$ .

Hallar  $m_F$  de los siguientes conjuntos:

- (i)  $\{2\}$     (ii)  $[-\frac{1}{2}, 3)$ ,
- (iii)  $(-1, 0] \cup (1, 2)$ ,    (iv)  $\{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\}$ .

**Ejercicio 1.21**

Sea  $F(x) = \frac{-1}{x}\chi_{(0, 1)} + (\log(x) - 1)\chi_{[1, \infty)}$ .

- (i) Hallar un boreliano no acotado  $A$  con  $m_F(A) < \infty$ .
- (ii) Hallar un abierto  $G$  con  $0 \in G'$  de modo que  $m_F(G) < \infty$ .

**Ejercicio 1.22**

Consideremos la medida de Lebesgue-Stieltjes en  $(0, \infty)$  dada por  $F(x) = x^\alpha$  con  $\alpha > 0$  y sea  $A = \cup_{n=1}^{\infty} (n, \frac{n^2+1}{n})$ . Hallar los valores de  $\alpha$  de modo que  $m_F(A) < \infty$ .

**Ejercicio 1.23**

Sea  $\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{(n, \frac{2n+1}{2})}(t)$ .

Hallar  $F$  de modo que la medida de Lebesgue-Stieltjes de  $F$  coincida con la imagen por  $\phi$  de la medida de Lebesgue  $m$ , es decir  $m_F = \phi(m)$ .

**Ejercicio 1.24**

Sea  $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(t) = \log(t)$ . Demostrar que

- (i)  $m_F = \exp(m)$  donde  $m$  es la medida de Lebesgue y  $\exp(x) = e^x$ .
- (ii)  $m_F$  es invariante por dilataciones.
- (iii) Si  $\mu : \mathcal{B}((0, \infty)) \rightarrow [0, \infty]$  es una medida finita sobre los intervalos acotados e invariante por dilataciones entonces  $\mu = Cm_F$  para alguna constante  $C > 0$ .
- (iv) Hallar un abierto no acotado  $G \subset (0, \infty)$  con  $0 \in G'$  y  $m_F(G) < \infty$ .

# Práctica 2

## Medibilidad e integrabilidad.

### Ejercicio 2.1

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible y  $(A_n)$  una sucesión de conjuntos medibles tales que  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$ .

i) Dada  $f$  una función definida en  $X$  tal que  $f_n = f \chi_{A_n}$  es medible respecto a la  $\sigma$ -álgebra  $\Sigma_n = \{E \cap A_n : E \in \Sigma\}$ . Probar que  $f$  es  $\Sigma$ -medible.

ii) Supongamos que  $A_n$  sean disjuntos dos a dos y sean  $f_n$  funciones  $\Sigma_n$ -medibles definidas en  $A_n$ . Si definimos la función  $f$  en  $X$  tal que  $f(x) = f_n(x)$  si  $x \in A_n$ . Probar que  $f$  es  $\Sigma$ -medible.

iii) Supongamos que  $A_n$  sea una sucesión creciente y sean  $f_n$  funciones  $\Sigma_n$ -medibles definidas en  $A_n$  tales que  $f_n(x) = f_{n+1}(x)$  si  $x \in A_n$ . Si definimos la función  $f$  en  $X$  tal que  $f(x) = f_n(x)$  si  $x \in A_n$ . Probar que  $f$  es  $\Sigma$ -medible.

### Ejercicio 2.2

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible,  $S \in \Sigma$  y  $\Sigma_S$  la  $\sigma$ -álgebra inducida por  $S$ . Sea  $f$  una aplicación de  $X$  en un espacio topológico  $Y$  e  $y \in Y$ . Probar que  $f$  es  $\Sigma_S$ -medible si y sólo si  $\bar{f}$  dada por  $\bar{f} = f \chi_S + y \chi_{X \setminus S}$  es  $\Sigma$ -medible.

### Ejercicio 2.3

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible,  $A \in \Sigma$  diferente del vacío y el total. Probar que

$$\Sigma_1 = \{E \in \Sigma : A \cap E = \emptyset \text{ ó } A \subset E\}$$

es una  $\sigma$ -álgebra. Averiguar que condición debe cumplir una función  $\Sigma$ -medible para ser  $\Sigma_1$ -medible.

### Ejercicio 2.4

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible y  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  una función  $\Sigma$ -medible. Demostrar que puede escribirse de la forma

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{A_n}$$

donde  $c_n \geq 0$  y  $A_n \in \Sigma$ .

### Ejercicio 2.5

Sea  $(Y, \tau)$  un espacio topológico y  $(f_\alpha)_{\alpha \in J}$  una familia de aplicaciones de un conjunto  $X$  en  $Y$ . Probar que existe la mínima  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$  que hace medibles  $f_\alpha$  y dar una descripción de la misma (se denomina  $\sigma$ -álgebra generada por  $f_\alpha$  y se denota  $\sigma(f_\alpha : \alpha \in J)$ .)

### Ejercicio 2.6

Dado el espacio medible  $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ , donde

$$\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} : B \text{ numerable o } B \text{ conumerable}\},$$

caracteriza las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{A}$ -medibles.

### Ejercicio 2.7

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible y  $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$  una funciones  $\Sigma$ -medibles. Probar que  $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$  es medible.

### Ejercicio 2.8

Demostrar que el conjunto de puntos donde converge una sucesión de funciones complejas medibles es medible.

**Ejercicio 2.9**

Sea  $I$  un intervalo (acotado o no) en  $\mathbb{R}$  y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

- i) Probar que si  $f$  es monótona a trozos entonces  $f$  es medible.
- ii) Suponer  $f$  es derivable. Probar que  $f'$  es medible Borel.

**Ejercicio 2.10**

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ .

Probar que  $f$  una función  $\Sigma$ -medible si y sólo si  $f_i$  es  $\Sigma$ -medible para todo  $1 \leq i \leq n$ .

**Ejercicio 2.11**

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (i) Probar que  $f$  es medible Lebesgue si y sólo si  $f^2$  es una función medible y  $\{x : f(x) > 0\}$  es un conjunto medible.
- (ii) Dar un ejemplo de una función no medible Lebesgue en  $\mathbb{R}^2$ .
- (iii) Dar un ejemplo de una función no medible Lebesgue en  $\mathbb{R}$  tal que  $f^2$  sea medible.

**Ejercicio 2.12**

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida,  $A \in \Sigma$ ,  $\Sigma_A$  la  $\sigma$ -álgebra inducida por  $A$  y  $\mu_A$  la medida concetrada en  $A$ .

(i) Sea  $f$  una función  $\Sigma$ -medible con valores en  $[0, \infty]$  ó compleja.

Probar que  $f$  es  $\mu_A$ -integrable si y sólo si  $\int_A |f| d\mu < \infty$ . Además si  $E \in \Sigma$ ,

$$\int_E f d\mu_A = \int_{E \cap A} f d\mu.$$

(ii) Sea  $f$  una función  $\Sigma_A$ -medible y  $f_0 = f\chi_A$  la extensión  $\Sigma$ -medible definida en  $X$ .

Probar que si  $f$  es  $\mu_A$ -integrable si y sólo si  $f_0$  es  $\mu$ -integrable. Además si  $E \in \Sigma_A$ ,

$$\int_E f d\mu_A = \int_{E \cap A} f_0 d\mu.$$

**Ejercicio 2.13**

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible y  $(\mu_n)$  una sucesión de medidas sobre él. Definimos la nueva medida

$$\mu(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(E)$$

Describir la  $\mu$ -integrabilidad y la integral respecto de  $\mu$  en términos de  $\mu_n$ .

**Ejercicio 2.14**

Sea  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  espacio de medida y sea  $\phi : \Omega \rightarrow E$ . Prueba que  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\phi(\mu)$ -integrable si y sólo si  $g \circ \phi$  es  $\mu$ -integrable, y además, en tal caso:

$$\int_{\Omega} g \circ \phi d\mu = \int_E g d(\phi(\mu)).$$

**Ejercicio 2.15**

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible,  $a \in X$  y  $\delta_a$  la medida delta de Dirac concentrada en  $a$ .

(i) Describir la  $\delta_a$ -integrabilidad y la integral respecto de  $\delta_a$ .

(ii) Sea  $\mu$  definida sobre  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  dada por  $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \delta_n$ .

Describir la  $\mu$ -integrabilidad y la integral respecto de  $\mu$ .

Calcular  $\int_{\mathbb{N}} f d\mu$  para  $f(n) = n$ .

**Ejercicio 2.16**

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida y sean  $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$  medibles. Probar

- i)  $\int_X (\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k) d\mu \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_X f_k d\mu$ .
- ii) Si  $f_{j_1} \cdot f_{j_2} \cdots f_{j_{n+1}} = 0$  para cualquier  $(n+1)$ -tupla  $j_1, j_2, \dots, j_{n+1}$  entonces

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \int_X f_k d\mu \leq n \int_X (\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k) d\mu.$$

¿Qué significa lo anterior si  $f_k = \chi_{A_k}$ ?

**Ejercicio 2.17**

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  medible Lebesgue y positiva. Sea  $\mu$  la medida definida en  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  según:

$$\mu(A) = \int_A f(x) dx.$$

Prueba que  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  medible es  $\mu$ -integrable si y sólo si  $g \cdot f$  es integrable Lebesgue y en tal caso:

$$\int g d\mu = \int g(x) f(x) dx.$$

**Ejercicio 2.18**

Estudiar la integrabilidad de  $f$  respecto de  $\mu$ , calculando la integral cuando exista, en los siguientes casos:

- a)  $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \mu)$ ,  $\mu$  medida de contar y  $f(n) = e^{-|n|}$ .
- b)  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ,  $\mu$  medida de contar y  $f(n) = \frac{(-1)^n}{n+1}$ .
- c)  $((0, \infty), \mathcal{B}((0, \infty)), \mu)$ ,  $d\mu(x) = e^{-x} dx$  y  $f = \sum_{n=1}^{\infty} n \chi_{[n-1, n]}$ .
- d)  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ ,  $d\mu(x) = |\sen x| dx$  y  $f(x) = \frac{1}{x} \chi_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ .
- e)  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mu)$ ,  $\mu = \phi(m)$  donde  $\phi(t) = (e^{-|t|} \cos t, e^{-|t|} \sen t)$  y  $f(x, y) = xy$ .
- f)  $([0, \frac{\pi}{2}], \mathcal{B}([0, \frac{\pi}{2}]), m)$  y  $f(x) = \sen x \chi_{[0, \frac{\pi}{2}] \cap \mathbb{Q}} + \cos x \chi_{[0, \frac{\pi}{2}] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ .
- g)  $([0, \frac{\pi}{2}], \mathcal{B}([0, \frac{\pi}{2}]), m)$  y  $f(x) = \sen x \chi_{[0, \frac{\pi}{2}] \cap \{x: \cos x \in \mathbb{Q}\}} + \sen^2 x \chi_{[0, \frac{\pi}{2}] \cap \{x: \cos x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}}$ .

**Ejercicio 2.19**

Estudiar la integrabilidad de  $f$  en el intervalo  $I$  respecto de la medida de Lebesgue-Stieltjes  $m_F$ , definida por  $F$ , calculando la integral cuando exista, en los siguientes casos:

- a)  $I = (0, \infty)$ ,  $F(x) = (x-1)^+$ ,  $f(x) = x^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ).
- b)  $I = (0, 1)$ ,  $F(x) = -[\frac{1}{x}]$ ,  $f(x) = x^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ).
- c)  $I = (0, 1)$ ,  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}$ (x),  $f(x) = x$ .
- d)  $I = \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_{(0, \infty)} |\sen t| dt$ ,  $f(x) = \frac{1}{x} \chi_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ .
- e)  $I = (0, \infty)$ ,  $F(x) = -e^{-x}$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \chi_{(n-1, n]}$ (x).
- f)  $I = (0, \infty)$ ,  $F(x) = \log x$ ,  $f(x) = x^{-\alpha} \chi_{(0, 1)} + x^{-\beta} \chi_{(1, \infty)}$ , ( $\alpha, \beta > 0$ ).

**Ejercicio 2.20**

Calcular los siguientes límites:

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} \cos nx \sen \frac{x}{n} dx$ .
- b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} e^{\frac{x}{n}} x^{-2} dx$ .
- c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-\frac{x}{n}} x^{-\frac{1}{2}} \log x dx$ .
- d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sen(\frac{\pi n}{2n+x}) dx$ .
- e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-ax} (1 + \frac{x}{n})^n dx$ , ( $a > 0$ ).

$$f) \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctag} \frac{t}{n}.$$

**Ejercicio 2.21**

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones  $\mu$ -integrables. Discutir cuales de las siguientes funciones son ó no son  $\mu$ -integrables. En caso negativo dar hipótesis sobre el espacio de medida o sobre las funciones para conseguir la integrabilidad y dar ejemplos y contraejemplos de las afirmaciones que se hagan.

- a)  $f^2$ , b)  $f^{\frac{1}{3}}$ , c)  $\operatorname{arctag} f$ , d)  $\sqrt{|f|} + \sqrt{|g|}$   
 e)  $f \cdot g$ , f)  $\sqrt{fg}$ , g)  $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{1+|f|}\right)$ , h)  $\sqrt{|f|^2 + |g|^2}$ ,  
 i)  $\frac{f}{1+|g|}$ , j)  $f^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ).

**Ejercicio 2.22**

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida y  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  una función  $\mu$ -integrable. Probar que el conjunto  $\{x \in X : f(x) > 0\}$  es unión numerable de conjuntos de medida finita.

**Ejercicio 2.23**

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida y  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  una función  $\mu$ -integrable. Probar que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|\int_E f d\mu| < \varepsilon$  si  $E \in \Sigma, \mu(E) < \delta$ .

**Ejercicio 2.24**

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida y  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  una función medible. Sea  $0 < p < \infty, 0 < \varepsilon < \infty$ . Probar que

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_X f^p d\mu.$$

**Ejercicio 2.25**

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida y  $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$  una sucesión de funciones medibles que converge puntualmente a  $f$ .

- (a) Supongamos que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n d\mu < \infty$ . Probar que  $\int_X f d\mu < \infty$ .  
 (b) Supongamos que existe  $\lim_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu < \infty$ . Probar que para todo medible  $E \subset X$  se tiene

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu < \infty.$$

(Comprobar que la conclusión puede ser falsa si se suprime la finitud del límite.)

**Ejercicio 2.26**

Dar un ejemplo donde se obtiene la desigualdad estricta en el Lema de Fatou.

**Ejercicio 2.27**

Sea  $((-\pi, \pi], \mathcal{B}((-\pi, \pi]), m)$  el espacio de medida del Lebesgue sobre  $\mathcal{B}((-\pi, \pi])$ . En el grupo multiplicativo  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  se considera  $\mathcal{B}(\mathbb{T})$  y la medida  $\mu = \phi(m)$  donde  $\phi(t) = e^{it}$ . Probar

- (i)  $\mu$  es una medida de probabilidad ( $\mu(\mathbb{T}) = 1$ ), invariante por traslaciones.  
 (ii) Una función medible  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  es  $\mu$ -integrable si y sólo si la función  $g(t) = f(\phi(t))$  es  $m$ -integrable. Además  $\int_{\mathbb{T}} f d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g dm$ .

**Ejercicio 2.28**

Sea  $\Gamma$  una curva de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrización de  $\Gamma$ . Definimos sobre los borelianos de  $\Gamma$  la medida  $m_\gamma$  dada por  $m_\Gamma = \phi(\mu)$  donde  $\mu$  corresponde a la medida en  $[a, b]$  dada por la densidad  $\|\phi'\|$ , es decir  $d\mu = \|\phi'\| dm$ .

- (i) Probar que  $m_\Gamma$  depende solamente de  $\Gamma$  y no de la parametrización elegida.

(ii) Caracterizar la integrabilidad de una función medible  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  y comprobar que si  $f$  es integrable entonces

$$\int_{\Gamma} f dm_{\Gamma} = \int_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt.$$

### Ejercicio 2.29

Sea  $s \in \mathbb{C}$  y  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(x) = x^{s-1} e^{-x}$ .

Probar que  $f$  es integrable si y sólo si  $\operatorname{Re} s > 0$ .

(Recordar que  $\Gamma(s) = \int_{(0, \infty)} x^{s-1} e^{-x} dx$ ).

### Ejercicio 2.30

Sean  $a, s \in \mathbb{C}$  y  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(x) = x^s e^{-ax}$ .

(i) Hallar los valores de  $a$  y  $s$  para los que  $f$  es integrable.

Hallar el valor de la integral en el caso de que  $a > 0$  y  $f$  integrable.

(ii) Probar que para  $\operatorname{Re} s > 1$  se cumple

$$\xi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{(0, \infty)} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

### Ejercicio 2.31

Sea  $z \in \mathbb{C}$  y  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(t) = \cos zte^{-t^2}$ . Probar que es integrable para todo  $z \in \mathbb{C}$  y calcular el valor de su integral.

### Ejercicio 2.32

Demostrar, justificando los cálculos, que

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$

### Ejercicio 2.33

Demuestra, utilizando el teorema de la medida imagen, el siguiente teorema clásico de cambio de variable: Sea  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ , estrictamente creciente y biyectiva,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  integrable.

Demuestra que:

$$\int_{\mathbb{R}} (g \circ X)(t) dt = \int_{\mathbb{R}} g(x) (X^{-1}(x))' dx.$$

### Ejercicio 2.34

Sea  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  medible con  $\mu$  medida finita. Prueba que  $f$  es integrable si y sólo si  $\sum_n \mu(\{x \in X : f(x) \geq n\}) < \infty$ .

### Ejercicio 2.35

Sean  $f, f_n$  funciones no negativas integrables tales que:

a)  $\lim f_n = f$  a.e.

b)  $\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$

Prueba que  $\lim \int |f_n - f| d\mu = 0$

# Práctica 3

## Medida producto y Teorema de Fubini

### Ejercicio 3.1

Sean  $X, Y$  dos conjuntos no vacíos, y sean  $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$  y  $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(Y)$  de modo que  $X \in \mathcal{M}$  y  $Y \in \mathcal{R}$ . Probar que  $\sigma(\mathcal{M} \times \mathcal{R}) = \sigma(\mathcal{M}) \otimes \sigma(\mathcal{R})$ .

### Ejercicio 3.2

Sean  $(X, \Sigma_1, \mu)$  e  $(Y, \Sigma_2, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita. Si denotamos  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$  las correspondientes complecciones. ¿Es cierto que  $\hat{X} \otimes \hat{Y} = X \hat{\otimes} Y$ , (complección respecto la medida producto).?

### Ejercicio 3.3

Sean  $(X, \Sigma_1, \mu)$  e  $(Y, \Sigma_2, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita y completos.

Sea  $(X \otimes Y, \Sigma_1 \hat{\otimes} \Sigma_2, \mu \hat{\otimes} \nu)$  la complección respecto de  $(X \times Y, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \mu \otimes \nu)$ .

Probar que si  $A \in \Sigma_1 \hat{\otimes} \Sigma_2$  y  $\mu \hat{\otimes} \nu(A) = 0$ , entonces  $\nu(A_x) = 0$   $\mu$ -a. e. y también  $\mu(A_y) = 0$   $\nu$ -a. e.

Deducir que el Teorema de Fubini sigue siendo válido para toda función  $\hat{\Sigma}_1 \otimes \hat{\Sigma}_2$ -medible no negativa o  $\hat{\Sigma}_1 \otimes \hat{\Sigma}_2$ -integrable.

### Ejercicio 3.4

(i) Sea  $\Sigma$  una  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$  y sea  $\mathcal{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $\mathbb{R}$ .

Probar que si  $f$  es una función definida en  $X \times \mathbb{R}$  de modo que  $f_x$  es continua para todo  $x \in X$  y  $f^y$  es  $\sigma$ -medible para todo  $y \in \mathbb{R}$  entonces  $f$  es  $\Sigma \otimes \mathcal{B}$ -medible.

(ii) Sea  $E$  un subconjunto denso de  $\mathbb{R}$  y  $f$  es una función real definida en  $\mathbb{R}^2$  de modo que  $f_x$  es continua para todo  $x \in E$  y  $f^y$  es medible Lebesgue para casi todo  $y \in \mathbb{R}$  entonces  $f$  es medible Lebesgue en  $\mathbb{R}^2$ .

### Ejercicio 3.5

(Integración por partes) Sea  $\mu$  una medida de Borel  $\sigma$ -finita en un intervalo  $[a, b]$  con  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ . Dadas dos funciones  $\mu$ -integrables  $f, g$  definimos

$$F(x) = \int_{[a,x]} f d\mu, \quad G(x) = \int_{[a,x]} g d\mu.$$

Probar que, si definimos  $F(a^-) = 0$ , entonces

$$\int_{[a,b]} f(x)G(x)d\mu(x) = F(b)G(b) - \int_{[a,b]} F(x^-)g(x)d\mu(x).$$

### Ejercicio 3.6

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida  $\sigma$ -finito y  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  medible. Para cada  $E \subset \Sigma$  definimos

$$R(f, E) = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

y  $F(y) = \mu(\{x \in E : f(x) > y\})$ ,  $y > 0$  (función de distribución de  $f$  sobre  $E$ ).

Probar que, siendo  $m$  la medida de Lebesgue de  $\mathbb{R}$ , se tiene

$$\int_E f d\mu = (\mu \otimes m)(R(f, E)) = \int_0^\infty F(y) dm(y).$$

**Ejercicio 3.7**

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida  $\sigma$ -finito y  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  medible. Si  $F(y) = \mu(\{x \in X : f(x) > y\})$ ,  $y > 0$  (función de distribución de  $f$ ) o bien  $F(y) = \mu(\{x \in X : f(x) \geq y\})$ ,  $y > 0$  entonces para  $0 < p < \infty$  se tiene

$$\int_X f^p d\mu = \int_0^\infty pt^{p-1} F(t) dm(t).$$

**Ejercicio 3.8**

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida  $\sigma$ -finito,  $I = (a, \infty)$  con  $-\infty \leq a < \infty$  y  $f : X \rightarrow I$  medible. Sea  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función no decreciente y continua tal que  $\phi(a^+) = 0$  y  $F(y) = \mu(\{x \in X : f(x) > y\})$ ,  $y > 0$  (función de distribución de  $f$ ) entonces

$$\int_X \phi(f) d\mu = \int_0^\infty F(t) dm_\phi(t).$$

**Ejercicio 3.9**

Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida  $\sigma$ -finito,  $I = (a, \infty)$  con  $-\infty \leq a < \infty$  y  $f : X \rightarrow I$  medible. Sea  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función no decreciente y  $C^1$  tal que  $\phi(a^+) = 0$  y  $F(y) = \mu(\{x \in X : f(x) > y\})$ ,  $y > 0$  (función de distribución de  $f$ ). Prueba que:

$$\int_X \phi(f) d\mu = \int_0^\infty \phi'(t) F(t) dt.$$

**Ejercicio 3.10**

Sea  $G$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\Phi$  un difeomorfismo  $C^2$  en  $G$ . Prueba que para toda función integrable en  $\Phi(G)$  se tiene:

$$\int_{\Phi(G)} f(y) dy = \int_G f(\Phi(x)) |J\Phi(x)| dx.$$

**Ejercicio 3.11**

Sea  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$  con  $\nu$  la medida de contar. Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida arbitrario. Definimos, para  $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \Sigma$ ,

$$\mu \otimes \nu(E) = \sum_{n=1}^\infty \nu(E_n).$$

Probar que una función  $f$  de  $\mathbb{N} \times X$  en  $[0, \infty]$  o con valores en  $\mathbb{C}$  es medible si y sólo si cada sección  $f_n$  es  $\sigma$ -medible ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Probar que  $f$  es  $\mathbb{N} \times X$ -integrable si y sólo si la serie  $\sum_{n=1}^\infty \int_X |f_n| d\mu$  es convergente, en cuyo caso

$$\int_{\mathbb{N} \times X} f d(\mu \otimes \nu) = \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n d\mu = \int_X \sum_{n=1}^\infty f_n d\mu$$

(Nótese que el teorema de Fubini es entonces válido para  $(X, \Sigma, \mu)$  arbitrario.)

**Ejercicio 3.12**

Sean  $f, g : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f(x) = \frac{1}{2}$ ,  $g(x) = \sin^2(x)$ .

- (i) Describir  $\mu = f(m)$ ,  $\nu = g(m)$ .
- (ii) Hallar  $\mu \otimes \nu(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 4x^2\})$ .

**Ejercicio 3.13**

Sea  $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = nx_1 \chi_{\{(x, n) : \|x\| \leq \frac{1}{n}\}}.$$

Sea  $\mu$  una medida sobre  $\mathbb{N}$  tal que  $\mu(\{n\}) = \frac{1}{n^\beta}$ . Hallar los valores de  $\beta$  para que  $f$  sea integrable respecto de  $m_k \otimes \mu$ , siendo  $m_k$  la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^k$  y para éstos calcular la integral  $\int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{N}} f dm_k \times \mu$ .

**Ejercicio 3.14**

Sea  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = \mathbb{R}^+ \times S_{n-1}$  donde  $x = rx'$  siendo  $r > 0$ ,  $x' \in S_{n-1}$ , donde  $S_{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n : |u| = 1\}$ . Consideremos  $d\sigma_{n-1}(x')$  la medida sobre la esfera  $S_{n-1}$  dada por  $\sigma_{n-1}(A) = nm_n(\hat{A})$  siendo  $\hat{A} = \{rx' : 0 < r < 1, x' \in A\}$  y  $A$  un boreliano de  $S_{n-1}$ .

Probar que  $dm_n = r^{n-1}dr \otimes d\sigma_{n-1}$ .

Demostrar que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  es medible entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dm_n(x) = \int_{[0, \infty)} \int_{S^{n-1}} f(rx') r^{n-1} dr d\sigma_{n-1}(x').$$

Si  $f(x) = \phi(|x|)$ , es decir si  $f$  es radial entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dm_n(x) = nv_n \int_{[0, \infty)} r^{n-1} \phi(r) dr,$$

donde  $v_n = m_n(B_n)$ .

**Ejercicio 3.15**

Determinar si  $f(x, y) = \frac{\sin(x)\cos(xy)}{x}$  es o no integrable en  $[0, \infty) \times [0, a]$  con  $a > 0$ .

**Ejercicio 3.16**

Estudia la integrabilidad en  $\mathbb{R}^2$  de

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

**Ejercicio 3.17**

Sea  $m \in (0, \infty)$ . Prueba que

$$f(x, y) = \frac{y^2 \sin^2(x)}{x^2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + m^2)} \chi_{\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}}$$

es integrable en  $\mathbb{R}^2$ .

**Ejercicio 3.18**

Sea  $X = Y = \mathbb{N}$ , con  $\mu$  la medida de contar. Estudia la  $\mu \times \mu$ -integrabilidad de  $f = \sum_n (2 - 2^{-n}) \chi_{(n,n)} - \sum_n (-2 + 2^{-n}) \chi_{(n+1,n)}$ .

**Ejercicio 3.19**

Sea  $f : \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$  dada por  $f(x) = \frac{\sin(\frac{1}{\|x\|}) - 1}{\|x\|^k (1 - \|x\|)}$ .

Probar que no existe  $\int_{\{\|x\| < 1\}} f(x) dx$  pero sí que existe su valor principal, es decir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{\varepsilon < \|x\| < 1\}} f(x) dx.$$

Calcular dicho valor.

**Ejercicio 3.20**

Determinar los valores de  $\alpha$  para los cuales las siguientes funciones son integrables, calculando su valor:

(i) 
$$\int_{\mathbb{R}^k} \frac{dx}{(1 + \|x\|^2)^\alpha}.$$

(ii) 
$$\int_{\{\|x\| < r\}} \|x\|^\alpha dx.$$

$$(iii) \quad \int_{\{|x|<1\}} \frac{x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + \dots + (-1)^{k+1}x_k^2}{\|x\|^\alpha} dx.$$

$$(iv) \quad \int_{\{|x|<1\}} \frac{|x_1| + \dots + |x_k|}{\|x\|} dx.$$

**Ejercicio 3.21**

Hallar las siguientes integrales

$$I_k = \int_{B_k} |x_1 \dots x_k| dm_k(x),$$

$$J_k = \int_{S_{k-1}} |u_1 \dots u_k| d\sigma_{k-1}(u),$$

siendo  $B_k$  la bola unidad cerrada de  $\mathbb{R}^k$  y  $S_{k-1}$  la esfera  $\|x\| = 1$ .

**Ejercicio 3.22**

Calcular la integral

$$\int_A (\beta + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k) dm_k$$

donde  $A = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x - a\| < r\}$ ,  $a \in \mathbb{R}^k$ ,  $\alpha_i, \beta \in \mathbb{R}$  y  $r > 0$ .

**Ejercicio 3.23**

Expresar en términos de la función  $\Gamma$  la siguiente integral para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_i > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^k} x_1^n e^{-(\sum_{i=1}^k a_i x_i^2)} dm_k(x).$$

**Ejercicio 3.24**

Calcular la medida de Lebesgue de  $\mathbb{R}^n$  del conjunto

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j > 0, \sum_{j=1}^n x_j < 1\}.$$

Mediante un cambio de variable usar lo anterior para probar que

$$\int_P e^{-(x_1 + \dots + x_n)^2} dx = \frac{\Gamma(n/2 + 1)}{n!}.$$

**Ejercicio 3.25**

Calcular la medida de Lebesgue de  $\mathbb{R}^n$  de los conjuntos

$$(i) \quad A_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| \leq 1\}.$$

$$(ii) \quad B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \leq 1\}.$$

$$(iii) \quad C_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \max |x_j| \leq 1\}.$$

$$(iv) \quad D_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| + |x_n| \leq a, j = 1, 2, \dots, n-1\}.$$

**Ejercicio 3.26**

Calcular la medida de los siguientes conjuntos

$$A = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : 0 \leq \lambda_j \leq 1, j = 1, 2, \dots, n\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha_j < x \cdot v_j < \beta_j, j = 1, 2, \dots, n\}$$

donde  $v_1, \dots, v_n$  son vectores linealmente independientes de  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \cdot v$  denota el producto escalar y  $\alpha_j < \beta_j$  para todo  $j$ .

**Ejercicio 3.27**

Calcular la medida (cuando sea finita) de los siguientes conjuntos:

$$A = \{(x, y, z, u) : (x + y)^2 + (z + u)^2 < 1, |x - y| + |z - u| < 1\}.$$

$$B = \{x = (x', x'') \in \mathbb{R}^{k+j} : \|x'\| \leq 1, \|x'\| \|x''\| \leq 1\}.$$

# Práctica 4

## Teorema de Radon-Nikodym.

### Ejercicio 4.1

Sea la medida  $\mu$  en  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  dada por  $\mu(A) = \int_A |x| dx$ . Muestra que  $\mu \ll m$  pero dado  $\epsilon > 0$ , no existe  $\delta$  tal que  $m(A) < \delta$  implique  $\mu(A) < \epsilon$

### Ejercicio 4.2

Sea  $(r_n)$  una enumeración de los números racionales y dado  $n \in \mathbb{N}$  sea  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Borel no negativa tal que  $\int f_n dx = 1$  y se anule en el exterior del intervalo cerrado de longitud  $\frac{1}{2^n}$  centrado en  $r_n$ . Sea  $\mu(A) = \int_A \sum f_n dx$  para  $A$  un conjunto de Borel.

i) Muestra que  $\sum f_n(x) < \infty$  para  $m$ -casi todo  $x \in \mathbb{R}$

ii) Muestra que  $\mu$  es  $\sigma$ -finita,  $\mu \ll m$  y que todo abierto no vacío tiene medida infinita para  $\mu$ .

### Ejercicio 4.3

Sean  $\mu$  y  $\eta$  medidas  $\sigma$ -finitas en  $(X, \mathcal{A})$ , tales que  $\eta \ll \mu$  y sea  $g$  la derivada de Radon-Nikodym de  $\eta$  respecto de  $\mu$ . Muestra que si  $f$  es  $\mathcal{A}$ -medible, entonces es  $\eta$ -integrable si y sólo si  $fg$  es  $\mu$ -integrable y en tal caso  $\int f d\eta = \int fg d\mu$

### Ejercicio 4.4

Sea  $X$  no numerable,  $\mathcal{M}$  la clase de los conjuntos numerables o conumerables y sea  $\mu$  la medida de contar. Sea  $\eta(E) = 0$  si  $E$  es numerable y  $\eta(E) = \infty$  en otro caso. Prueba que  $\eta \ll \mu$ , pero no podemos definir la derivada de Radon-Nikodym en este caso.

### Ejercicio 4.5

Sean  $\lambda, \mu, \eta$  medidas positivas  $\sigma$ -finitas y sean  $f = \frac{d\lambda}{d(\lambda+\mu)}$ ,  $g = \frac{d\lambda}{d(\lambda+\eta)}$ ,  $F = \frac{d\lambda}{d(\lambda+\mu+\eta)}$ . Justifica la existencia de  $f, g, F$  y expresa  $F$  en términos de  $f$  y  $g$ .

### Ejercicio 4.6

Se considera en  $\mathbb{R}^2$  la medida  $\mu$  dada por  $d\mu = e^{-\sqrt{ax^2+by^2}} dx dy$ . Sea  $v : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow S_1$  la proyección sobre la esfera unidad y consideremos la medida imagen  $\lambda = v(\mu)$ . Prueba que  $\lambda$  es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue  $\sigma$  en  $S_1$  y halla  $\frac{d\lambda}{d\sigma}$ .

### Ejercicio 4.7

Sea  $(X, \mathcal{M})$  espacio medible y sea  $(P_n)$  una sucesión de probabilidades en  $\mathcal{M}$ . Encuentra una probabilidad  $P$  tal que  $P_n \ll P$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

### Ejercicio 4.8

Sea  $\mu$  la medida de contar en  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ . Prueba que la medida  $\nu$  en  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , es absolutamente continua respecto a  $\mu$  si y sólo si existe una sucesión  $\{a_n\}$  de reales positivos tal que

$$\nu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_n.$$

Calcula en este caso  $\frac{d\nu}{d\mu}$ .

### Ejercicio 4.9

Sea  $\mu$  la restricción de la medida de Lebesgue  $m$  a la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  generada por las bandas verticales en el plano. Si  $\nu(A \times \mathbb{R}) = m(A \times (0, 1))$ . Prueba que  $\nu$  es absolutamente continua con respecto a  $\mu$  pero no posee representación integral.

**Ejercicio 4.10**

a) Si  $(r, \phi)$  son las coordenadas polares en  $\mathbb{R}^2$  y  $\bar{\mu}$  es la medida de Lebesgue sobre el anillo  $\mathcal{F}$  de los sectores anulares  $A = \{(r, \phi) : 0 \leq r_1 \leq r < r_2, \phi_1 \leq \phi < \phi_2\}$ , con  $\phi_2 - \phi_1 \leq 2\pi$ , entonces  $\bar{\mu}$  genera la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue con la medida de Lebesgue  $m$ .

b) Sea  $\mathcal{F}$  el anillo anterior y se define  $\pi$  sobre  $\mathcal{F}$  por  $\pi(A) = (r_2 - r_1)(\phi_2 - \phi_1)$ . Demuestra que

$$m(A) = \int_A r dr d\phi = \int_A r d\pi.$$

c) Si  $f$  es  $m$ -integrable en  $A$ , entonces  $r \cdot f$  es  $\pi$ -integrable sobre  $A$  y

$$\int_A f dm = \int_A f \cdot r d\pi = \int_A r \cdot f dr d\phi.$$

**Ejercicio 4.11**

Sea  $\mu$  medida de probabilidad y sea  $\nu$  medida  $\sigma$ -finita en  $\mathbb{R}$  tal que  $\nu \ll \mu$ . Prueba que la derivada de Radon-Nikodym  $f$  cumple

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\nu(x-h, x+h]}{\mu(x-h, x+h]} = f(x)$$

en un conjunto de  $\mu$ -medida 1.

**Ejercicio 4.12**

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible. Denotemos por  $L^0(X)$  el espacio de las funciones (complejas)  $\sigma$ -medibles y por  $\mathcal{M}(X)$  el espacio de las medidas complejas sobre  $\sigma$ .

(i) Sea  $\mu \in \mathcal{M}(X)$ . Probar que existe una, esencialmente única,  $h \in L^1(|\mu|)$  de modo que  $d\mu = h d|\mu|$  y además  $|h(x)| = 1$   $\mu$ -a.e..

Diremos que  $f \in L^0(X)$  es  $\mu$ -integrable (denotado también  $f \in L^1(\mu)$ ) si  $f \cdot h \in L^1(|\mu|)$  y, en este caso, definimos para  $E \in \Sigma$

$$\int_E f d\mu = \int_E f \cdot h d|\mu|.$$

Comprobar que

(ii) Si  $\mu \in \mathcal{M}(X)$ ,  $f \in L^1(\mu)$  y  $E \in \Sigma$  entonces  $\int_E f d\mu = \int_X \chi_E f d\mu$ .

(iii) Si  $\mu \in \mathcal{M}(X)$ ,  $f, g \in L^0(X)$ ,  $f \in L^1(\mu)$  y  $f = g$   $|\mu|$ -a.e. entonces  $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$ .

(iv) Si  $\mu \in \mathcal{M}(X)$  entonces  $T : L^1(\mu) \rightarrow \mathbb{C}$  dado por  $T(f) = \int_X f d\mu$  es lineal.

**Ejercicio 4.13**

Sean  $\lambda, \mu$  medidas complejas absolutamente continuas respecto de una medida  $\sigma$ -finita  $\nu$ . Probar que para todo  $a, b \in \mathbb{C}$  se tiene

$$\frac{d(a\lambda + b\mu)}{d\nu} = a \frac{d\lambda}{d\nu} + b \frac{d\mu}{d\nu}.$$

**Ejercicio 4.14**

Sean  $\lambda, \mu, \nu$  medidas  $\sigma$ -finitas sobre  $(X, \Sigma)$  de modo que  $\lambda \ll \mu$  y  $\mu \ll \nu$ . Probar la regla de la cadena siguiente

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = \frac{d\lambda}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\nu}.$$

**Ejercicio 4.15**

Sean  $\mu, \nu$  medidas  $\sigma$ -finitas sobre  $(X, \Sigma)$  de modo que  $\nu \ll \mu$  y  $\mu \ll \nu$ . Probar que

$$\frac{d\nu}{d\mu} \neq 0 \quad \mu\text{-a.e.}, \quad \frac{d\mu}{d\nu} = \frac{1}{d\nu/d\mu} \quad \nu\text{-a.e.}$$

**Ejercicio 4.16**

Sean  $\mu_1, \nu_1$  medidas  $\sigma$ -finitas sobre  $(X_1, \Sigma_1)$  y sean  $\mu_2, \nu_2$  medidas  $\sigma$ -finitas sobre  $(X_2, \Sigma_2)$ .

- (i) Si  $\nu_i \ll \mu_i$  ( $i = 1, 2$ ) entonces  $\nu_1 \otimes \nu_2 \ll \mu_1 \otimes \mu_2$ .
- (ii) Calcular  $\frac{d(\nu_1 \otimes \nu_2)}{d(\mu_1 \otimes \mu_2)}$ .
- (iii) Describir, en el caso general, la descomposición de Lebesgue de  $\nu_1 \otimes \nu_2$  respecto de  $\mu_1 \otimes \mu_2$  respecto a las descomposiciones de Lebesgue respectivas.
- (iv) Probar que  $\nu_1 \otimes \nu_2 \ll \mu_1 \otimes \mu_2$  si y sólo si  $\nu_1 \ll \mu_1$  y  $\nu_2 \ll \mu_2$ .
- (v) Probar que  $\nu_1 \otimes \nu_2$  es mutuamente singular con  $\mu_1 \otimes \mu_2$  si y sólo si  $\nu_1$  es mutuamente singular con  $\mu_1$  o bien  $\nu_2$  mutuamente singular con  $\mu_2$ .

**Ejercicio 4.17**

Sean  $\alpha, \beta$  dos medidas reales definidas sobre  $(X, \Sigma)$  y  $\mu$  una medida  $\sigma$ -finita. Probar que

- (i)  $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ ,  $(\alpha + \beta)^+ \leq \alpha^+ + \beta^+$  y  $(\alpha + \beta)^- \leq \alpha^- + \beta^-$ .
- (ii)  $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$  si y sólo si  $\alpha^+, \alpha^-$  son mutuamente singulares respecto  $\beta^+, \beta^-$  respectivamente.
- (iii) Si  $\alpha$  es absolutamente continua respecto de  $\mu$  y  $\beta$  es mutuamente singular respecto de  $\mu$  entonces  $\alpha$  es mutuamente singular respecto de  $\beta$ .
- (iv) Si  $\alpha$  es absolutamente continua respecto de  $\mu$  y  $\alpha$  es también mutuamente singular respecto de  $\mu$  entonces  $\alpha = 0$ .

**Ejercicio 4.18**

Sean  $\alpha, \beta$  dos medidas reales definidas sobre  $(X, \Sigma)$  e  $(Y, \mathcal{R})$  respectivamente.

- (i) Probar que existe una medida real  $\alpha \otimes \beta$  sobre  $\Sigma \otimes \mathcal{R}$  de modo que  $\alpha \otimes \beta(A \times B) = \alpha(A)\beta(B)$  para  $A \in \Sigma$  y  $B \in \mathcal{R}$ .
- (ii) Hallar la descomposición de Hahn respecto de  $X \times Y$  respecto de  $\alpha \otimes \beta$ , conocidas las respectivas descomposiciones.
- (iii) Calcular  $(\alpha \otimes \beta)^+, (\alpha \otimes \beta)^-$  y  $|\alpha \otimes \beta|$  en términos de las de  $\alpha$  y  $\beta$ .

8

**Ejercicio 4.19**

Sea  $\Sigma = \mathcal{B}([t, \infty])$  y  $\mu(E) = m(E) + im(E \cap [0, \frac{1}{2}])$ .

- (i) Expresar  $|\mu|$  en términos de  $m$ .
- (ii) Probar que

$$\mu(E) \leq (Re\mu)^+(E) + (Re\mu)^-(E) + (Im\mu)^+(E) + (Im\mu)^-(E)$$

y que la desigualdad puede ser estricta.

- (iii) Encontrar  $h$  medible Borel tal que  $|h| = 1$  y  $\mu(E) = \int_E h d|\mu|$  para  $E \in \Sigma$ .

**Ejercicio 4.20**

Para cada boreliano de  $\mathbb{R}$  definimos

$$\mu(E) = \int_{E \cap (0, \infty)} \frac{\text{sen}^3 \pi t}{t^3} dt - \int_{E \cap (-\infty, 0)} \frac{\text{sen}^3 \pi t}{t^3} dt.$$

- (i) Probar que  $\mu$  es una medida real y calcular  $\mu(\mathbb{R})$ .
- (ii) Hallar la descomposición de Hahn de  $\mathbb{R}$  relativa a  $\mu$ .
- (iii) Ver si existe la derivada de Radon-Nikodym de  $|\mu|$  respecto de  $m$  y hallarla en su caso.

**Ejercicio 4.21**

Comprobar en los siguientes ejemplos que aunque  $\mu(E) = 0$  implica que  $\nu(E) = 0$ , no se cumple la condición  $\epsilon$ - $\delta$  de la continuidad absoluta :

- (i)  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ,  $\nu$  la medida de contar y  $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_n$ .
- (ii)  $([0, 1], \mathcal{B})$ ,  $d\nu(t) = \frac{1}{t} dt$  y  $\mu$  la medida de Lebesgue.
- (iii)  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ,  $\nu(E) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| m([n, n+1] \cap E)$  y  $\mu$  la medida de Lebesgue.

**Ejercicio 4.22**

Sea  $f(x) = \sqrt{1-x}$ ,  $x \leq 1$ ,  $f(x) = 0$ ,  $x > 1$ , y sea  $g(x) = x^2$ ,  $x \geq 0$ ,  $g(x) = 0$ ,  $x < 0$ . Sean  $\eta(E) = \int_E f(x)dx$ ,  $\mu(E) = \int_E g(x)dx$ . Halla la descomposición de Lebesgue de  $\eta$  respecto de  $\mu$ .

**Ejercicio 4.23**

Halla la descomposición de Lebesgue de la medida de Lebesgue-Stieljes dada por la función de distribución  $F(x) = (E[x])^2 - (x - E[x])^2$  respecto a la medida de Lebesgue.