ANÁLISIS DE FOURIER

Oscar Blasco

Contents

1 Espacios de funciones sobre $\mathbb{T}$ **5**
- 1.1 Preliminares sobre Análisis Funcional . . . 5
- 1.2 Funciones continuas e integrables en $\mathbb{T}$ . . . 8
- 1.3 Espacios $L^p(\mathbb{T})$ . . . 12

2 Análisis de Fourier en $\mathbb{T}$ **21**
- 2.1 Convolución y propiedades . . . 21
- 2.2 Resultados sobre coeficientes de Fourier . . . 24
- 2.3 Teorema de Plancherel . . . 27
- 2.4 Teoremas de Young . . . 31
- 2.5 Series de Fourier . . . 33
- 2.6 Núcleos de sumabilidad: Poisson y Fèjer . . . 37
- 2.7 Convergencia puntual de la serie de Fourier . . . 43

3 Análisis de Fourier en $\mathbb{R}^n$ **59**
- 3.1 Espacios de funciones continuas e integrables en $\mathbb{R}^n$ . . . 59
- 3.2 Transformada de Fourier. . . 62
- 3.3 Convolución en $\mathbb{R}^n$ . . . 68
- 3.4 Núcleos de sumabilidad en $\mathbb{R}^n$: Poisson y Gauss-Weierstrass . 71
- 3.5 Aproximación en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ . . . 76

4 Algunos teoremas clave **85**
- 4.1 Teorema de Plancherel en $\mathbb{R}$ . . . 85
- 4.2 Teoremas de Paley-Wiener . . . 90

Chapter 1

Espacios de funciones sobre $\mathbb{T}$

1.1 Preliminares sobre Análisis Funcional

Recordemos algunas nociones y resultados abstractos de Análisis Funcional que serán de uso habitual en los capítulos que siguen.

Definición 1.1.1 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. El espacio $(X, ||.||)$ es normado si para todo $x, y, z \in X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se cumple*
(i) $||x|| \geq 0$ *y* $||x|| = 0 \iff x = 0$
(ii) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.
Un espacio normado se dice de Banach si es un espacio completo, i.e toda sucesión de Cauchy es convergente.

Proposición 1.1.2 *Sea $(X, ||.||)$ un espacio normado.*
X es Banach sí y solamente si toda serie absolutamente convergente, i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty$, es convergente (i.e. existe $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_n \in X$).

Dem:
$\Rightarrow$Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie absolutamente convergente. Notar que si $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ entonces $||s_n - s_m|| \leq \sum_{k=m+1}^{n} ||x_k||$ y por tanto es de Cauchy en X y por hipótesis converge.
$\Longleftarrow$)Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en X. Para todo $k \in \mathbb{N}$ tomemos n_k subsucesión creciente de modo que

$$||x_n - x_m|| < \frac{1}{2^k}, \ \forall n, m \geq n_k.$$

Escribimos $y_1 = x_{n_1}$, $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} ||y_n|| \leq 1$ y por tanto existe $y \in X$ tal que $x_{n_k} = \sum_{j=1}^{k-1} y_j \to y$, es decir dado $\varepsilon > 0$ existe k_0 con

$$||x_{n_k} - y|| < \frac{\varepsilon}{2}, k \geq k_0.$$

Finalmente, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 con

$$||x_n - x_m|| < \frac{\varepsilon}{2}, n, m \geq n_0$$

Tomar $k_0' \geq k_0$ tal que $n_k \geq n_0$ para $k \geq k_0'$, entonces

$$||x_n - y|| \leq ||x_n - x_{n_k}|| + ||x_n - x_{n_k}|| < \varepsilon, n \geq n_{k_0'}$$

■

Nota 1.1.1 *Sea* $1 \leq p < \infty$.

$$\ell_p(\mathbb{Z}) = \{(z_n) \subset \mathbb{C} : \|(z_n)\|_p = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} |z_n|^p)^{1/p} < \infty\}.$$

$$\ell_\infty(\mathbb{Z}) = \{(z_n) \subset \mathbb{C} : \|(z_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |z_n| < \infty\}.$$

Son espacios de Banach (La demostración queda como ejercicio).

Nota 1.1.2 *Sea E un espacio normado y F un espacio de Banach.*

$$\mathcal{L}(E, F) = \{T : E \to F;\ \textit{aplicaciones lineales y continuas}\}.$$

Con la norma $||T|| = sup_{||x||_E \leq 1} ||T(x)||_F$ es un espacio de Banach.
En particular $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ es Banach para todo espacio normado E.

Definición 1.1.3 *Sea $(H, +, .)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Se dice que es un espacio prehilbert si tiene además un producto escalar (ó producto interno) $\langle\ ,\ \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ de modo que para todo $x, y, z \in H$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ se cumple*
(i) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,
(ii) $\langle \lambda_1 x + \lambda_2 y, z\rangle = \lambda_1\langle x, z\rangle + \lambda_2\langle y, z\rangle$,
(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ y $\langle x, x\rangle = 0$ sí y sólo si $x = 0$.
Un espacio prehilbert se dice espacio de Hilbert si es completo respecto a la norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Nota 1.1.3

$$\ell_2(\mathbb{Z}) = \{(z_n) \subset \mathbb{C} : \|(z_n)\|_2 = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} |z_n|^2)^{1/2} < \infty\}.$$

Con el producto escalar

$$\langle (z_n), (w_n) \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z_n \bar{w}_n$$

es un espacio de Hilbert.

Definición 1.1.4 *Sea $(A, ||.||)$ un espacio normado. Se dice que es un álgebra normada si tiene además una operación interna $A \times A \to A$ de modo que para todo $x, y, z \in X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se cumple*

(i) $x(y+z) = xy + yz, \quad (y+z)x = yx + zx$

(ii) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$.

(iii) $x(yz) = (xy)z$.

(iv) $||xy|| \leq ||x||||y||$.

Conmutativa si

(v) $xy = yx$

Con unidad si existe $e \in A$ tal que

(vi) $xe = ex = x$

Con unidad aproximada (acotada) si existe $x_n \in A$ ($sup_{n\in\mathbb{N}}||x_n|| < \infty$) tal que

(vii) $xx_n = x_n x \to x$ *cuando* $n \to \infty$.

Un álgebra normada se dice de Banach si es un espacio completo, i.e toda sucesión de Cauchy es convergente.

Nota 1.1.4

$$c_0(\mathbb{Z}) = \{(z_n) : \lim_{|n|\to\infty} z_n = 0\}.$$

Con el producto puntual $(z_n)(z'_n) = (z_n z'_n)$ y la norma $||(z_n)|| = sup_{n\in\mathbb{N}}|z_n|$ es un álgebra de Banach conmutativa sin unidad pero con unidad aproximada acotada $(z_n) = e_n = (0, 0, ..., 1, 0, ...)$

Nota 1.1.5 *Sea K un espacio topológico compacto.*

$$C(K) = \{f : K \to \mathbb{C};\ \textit{funciones continuas}\}.$$

Con el producto puntual $f.g(t) = f(t).g(t)$ y la norma $||f||_\infty = sup_{t\in K}|f(t)|$ es un álgebra de Banach conmutativa con unidad dada por la función unidad $e(t) = 1$ para todo $t \in K$.

Nota 1.1.6

$$C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ \textit{funciones continuas con } \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}.$$

Con el producto puntual $f.g(t) = f(t).g(t)$ y la norma $||f||_\infty = sup_{t\in K}|f(t)|$ es un álgebra de Banach conmutativa sin unidad pero con unidad aproximada acotada dada por las funciones $e_n(t) = 1$ para todo $t \in [-n, n]$, $e_n(t) = t - (n+1)$ si $t \in [n, n+1]$ y $e_n(t) = n + 1 - t$ si $t \in [-n-1, -n]$.

Nota 1.1.7 *Sea E un espacio de Banach.*

$$\mathcal{L}(E, E) = \{T : E \to E;\ \textit{aplicaciones lineales y continuas}\}.$$

Con el producto de composición $T_1T_2(x) = T_1(T_2(x))$ y $||T|| = sup_{||x||\leq 1}||T(x)||$ es un álgebra de Banach no conmutativa con unidad dada por el operador identidad $I(x) = x$ para todo $x \in E$.

1.2 Funciones continuas e integrables en $\mathbb{T}$

Definición 1.2.1 *Consideremos $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.*

Es un espacio métrico compacto con la topología inducida por $\mathbb{C}$.

Es un grupo multiplicativo ($z_1, z_2 \in \mathbb{T}$ entonces $z_1z_2 \in \mathbb{T}$) con unidad $e = 1$ y de modo que $z^{-1} = \bar{z}$.

Consideremos $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ dado por $\phi(x) = e^{ix}$. Es un homomorfismo de grupos continuo, suprayectivo y con $ker(\phi) = \{x \in \mathbb{R} : e^{ix} = 1\} = 2\pi\mathbb{Z}$.

Recordemos que para cada $z \in \mathbb{T}$ existe un único $x \in [-\pi, \pi)$ de modo que $e^{ix} = z$ (se conoce como Argumento principal de z). Por tanto una identificación de $\mathbb{T}$ es como el grupo cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = [-\pi, \pi)$.

Según ésto una función $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ continua (o medible Borel) corresponde a una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua (o medible Borel) que sea 2π-periódica.

Usaremos indistintamente la notación $f(t) = f(e^{it})$ con $t \in [-\pi, \pi)$ para indicar $f(z)$ con $z = e^{it} \in \mathbb{T}$, asi como $m(A) = \int_A \frac{dt}{2\pi}$ para $A \in [-\pi, \pi)$ para la medida de Lebesgue normalizada en $[-\pi, \pi)$.

Definición 1.2.2

$$C(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C};\ \textit{continuas}\} = \{f \in C([-\pi, \pi]) : f(\pi) = f(-\pi)\}.$$

El subespacio

$$\Pi(\mathbb{T}) = \{f(t) = \sum_{k=-M}^{N} \alpha_k e^{ikt} : N, M \in \mathbb{N}, \alpha_k \in \mathbb{C}\}$$

se conoce por el espacio de los polinomios trigonométricos.

Proposición 1.2.3 *$C(\mathbb{T})$ un álgebra de Banach con el producto puntual y la norma dada por $||f||_{C(T)} = sup_{t\in[-\pi,\pi)}|f(t)|$ y $\Pi(\mathbb{T})$ es denso en $C(\mathbb{T})$.*

DEM: Las propiedades de álgebra normada son de comprobación inmediata.

Sea $\{f_n\} \subset C(\mathbb{T})$ una sucesión de Cauchy. Entonces $\{f_n(t)\}$ es de Cauchy y por tanto convergente para todo $t \in [-\pi, \pi)$. Sea $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$. Veamos que es una función continua.

Dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 de modo que

$$sup_{t\in[-\pi,\pi)}|f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad n, m \geq n_0.$$

Pasando al límite en $m \to \infty$,

$$sup_{t\in[-\pi,\pi)}|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad n \geq n_0.$$

Como f_{n_0} es continua en t_0 existe $\delta > 0$ de modo que

$$|f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |t - t_0| < \delta$$

Aplicando la desigualdad triangular se tiene

$$|f(t) - f(t_0)| \leq |f(t) - f_{n_0}(t)| + |f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)| + |f_{n_0}(t_0) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

Para ver la densidad puede usarse el Teorema de Stone-Weierstrass (Toda subálgebra autoadjunta de $C(K)$ con K compacto, que separa puntos y contiene a las constantes es densa en $C(K)$.)

Es inmediato observar que ésto ocurre con $\Pi(\mathbb{T})$. ∎

Nota 1.2.1 *Para poder trabajar con el espacio $L^1(\mathbb{T})$ se necesita recordar algunas nociones de teoría de la medida.*

1.- Dado X un conjunto y $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ se dice que es una σ-álgebra sobre X si se cumple *a)* $\emptyset, X \in \Sigma$.

b) Si $A_n \in \Sigma$ *entonces* $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

c) Si $A \in \Sigma$ *entonces* $X \setminus A_n \in \Sigma$.

2.- Dada $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ *se llama* σ*-álgebra engendrada por* $\mathcal{R}$ *y se denota* $\sigma(\mathcal{R})$*, a la menor* σ*-álgebra que contiene a* $\mathcal{R}$.

3.- Si X *es un espacio topológico y* $\mathcal{G}$ *es la familia de los abiertos de la topología, se conoce por* σ*-álgebra de Borel a la* σ*-álgebra generada por los abiertos, y se denota* $\mathcal{B}(X)$*. A sus elementos se le llama borelianos o medibles Borel.*

4.- Dado un medible Lebesgue A *(en* $\mathbb{R}^n$ *o en* $[a, b)$*) existe un Boreliano* B *y un conjunto nulo* N *tal que* $A = B \cup N$.

5.- Dada f *medible Lebesgue (en* $\mathbb{R}^n$ *o en* $[a, b)$*) existe una* g *medible Borel (i.e límite en casi todo punto de simples sobre conjuntos de Borel, o bien* $\{x : f(x) \in G\}$ *es boreliano para todo* G *abierto (en* $\mathbb{R}^n$ *o en* $[a, b)$*)) tal que* $f = g$ *a.e.*

6.- Para todo $\varepsilon > 0$ *y todo boreliano* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$ *existen un compacto* K *y un abierto* G *tales que* $K \subseteq A \subseteq G$ *con* $m(G \setminus K) < \varepsilon$.

Definición 1.2.4 *Una función* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *se dice integrable Lebesgue si es medible Lebesgue y* $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \frac{dt}{2\pi} < \infty$*. Nótese que si* $f = 0$ *a.e. entonces* f *es medible Lebesgue y* $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \frac{dt}{2\pi} = 0$.

Con vista a definir una norma entre las funciones integrable consideramos la siguiente relación de equivalencia: Sean f, g *medibles Lebesgue sobre* $\mathbb{T}$

$f \approx g$ *si* $f = g$ *a.e. , i.e* $m(\{t \in [-\pi, \pi) : f(t) \neq g(t)\}) = 0$.

Definimos las clases de equivalencia

$$[f] = \{g \text{ medibles Lebesgue en } \mathbb{T} \text{ con } g = f a.e\}.$$

$$L^1(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} \text{ clases de funciones integrables Lebesgue}\}.$$

Una colección de funciones integrables son las funciones simples:

$$\mathcal{S}(\mathbb{T}) = \{f(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{A_k}(t) : N \in \mathbb{N}, \alpha_k \in \mathbb{C}, A_k \text{ medibles } \}.$$

Proposición 1.2.5 $L^1(\mathbb{T})$ *un espacio de Banach con la norma dada por* $||f||_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \frac{dt}{2\pi}$.

Dem: Es inmediato comprobar que $||f||_1$ es una norma. Para ver la completitud usaremos la proposición del principio.

Supongamos $\{f_n\} \subset L^1(\mathbb{T})$ con $\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_1 < \infty$.

Es inmediato, del teorema de la convergencia monótona, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)| \frac{dt}{2\pi} < \infty.$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)| < \infty$ a.e., de donde se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = f(t)$ converge a.e.

Además

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{n=N}^{\infty} f_n(t)| \frac{dt}{2\pi} \leq \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=N}^{\infty} |f_n(t)| \frac{dt}{2\pi} = \sum_{n=N}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(t)| \frac{dt}{2\pi}$$

y por tanto $||f_N - f||_1 \to 0$ cuando $N \to \infty$.

$\blacksquare$

Nota 1.2.2 *$C(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ y $||f||_1 \leq ||f||_\infty$ para $f \in C(\mathbb{T})$.*

Proposición 1.2.6 *$\mathcal{S}(\mathbb{T})$ y $C(\mathbb{T})$ son densos en $L^1(\mathbb{T})$.*

Dem:

Para ver la densidad de las funciones simples recordemos que si $f \geq 0$ medible Lebesgue existe una sucesión de funciones simples $s_n \geq 0$ tales que $s_n \leq s_{n+1}$ y $\lim_{n\to\infty} s_n = f$.

Usando la descomposición $f = (Re(f))^+ - (Re(f))^- + i(Im(f))^- - i(Im(f))^-$ podemos encontrar $s_n \in \mathcal{S}(\mathbb{T})$ de modo que $\lim_{n\to\infty} s_n = f$ y $|s_n| \leq 4|f|$.

Tomando $g_n = f - s_n \to 0$ y como $|g_n| \leq 5|f|$ entonces el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue garantiza que $||f - s_n||_1 \to 0$.

Ahora para la densidad de $C(\mathbb{T})$. Dado $\varepsilon > 0$ y $0 \neq f \in L^1(\mathbb{T})$ existe una función simple $s \in \mathcal{S}(\mathbb{T})$, $s = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j}$, tal que $||f - s||_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Para cada A_j existen un compacto K_j y un abierto G_j con $K_j \subset A_j \subset G_j$ y de modo que $m(G_j \setminus K_j) < \varepsilon/4\sum_{j=1}^{m} |\alpha_j|$.

Ahora, usando el Lema de Uryshon, tomar $\phi_j \in C(\mathbb{T})$ de modo que $0 \leq \phi_j(t) \leq 1$, $\phi_j(t) = 1$ si $t \in K_j$ y $\phi_j(t) = 0$ si $t \notin G_j$.

Definir $g = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \phi_j \in C(\mathbb{T})$.

Es claro que

$$\begin{aligned}||s-g||_1 &= \sum_{j=1}^m |\alpha_j| \int_{G_j} |\chi_{A_j}(t) - \phi_j(t)| \frac{dt}{2\pi} \\ &= \sum_{j=1}^m |\alpha_j| \int_{G_j \setminus K_j} |\chi_{A_j}(t) - \phi_j(t)| \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq 2\sum_{j=1}^m |\alpha_j| m(G_j \setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Ahora $||f-g||_1 \leq ||f-s||_1 + ||s-g||_1 < \varepsilon$. ∎

Corolario 1.2.7 $\Pi(\mathbb{T})$ *es denso en* $L^1(\mathbb{T})$.

DEM: Combinar la densidad de la continuas en $L^1(\mathbb{T})$ y la de los polinomios en $C(\mathbb{T})$, junto con el contenido $C(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$. ∎

1.3 Espacios $L^p(\mathbb{T})$

Definición 1.3.1 *Sea* $1 \leq p < \infty$. $L^p(\mathbb{T})$ *denota el espacio vectorial de clases de funciones medibles Lebesgue* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *tales que* $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \frac{dt}{2\pi} < \infty$ *y ponemos*

$$||f||_p = (\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \frac{dt}{2\pi})^{1/p}.$$

Definición 1.3.2 *Dada* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *medible, llamamos función de distribución de* f, *denotada* m_f *a la función definida para* $\lambda > 0$

$$m_f(\lambda) = m(\{t \in \mathbb{T} : |f(t)| > \lambda\}).$$

Teorema 1.3.3 *Si* $f \in L^p(\mathbb{T})$ *entonces*
(i) $m_f(\lambda) \leq \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}$.
(ii) $\|f\|_p^p = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_f(\lambda) d\lambda$.

DEM: (i)

$$\begin{aligned}m_f(\lambda) &= m(\{t \in \mathbb{T} : |f(t)|^p > \lambda^p\}) \\ &\leq \int_{\{|f|>\lambda\}} \frac{|f(t)|^p}{\lambda^p} \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq \frac{1}{\lambda^p} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \frac{dt}{2\pi}\end{aligned}$$

(ii) Consideremos la función de dos variables $\Phi : \mathbb{T} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $(t, \lambda) \to |f(t)| - \lambda$.

No es dificil ver que Φ es medible. Si denotamos $E = \{(t, \lambda) : \Phi(t, \lambda) > 0\}$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_f(\lambda) d\lambda &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \Big(\int_{\{t:|f(t)|>\lambda\}} \frac{dt}{2\pi}\Big) d\lambda \\
&= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} \chi_E(t, \lambda) \frac{dt}{2\pi}\Big) d\lambda \\
&= \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} p\lambda^{p-1} \chi_E(t, \lambda) \frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\int_0^\infty p\lambda^{p-1} \chi_E(t, \lambda) d\lambda\Big) \frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\int_0^{|f(t)|} p\lambda^{p-1} d\lambda\Big) \frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \frac{dt}{2\pi}
\end{aligned}$$

■

Proposición 1.3.4 *Sea $1 < p < \infty$, denotamos p' el exponente conjugado de p, i.e. $1/p + 1/p' = 1$. Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{T})$ entonces $fg \in L^1(\mathbb{T})$.*

DEM: Supongamos que $\|f\|_p = \|g\|_{p'} = 1$. Usando el Teorema 1.3.3 se tiene

$$\begin{aligned}
\|fg\|_1 &= \int_0^\infty m_{fg}(\lambda) d\lambda \\
&= \int_0^\infty m(\{|fg| > \lambda\}) d\lambda \\
&\leq \int_0^\infty m(\{|f| > \lambda^{1/p}\} \cup \{|g| > \lambda^{1/p'}\}) d\lambda \\
&\leq \int_0^\infty m(\{|f|^p > \lambda\} d\lambda + \int_0^\infty m(\{|g|^{p'} > \lambda\}) d\lambda \leq 2
\end{aligned}$$

Por homogeneidad, en general si $\|f\|_p \|g\|_{p'} > 0$ llamando $f' = f/\|f\|_p$ and $g' = g/\|g\|_{p'}$ se tiene $\|fg\|_1 \leq 2\|f\|_p \|g\|_{p'}$. ■

Nota 1.3.1 *Sea* $\Omega = \mathbb{T}\times ... \times\mathbb{T}$ *el espacio de medida con la medida* $m_n(A) = \int_A \frac{dt_1}{2\pi}...\frac{dt_n}{2\pi}$. *Considerando* $F(t_1, ..., t_n)$ *medible y poniendo*

$$m_f(\lambda) = m_n(\{(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{T} \times ... \times \mathbb{T} : |F(t_1, ..., t_n)| > \lambda\}).$$

la demostración anterior conduce a la estimación:

$$\int_{\mathbb{T}\times...\times\mathbb{T}} |F(t_1, ..., t_n)||G(t_1, ..., t_n)|\frac{dt_1}{2\pi}...\frac{dt_n}{2\pi} \leq 2\|F\|_p\|G\|_{p'}.$$

Proposición 1.3.5 *(Desigualdad de Hölder) Sea* $1 < p < \infty$, *denotamos* p' *el exponente conjugado de* p, *i.e.* $1/p + 1/p' = 1$. *Si* $f \in L^p(\mathbb{T})$ *y* $g \in L^{p'}(\mathbb{T})$ *entonces*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_{p'}.$$

Dem: Apliquemos la nota anterior a $F(t_1, ..., t_n) = f(t_1)...f(t_n)$ y $G(t_1, ..., t_n) = g(t_1)...g(t_n)$. Se tiene

$$\begin{aligned}
(\int_{\mathbb{T}} |f(t)g(t)|\frac{dt}{2\pi})^n &= \int_{\mathbb{T}^n} |f(t_1)...f(t_n)||g(t_1)...g(t_n)|\frac{dt_1}{2\pi}...\frac{dt_n}{2\pi} \\
&\leq 2(\int_{\mathbb{T}^n} |f(t_1)...f(t_2)|^p\frac{dt_1}{2\pi}...\frac{dt_n}{2\pi})^{1/p}(\int_{\mathbb{T}^n} |g(t_1)...g(t_2)|^{p'}\frac{dt_1}{2\pi}...\frac{dt_n}{2\pi})^{1/p'} \\
&= 2\|f\|_p^n\|g\|_{p'}^n.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_{\mathbb{T}} |f(t)g(t)|\frac{dt}{2\pi} \leq 2^{1/n}\|f\|_p\|g\|_{p'}.$$

Pasando ahora al límite se obtiene el resultado. ∎

Ejercicio 1.3.1 *Sean* $1 < p_1 \leq p_2 \leq p_3 < \infty$ *tales que* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$, *y sean* $f_i \in L^{p_i}(\mathbb{T})$ *para* $i = 1, 2, 3$. *Probar que*

$$\int_{\mathbb{T}} |f_1(t)f_2(t)f_3(t)|\frac{dt}{2\pi} \leq \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}\|f_3\|_{p_3}.$$

Proposición 1.3.6 *Sea* $1 < p < \infty$. *Entonces* $(L^p(\mathbb{T}), \|.\|_p)$ *un espacio de Banach.*

DEM: Comprobemos que $||f||_p$ es una norma. Es inmediato que $\|f\|_p = 0$ sí y sólo si $f = 0$ a.e. y que $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p$. Veamos la desigualdad triangular: (Desigualdad de Minkowski)

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Usaremos la desigualdad de Hölder y el hecho $p'(p-1) = p$

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_{\mathbb{T}} |f(t)+g(t)|^{p-1}|f(t)+g(t)|\frac{dt}{2\pi} \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} |f(t)+g(t)|^{p-1}|f(t)|\frac{dt}{2\pi} + \int_{\mathbb{T}} |f(t)+g(t)|^{p-1}|g(t)|\frac{dt}{2\pi} \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} |f(t)+g(t)|^{(p-1)p'}\frac{dt}{2\pi})^{1/p'}(\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p\frac{dt}{2\pi})^{1/p} \\
&+ (\int_{\mathbb{T}} |f(t)+g(t)|^{(p-1)p'}\frac{dt}{2\pi})^{p/p'}(\int_{\mathbb{T}} |g(t)|^p\frac{dt}{2\pi})^{1/p} \\
&= \|f+g\|_p^{p/p'}(\|f\|_p + \|g\|_p)
\end{aligned}$$

Observese que $|f+g| \leq 2^p \max\{|f|, |g|\}$ y por tanto $(f+g) \in L^p(\mathbb{T})$. Podemos suponer, pues, que $0 < \|f+g\|_p < \infty$. Por tanto se tiene $\|f+g\|_p = \|f+g\|_p^{p-p/p'} \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)$.

Para ver la completitud argumentamos como en el caso $p = 1$.

Supongamos $\{f_n\} \subset L^p(\mathbb{T})$ con $\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_p < \infty$.

Consideremos $h_n(t) = (\sum_{k=1}^{n} |f_k(t)|)^p$, que es una sucesión monótona creciente. Además, usando la desigualdad de Minkowski, se tiene

$$\int_{\mathbb{T}} h_n(t)\frac{dt}{2\pi} = \|\sum_{k=1}^{n} |f_k|\|_p^p \leq (\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p)^p < \infty.$$

Es inmediato, del teorema de la convergencia monótona, que

$$\int_{\mathbb{T}} (\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)|)^p = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} h_n(t)\frac{dt}{2\pi} < \infty.$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)| < \infty$ a.e., de donde se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = f(t)$ converge a.e.

Además, si $M, N \in \mathbb{N}$, con $N \leq M$

$$(\int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{n=N}^{M} f_n(t)|^p \frac{dt}{2\pi})^{1/p} \leq \sum_{n=N}^{M} (\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(t)|^p \frac{dt}{2\pi})^{1/p}.$$

Fijamos $N \in \mathbb{N}$. Usando ahora el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tenemos $|\sum_{n=N}^{M} f_n(t)|^p \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)|)^p \in L^1(\mathbb{T})$ y

$$\lim_{M\to\infty} |\sum_{n=N}^{M} f_n(t)|^p = |f(t) - \sum_{n=1}^{N} f_n(t)|^p.$$

Por tanto $||f - \sum_{n=1}^{N} f_n||_p^p \to 0$ cuando $N \to \infty$.

■

Nota 1.3.2 *(i) $C(\mathbb{T}) \subseteq L^p(\mathbb{T})$ y $||f||_p \leq ||f||_\infty$ para $f \in C(\mathbb{T})$.*

(ii) Si $1 \leq p \leq q < \infty$ entonces $L^q(\mathbb{T}) \subseteq L^p(\mathbb{T})$ y $||f||_p \leq ||f||_q$ para $f \in L^q(\mathbb{T})$.

Proposición 1.3.7 *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces $\Pi(\mathbb{T})$, $C(\mathbb{T})$ y $\mathcal{S}(\mathbb{T})$ son densos en $L^p(\mathbb{T})$.*

DEM: Veamos la densidad de las funciones simples. Por el mismo argumento usado en el caso $p = 1$ podemos encontrar $s_n \in \mathcal{S}(\mathbb{T})$ de modo que $\lim_{n\to\infty} s_n = f$ y $|s_n| \leq 4|f|$. Tomando $g_n = |f - s_n|^p \to 0$ se tiene $|g_n| \leq C|f|^p$. Entonces el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue garantiza que $||f - s_n||_p^p \to 0$.

Para la densidad de $C(\mathbb{T})$ usamos lo mismo que en el caso $p = 1$ con la siguiente modificación. Dado $\varepsilon > 0$ y $0 \neq f \in L^1(\mathbb{T})$ existe una función simple $s \in \mathcal{S}(\mathbb{T})$, $s = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j}$, tal que $||f - s||_p < \frac{\varepsilon}{2}$.

Para cada A_j existen un compacto K_j y un abierto G_j con $K_j \subset A_j \subset G_j$ y de modo que $m(G_j \setminus K_j) < (\varepsilon/4 \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j|)^p$.

Ahora, usando el Lema de Uryshon, tomar $\phi_j \in C(\mathbb{T})$ de modo que $0 \leq \phi_j(t) \leq 1$, $\phi_j(t) = 1$ si $t \in K_j$ y $\phi_j(t) = 0$ si $t \notin G_j$.

Definir $g = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \phi_j \in C(\mathbb{T})$.

Es claro que

$$\begin{aligned} ||s - g||_p &\leq \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j| (\int_{G_j} |\chi_{A_j}(t) - \phi_j(t)|^p \frac{dt}{2\pi})^{1/p} \\ &= \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j| (\int_{G_j \setminus K_j} |\chi_{A_j}(t) - \phi_j(t)|^p \frac{dt}{2\pi})^{1/p} \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j| m^{1/p}(G_j \setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ahora $||f-g||_p \leq ||f-s||_p + ||s-g||_p < \varepsilon$.

Combinando la densidad de la continuas en $L^p(\mathbb{T})$ y la de los polinomios en $C(\mathbb{T})$, junto con el contenido $C(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$ se obtiene la densidad de $\Pi(\mathbb{T})$ en $L^p(\mathbb{T})$ ∎

Definición 1.3.8 *Sea $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{T})$ y $t \in [-\pi, \pi)$, definimos $f_t(s) = f(s+t)$, (o bien para $z \in \mathbb{T}$ ponemos $f_z(w) = f(zw)$ para $w \in \mathbb{T}$).*

Esta operación genera un subgrupo en $L^p(\mathbb{T})$, pues $f_0 = f$ y $(f_t)_s = f_{t+s}$.

Por otro lado es claro que $||f_t||_p = ||f||_p$ y $||f_t - f_s||_p = ||f_{t-s} - f||_p$

Proposición 1.3.9 *(i) Sea $f \in C(\mathbb{T})$ entonces la aplicación $t \to f_t$ es continua de $\mathbb{T}$ en $C(\mathbb{T})$.*

(i) Sea $f \in L^p(\mathbb{T})$ entonces la aplicación $t \to f_t$ es continua de $\mathbb{T}$ en $L^p(\mathbb{T})$.

DEM:

(i) Usando que $f \in C(\mathbb{T})$ es uniformemente continua, por ser continua y periódica (o bien continua en el compacto $\mathbb{T}$), se tiene la afirmación, pues dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que

$$|f(t) - f(t')| < \varepsilon, \text{ si } |t - t'| < \delta$$

Esto es, para $t_0 \in [-\pi, \pi)$ y $|t - t_0| < \varepsilon$ se tiene

$$||f_t - f_{t_0}||_\infty = \sup_{s \in [-\pi, \pi)} |f(t+s) - f(t_0 + s)| < \varepsilon.$$

(ii) Dada $f \in L^p(\mathbb{T})$ y $\varepsilon > 0$ tomar $g \in C(\mathbb{T})$ con $||f-g||_p < \frac{\varepsilon}{3}$.

Ahora, usando las observaciones precedentes, basta ver la continuidad en $t = 0$,

$$||f_t - f||_p \leq ||f_t - g_t||_p + ||g_t - g||_p + ||g - f||_p \leq 2||f-g||_p + ||g_t - g||_\infty < \varepsilon.$$

∎

Definición 1.3.10 *Sea $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ una función medible. Diremos que está esencialmente acotada si existe $M \geq 0$ tal que $|f| \leq M$ a.e. es decir*

$$m(\{t \in [-\pi, \pi) : |f(t)| > M) = 0$$

o bien $m_f(M) = 0$ para algún valor $M \geq 0$. Al valor M se le dice cota esencial de $|f|$.

Denotamos $L^\infty(\mathbb{T})$ el espacio de la clases de equivalencia de funciones esencialmente acotadas y ponemos

$$\|f\|_\infty = \inf\{M : |f| \leq M a.e.\}.$$

Proposición 1.3.11 *Sea $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Entonces*
(i) $\|f\|_\infty = \inf_{m(N)=0}\{\sup_{t\notin N} |f(t)|\}$.
(ii) Existe N_0 medible de medida nula, tal que $\|f\|_\infty = \sup_{t\notin N_0} |f(t)|$.

DEM: (i) Pongamos $A = \inf_{m(N)=0}\{\sup_{t\notin N} |f(t)|\}$. Si M es una cota esencial de $|f|$ entonces $N = \{t : |f(t)| > M\}$ en un conjunto nulo y se tiene $\sup_{t\notin N} |f(t)| \leq M$. Por tanto $A \leq M$ y tomando ínfimos se obtiene $A \leq \|f\|_\infty$.

Reciprocamente, para cada $\varepsilon > 0$ existe N_ε conjunto nulo tal que $M_\varepsilon = \sup_{t\notin N_\varepsilon} |f(t)| < A + \varepsilon$. Como M_ε es cota esencial se obtiene $\|f\|_\infty \leq M_\varepsilon \leq A + \varepsilon$, y consecuentemente $\|f\|_\infty \leq A$.

(ii) Usando (i) se tiene que existe una sucesión de conjuntos nulos N_k tales que

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{t\notin N_k} |f(t)| < \|f\|_\infty + \frac{1}{k}.$$

Sea $N_0 = \cup_{k=1}^\infty N_k$. Es un conjunto nulo y $\sup_{t\notin N_0} |f(t)| = \|f\|_\infty$. ■

Teorema 1.3.12 $(L^\infty(\mathbb{T}), \|.\|_\infty)$ *es un espacio de Banach.*

DEM: Claramente $\|f\|_\infty = 0$ implica $f = 0$ a.e.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces $\|\lambda f\|_\infty = \inf_{m(N)=0}\{\sup_{t\notin N} |\lambda f(t)|\} = |\lambda|\|f\|_\infty$.

Si $f, g \in L^\infty(\mathbb{T})$ entonces $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$ a.e. y $|g(t)| \leq \|g\|_\infty$ a.e. Por tanto $|f(t) + g(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ a.e. y por consiguiente $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\mathbb{T})$. Fijamos $n, m \in \mathbb{N}$ y para la función $f_n - f_m$ encontramos un conjunto nulo $N_{n,m}$ de modo que

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{t\notin N_{n,m}} |f_n(t) - f_m(t)|.$$

Definimos $N = \cup_{n,m} N_{n,m}$. Si $t \notin N$ se tiene que $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Definimos $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ para $t \notin N$ y definimos $f(t) = 0$ para $t \in N$. Veamos que $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ y que $\lim f_n = f$ en $L^\infty(\mathbb{T})$. Por un lado, si $t \notin N$,

$$|f(t)| = \lim_{n\to\|} |f_n(t)| \leq \sup_N \|f_n\|_\infty$$

y por tanto $f \in L^\infty(\mathbb{T})$.

Además, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ para $n, m \geq n_0$. Ahora bien, para $t \notin N$ y $n \geq n_0$,

$$|f_n(t) - f(t)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(t) - f_m(t)| \leq \limsup_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon,$$

de donde se concluye que $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ para $n \geq n_0$. ∎

Proposición 1.3.13 *(i)* $L^\infty(\mathbb{T}) \subseteq \cap_{p\geq 1} L^p(\mathbb{T})$. *Además si* $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ *entonces* $\sup_{p\geq 1} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$.

(ii) Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ *y* $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ *entonces* $fg \in L^1(\mathbb{T})$. *Además* $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

Dem: Ejercicio. ∎

Proposición 1.3.14 $C(\mathbb{T})$ *es un subespacio cerrado de* $L^\infty(\mathbb{T})$.

Dem: Sea $f \in C(\mathbb{T})$. Veamos que si $f \in C(\mathbb{T})$ entonces $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ y además $\|f\|_\infty = \|f\|_{C(\mathbb{T})}$. Es claro que $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{C(\mathbb{T})}$.

Como $\|f\|_{C(\mathbb{T})} = |f(t_0)|$ para cierto $t_0 \in [-\pi, \pi)$ veamos que para todo N conjunto nulo, se tiene $\sup_{t\notin N} |f(t)| \geq |f(t_0)|$.

En efecto, si $t_0 \notin N$ ésto es obvio. Supongamos pues que $t_0 \in N$. Como $(t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}) \cap ([-\pi, \pi) \setminus N) \neq \varnothing$ entonces podemos considerar una sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de puntos en $[-\pi, \pi) \setminus N$ convergiendo a t. Ahora usando la continuidad de f se obtiene

$$\sup_{t\notin N} |f(t)| \geq \sup_{k\in\mathbb{N}} |f(t_k)| \geq |f(t_0)|$$

Para ver que $C(\mathbb{T})$ es cerrado, tomemos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de modo que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $L^\infty(\mathbb{T})$ y probemos que $f = g$ a.e. para alguna $g \in C(\mathbb{T})$.

Usando que $\|f_n - f_m\|_\infty = \|f_n - f_m\|_{C(\mathbb{T})}$ y la completitud de $C(\mathbb{T})$ se tiene que existe $g \in C(\mathbb{T})$ de modo que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en $C(\mathbb{T})$. Por unicidad del límite se tiene que $f = g$ como elemento de $L^\infty(\mathbb{T})$.

∎

Chapter 2

Análisis de Fourier en $\mathbb{T}$

2.1 Convolución y propiedades

Motivemos la noción que sigue usando la variable compleja.

Sea f una función holomorfa en el disco unidad $D(0,r)$ con $r>1$. Usando la fórmula de Cauchy podemos decir que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{f(w)}{1-\bar{w}z}\frac{dw}{w} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{it})}{1-e^{-it}z}\frac{dt}{2\pi}.$$

Si ponemos $z = re^{i\theta}$ tenemos

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{it})}{1-re^{i(\theta-t)}}\frac{dt}{2\pi}.$$

Definición 2.1.1 *Dadas $f, g \in C(\mathbb{T})$ definimos la convolución de f y g como la nueva función*

$$f * g(s) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(s-t)\frac{dt}{2\pi},$$

o de otro modo

$$f * g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} f(w)g(zw^{-1})\frac{dw}{w}.$$

Nota 2.1.1 *Obsérvese que $t \to f(t)g(s-t)$ es una función continua para todo $s \in [-\pi, \pi)$, por lo cual la convolución está bien definida.*

Proposición 2.1.2 *$C(\mathbb{T})$ es un álgebra de Banach conmutativa con la convolución, es decir $*: C(\mathbb{T}) \times C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$ dada por $(f,g) \to f*g$ es una aplicación bilineal continua.*

Dem: En primer lugar hay que ver que está bien definida.

Dadas $0 \neq f, g \in C(\mathbb{T})$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|g(s_1) - g(s_2)| < \varepsilon ||f||_\infty$ siempre que $|s_1 - s_2| < \delta$. Entonces

$$|f*g(t_1) - f*g(t_2)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||g(t_1 - t) - g(t_2 - t)|\frac{dt}{2\pi} < \varepsilon.$$

La bilinealidad es consecuencia obvia de las propiedades de la integral y finalmente la continuidad del operador se sigue de

$$|f*g(s)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||g(s-t)|\frac{dt}{2\pi} \leq ||g||_\infty ||f||_1.$$

Luego $\|f*g\|_\infty \leq ||f||_\infty ||g||_\infty$. ■

Proposición 2.1.3 *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ entonces*

$$h(s) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(s-t)\frac{dt}{2\pi}$$

está definida para casi todo $s \in [-\pi, \pi)$.

Además $h \in L^1(\mathbb{T})$ y $||h||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$.

(La función h se llama convolución de f y g, y se denota $f*g$.)

Dem: Como $(e^{is}, e^{it}) \to e^{i(s-t)}$ es continua de $\mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ se tiene que $\mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ dada por $(s,t) \to F(t,s) = f(t)g(s-t)$ es medible Lebesgue. Usando el Teorema de Fubini se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(t,s)|\frac{dt}{2\pi}\frac{ds}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi}(\int_{-\pi}^{\pi} |g(s-t)|\frac{ds}{2\pi})|f(t)|\frac{dt}{2\pi} = ||f||_1||g||_1.$$

Esto garantiza que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)g(s-t)|\frac{dt}{2\pi} \in L^1(\mathbb{T})$ y por tanto h está definida a.e y además $h \in L^1(\mathbb{T})$ y $||h||_1 \leq ||f||_1||g||_1$. ■

Ejercicio 2.1.1 *Probar que si (f_n) converge a f en $L^1(\mathbb{T})$ y (g_n) converge a g en $L^1(\mathbb{T})$, entonces $(f_n * g_n)$ converge a $f*g$ en $L^1(\mathbb{T})$.*

Proposición 2.1.4 *Sean $f, g, h \in L^1(\mathbb{T})$, $\alpha \in \mathbb{C}$.*
(i) $f * g = g * f$.
(ii) $f * (g + h) = f * g + f * h$.
(iii) $(\alpha f) * g = \alpha(f * g)$.
(iv) $||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$.
(Es decir $L^1(\mathbb{T})$ es un álgebra de Banach conmutativa con la convolución).

DEM: Inmediata. ∎

Nota 2.1.2 *(1) Si $\phi_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$ entonces $\phi_n * \phi_m = \delta_{n,m}\phi_m$.*

$$\phi_n * \phi_m(s) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{im(s-t)} \frac{dt}{2\pi} = e^{ims} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} \frac{dt}{2\pi}.$$

(2) $f, g \in \Pi(\mathbb{T})$, supongamos $f = \sum_{k=-M}^{N} \alpha_k \phi_k, g = \sum_{k=-M'}^{N'} \beta_k \phi_k$ entonces

$$f * g = \sum_{k=-min(M,M')}^{min(N,N')} \alpha_k \beta_k \phi_k.$$

(3) Si $f_\epsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$, $g \in L^1(\mathbb{T})$ entonces $f_\epsilon * g(s) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} f(t)\frac{dt}{2\pi}$.

Proposición 2.1.5 *Si $f \in C(\mathbb{T})$ y $g \in L^1(\mathbb{T})$ entonces $f * g \in C(\mathbb{T})$.*
Además $||f * g||_\infty \leq ||f||_\infty ||g||_1$.

DEM: Usando que f es uniformemente continua, para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que

$$|f(u) - f(u')| < \varepsilon ||g||_1, \qquad |u - u'| < \delta.$$

Por tanto si $|t - t'| < \delta$

$$|f * g(t) - f * g(t')| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |g(s)||f(t - s) - f(t' - s)| \frac{ds}{2\pi} < \varepsilon.$$

∎

Ejercicio 2.1.2 *Si $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ y $g \in L^1(\mathbb{T})$ entonces $f * g \in C(\mathbb{T})$.*
Además $||f * g||_\infty \leq ||f||_\infty ||g||_1$.

2.2 Resultados sobre coeficientes de Fourier

Como en la primera sección para motivar las nociones que siguen lo haremos de manos de la variable compleja.

Sea f una función holomorfa en el disco unidad $D(0,r)$ con $r>1$ y sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ su desarrollo de Taylor en $|z|<r$. Es sabido que

$$a_n = \frac{f^{(n}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{f(w)}{w^{n+1}}dw = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-int}\frac{dt}{2\pi}.$$

Definición 2.2.1 *Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $n \in \mathbb{Z}$ definimos el coeficiente de Fourier n-ésimo de f por*

$$\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\frac{dt}{2\pi}.$$

Nota 2.2.1 Ejemplos

(1) Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, $\phi_n(t) = e^{int}$ entonces $\phi_n * f = \hat{f}(n)\phi_n$.

(2) $\hat{f}(n) = \phi_n * f(0)$.

(3) Si $P \in \Pi(\mathbb{T})$ y $P = \sum_{k=-M}^{N} \alpha_k e^{ikt}$ entonces $\hat{P}(n) = \alpha_n$ si $-M \leq n \leq N$ y $\hat{P}(n) = 0$ en otro caso.

(4) Si $f \in \Pi(\mathbb{T})$, $g \in L^1(\mathbb{T})$ entonces $f * g \in \Pi(\mathbb{T})$. Además si $f = \sum_{k=-M}^{N} \alpha_k e^{ikt}$ entonces $f * g(t) = \sum_{k=-M}^{N} \alpha_k \hat{g}(k)e^{-ikt}$.

(5) Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$, $t \in [-\pi,\pi)$ entonces $\hat{f}_t(n) = \hat{f}(n)\phi_n(t)$.

Teorema 2.2.2 *La aplicación $f \to \{\hat{f}(n)\}$ es un homomorfismo de álgebras inyectivo de $L^1(\mathbb{T})$ en $c_0(\mathbb{Z})$, es decir:*

(i) $\widehat{(f * g)}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$.

(ii) $)\widehat{(f+g)}(n) = \hat{f}(n) + \hat{g}(n)$

(iii) $\widehat{(\alpha f)}(n) = \alpha\hat{f}(n)$.

(iv) Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces $\{\hat{f}(n)\} \in c_0(\mathbb{Z})$.

(v) $sup_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)| \leq ||f||_1$.

(vi) Si $\hat{f}(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces $f = 0$ a.e.

DEM:

(i)

$$(f*g)\hat{}(n) = \int_{-\pi}^{\pi}(\int_{-\pi}^{\pi} f(s-t)g(t)\frac{dt}{2\pi})e^{-ins}\frac{ds}{2\pi}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s-t)e^{-in(s-t)}\frac{ds}{2\pi}\right)g(t)e^{-int}\frac{dt}{2\pi} \\
&= \hat{f}(n)\hat{g}(n).
\end{aligned}$$

(ii) Inmediato.
(iii) Inmediato.
(iv) Dado $\varepsilon > 0$ existe $P \in \Pi(\mathbb{T})$ de modo que $||f - P||_1 < \varepsilon$. Entonces

$$|\hat{f}(n)| \leq |\hat{f}(n) - \hat{P}(n)| + |\hat{P}(n)| \leq ||f - P||_1 + |\hat{P}(n)| < \varepsilon + |\hat{P}(n)|.$$

Como $\hat{P}(n) = 0$ para todo $|n| \geq n_0$ para $n_0 = max(M, N)$ donde $P = \sum_{k=-M}^{N} \alpha_k e^{ikt}$, se concluye que $|\hat{f}(n)| < \varepsilon$ para $|n| \geq n_0$.
(v) Inmediato.
(vi) Si $\hat{f}(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{P}(t)\frac{dt}{2\pi} = 0 \quad , P \in \Pi(\mathbb{T}).$$

Por densidad (podemos suponer $f \neq 0$ a.e)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{g}(t)\frac{dt}{2\pi} = 0 \quad g \in C(\mathbb{T}).$$

En efecto, dado $\varepsilon > 0$ y $g \in C(\mathbb{T})$ existe $P \in \Pi(\mathbb{T})$ con $||g - P||_\infty < \varepsilon ||f||_1$. Por tanto

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{g}(t)\frac{dt}{2\pi}\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{P}(t)\frac{dt}{2\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\bar{g}(t) - \bar{P}(t))\frac{dt}{2\pi}\right| \leq ||g - P||_\infty ||f||_1 < \varepsilon.$$

Ahora para todo medible E se tiene

$$\int_E f(t)\frac{dt}{2\pi} = 0.$$

En efecto, dado un medible E con $m(E) > 0$ tomemos K_n, G_n compactos y abiertos respectivamente tales que $K_n \subset E \subset G_n$ y $m(G_n \setminus K_n) < \frac{1}{n}$. Consideremos entonces $g_n \in C(\mathbb{T})$ con $0 \leq g_n \leq 1$, $g_n(t) = 1$ para $t \in K_n$ y $g_n(t) = 0$ para $t \notin G_n$.

Nótese que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{g}(t)\frac{dt}{2\pi} = 0 = \int_{K_n} f(t)\frac{dt}{2\pi} + \int_{G_n \setminus K_n} f(t)\bar{g}_n(t)\frac{dt}{2\pi}.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}\int_E f(t)\frac{dt}{2\pi} &= \int_{K_n} f(t)\frac{dt}{2\pi} + \int_{E\setminus K_n} f(t)\frac{dt}{2\pi}\\ &= \int_{E\setminus K_n} f(t)\frac{dt}{2\pi} - \int_{G_n\setminus K_n} f(t)\bar{g}_n(t)\frac{dt}{2\pi}\end{aligned}$$

Finalmente

$$|\int_E f(t)\frac{dt}{2\pi}| \leq 2\int_{G_n\setminus K_n} |f(t)|\frac{dt}{2\pi}.$$

Usando que $\lim_{m(A)\to 0}\int_A |f(t)|\frac{dt}{2\pi} = 0$ (ver como ejercicio) se concluye que $\int_E f(t)\frac{dt}{2\pi} = 0$ para todo medible E.

Consideremos $E_0 = \{t : f(t) \neq 0\}$ y descomponemos

$$\begin{aligned}E_0 &= \{t : Re(f)(t) > 0\} \cup \{t : Re(f)(t) < 0\}\\ &\cup \{t : Im(f)(t) > 0\} \cup \{t : Im(f)(t) < 0\}\end{aligned}$$

Veamos que cada conjunto es de medida nula. Nótese que si $E_k = \{t : Re(f)(t) > 1/k\}$ se tiene $\{t : Re(f)(t) > 0\} = \cup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ y además

$$m(\{t : Re(f)(t) > 1/k\} \leq k\int_{E_k} Re(f)(t)\frac{dt}{2\pi} = kRe(\int_{E_k} f(t)\frac{dt}{2\pi}) = 0.$$

Similarmente se tratan los otros conjuntos.

Por tanto $m(E_0) = 0$ o lo que es lo mismo $f = 0$ a.e. ∎

Corolario 2.2.3 *Si $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces $f = g$ a.e.*

Corolario 2.2.4 *Si (h_n) es una sucesión en $L^1(\mathbb{T})$ tal que $\lim_{n\to\infty} h_n = f$ en $L^1(\mathbb{T})$ entonces $\lim_{n\to\infty} \hat{h}_n(k) = \hat{f}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Corolario 2.2.5 *$L^1(\mathbb{T})$ es un álgebra de Banach sin unidad.*

Dem: Supongamos que existe $g \in L^1(\mathbb{T})$ con $f * g = f$ para todo $f \in L^1(\mathbb{T})$. En particular $\hat{f}(k)\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Ahora para $n \in \mathbb{Z}$ eligiendo $g = \phi_n$ se tendría que $\hat{f}(n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y por tanto $\{\hat{f}(n)\} \notin c_0(\mathbb{Z})$. ∎

2.3 Teorema de Plancherel

En esta sección analizaremos los coeficientes de Fourier de funciones de $L^2(\mathbb{T})$.

Recordemos que $L^2(\mathbb{T})$ y $\ell^2(\mathbb{Z})$ son espacios de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ con los productos escalares

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{g}(t)\frac{dt}{2\pi},$$

$$\langle(\alpha_n), (\beta_n)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\bar{\beta}_n.$$

Definición 2.3.1 *Sea $E \subset L^2(\mathbb{T})$.*

(i) Se dice que es un sistema ortonormal *en $L^2(\mathbb{T})$ si $\langle f, g\rangle = 0$ para todo $f \neq g$, $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ y además $\|f\| = 1$ para todo $f \in L^2(\mathbb{T})$.*

(ii) Se dice que es un sistema completo *si no hay funciones no nulas ortogonales a todas las del sistema, es decir $\langle f, g\rangle = 0$ para toda $g \in E$ implica que $f = 0$.*

Por ejemplo, $E = \{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal y completo en $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Teorema 2.3.2 *(Teorema de Plancherel) La aplicación $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ definida por $\mathcal{F}(f) = \{\hat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un isomorfismo isométrico que preserva el producto escalar.*

Dem: PASO 1: $\mathcal{F}$ está bien definido y $\|(\hat{f}(n))\|_2 \leq \|f\|_2$. Sea $f \in \Pi(\mathbb{T})$. Escribimos

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 &= \langle f, f\rangle \\
&= \langle\sum_{-N}^{M} \alpha_k\phi_k, \sum_{-N}^{M} \beta_k\phi_k\rangle \\
&= \sum_{k=-N}^{M}\sum_{l=-N}^{M} \langle\alpha_k\phi_k, \beta_l\phi_l\rangle \\
&= \sum_{k=-N}^{M} \langle\alpha_k\phi_k, \beta_k\phi_k\rangle
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=-N}^{M} |\alpha_k|^2$$

$$= \sum_{k=-N}^{M} |\hat{f}(k)|^2$$

Para $f \in L^2(\mathbb{T})$, fijados $N, M \in \mathbb{N}$ y consideramos $g_{N,M} = f - \sum_{k=-N}^{M} \hat{f}(k)\phi_k$. Es claro que

$$\|g_{N,M}\|^2 = \|f\|^2 + \| \sum_{k=-N}^{M} \hat{f}(k)\phi_k\|^2 - \langle f, \sum_{k=-N}^{M} \hat{f}(k)\phi_k\rangle - \langle \sum_{k=-N}^{M} \hat{f}(k)\phi_k, f\rangle$$

Además $\langle f, \sum_{k=-N}^{M} \hat{f}(k)\phi_k\rangle = \langle \sum_{k=-N}^{M} \hat{f}(k)\phi_k, f\rangle = \sum_{k=-N}^{M} |\hat{f}(k)|^2$.
Consecuentemente, usando el resultado sobre polinomios, tenemos

$$0 \leq \|g_{N,M}\|_2 = \|f\|^2 - \sum_{k=-N}^{M} |\hat{f}(k)|^2.$$

Tomando supremos sobre N, M se obtiene $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|^2$.

PASO 2: $\mathcal{F}$ es suprayectivo. Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión en $\ell^2(\mathbb{Z})$. Consideremos $h_{N,M} = \sum_{k=-N}^{M} \alpha_k\phi_k \in \Pi(\mathbb{T})$ para $N, M \in \mathbb{N}$ fijados. Veamos que $(h_{N.M})_{N,M}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{T})$.

En efecto, si $N' \geq N, M' \geq M$,

$$\|h_{N,M} - h_{N',M'}\|_2^2 = \sum_{k=-N'}^{N-1} |\alpha_k|^2 + \sum_{k=M+1}^{M'} |\alpha_k|^2$$

y usando que (α_n) belongs to $\ell^2(\mathbb{Z})$ se tiene que es Cauchy.

Usando la completitud de $L^2(\mathbb{T})$ existe $f \in L^2(\mathbb{T})$ de modo que $\lim_{M\to\infty,N\to\infty} h_{N,M} = f$ en $L^2(\mathbb{T})$.

Por tanto $\|f\|_2^2 = \lim_{M\to\infty,N\to\infty} \|h_{N,M}\|_2^2$. Consecuentemente

$$\|f\|_2^2 = \lim_{M\to\infty,N\to\infty} \sum_{k=-N}^{M} |\alpha_k|^2 = \|(\alpha_n)\|_2^2.$$

Veamos que $\hat{f}(n) = \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Esto se sigue de

$$\hat{f}(n) = \langle f, \phi_n \rangle = \langle \lim_{M\to\infty, N\to\infty} h_{N,M}, \phi_n \rangle.$$

Por la continuidad del funcional $\langle f, \phi_n \rangle$ en $L^2(\mathbb{T})$ y del hecho $\hat{h}_{N,M}(n) = \alpha_n$ para $|n| \leq \min\{N, M\}$ se concluye el resultado.

PASO 3: $\mathcal{F}$ es obviamente inyectivo por ser una isometría.

PASO 4: Preserva el producto escalar, es decir $\langle f, g \rangle = \langle (\hat{f}(n)), (\hat{g}(n)) \rangle$.

Es claro que el resultado es cierto para f, g en $\Pi(\mathbb{T})$ (por la ortogonalidad del sistema). Ahora podemos extender a todas las funciones usando la densidad de $\Pi(\mathbb{T})$ en $L^2(\mathbb{T})$ y la continuidad del producto escalar en ambos espacios.

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \langle \lim_{N\to\infty} P_N, \lim_{M\to\infty} Q_M \rangle \\ &= \lim_{N\to\infty} \langle P_N, \lim_{M\to\infty} Q_M \rangle \\ &= \lim_{N\to\infty} \lim_{M\to\infty} \langle P_N, Q_M \rangle \\ &= \lim_{N\to\infty} \lim_{M\to\infty} \langle (\hat{P}_N(n)), (\hat{Q}_M(n)) \rangle \end{aligned}$$

El mismo proceso aplicado al producto escalar de sucesiones implica

$$\langle f, g \rangle = \langle \lim_{N\to\infty} (\hat{P}_N(n)), \lim_{M\to\infty} (\hat{Q}_M(n)) \rangle = \langle (\hat{f}(n)), (\hat{g}(n)) \rangle$$

■

Corolario 2.3.3 *$E = \{\phi_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal y completo en $L^2(\mathbb{T})$.*

Corolario 2.3.4 *Si $f \in L^2(\mathbb{T})$ entonces $S_N f = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\phi_n$ converge a f en $L^2(\mathbb{T})$.*

Corolario 2.3.5 *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $g \in L^2(\mathbb{T})$ entonces $f * g \in L^2(\mathbb{T})$. Además*

$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2.$$

Definición 2.3.6 $A(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}) : \{\hat{f}(n)\} \in l^1(\mathbb{Z})\}$

Pongamos $||f||_{A(\mathbb{T})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|$.

Nota 2.3.1 *Recordemos que una serie doble* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$ *(con* $x_n \in X$*) se dice convergente si* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *y* $\sum_{n=-\infty}^{0} x_n$ *son convergentes. Además* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=-\infty}^{0} x_n$.

Teorema 2.3.7 *(i)* $A(\mathbb{T})$ *es un algebra de Banach con la multiplicación puntual y* $\Pi(\mathbb{T})$ *es denso en* $A(\mathbb{T})$.
(ii) $A(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T})$.
Además $||f||_\infty \leq ||f||_{A(\mathbb{T})}$.
(iii) Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, $g \in A(\mathbb{T})$ *entonces* $f * g \in A(\mathbb{T})$.
Además $||f * g||_{A(\mathbb{T})} \leq ||f||_1 ||g||_{A(\mathbb{T})}$.
(iv) Si $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ *entonces* $f * g \in A(\mathbb{T})$.
Además $||f * g||_{A(\mathbb{T})} \leq ||f||_2 ||g||_2$.

DEM:
(i) Sean $f, g \in A(\mathbb{T})$ entonces

$$f(t)g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)\hat{g}(n-k)e^{int} \in A(\mathbb{T}).$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)\hat{g}(n-k)| &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)||\hat{g}(n-k)| \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(n-k)|)|\hat{f}(k)| \\
&= ||f||_{A(\mathbb{T})} ||g||_{A(\mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

La densidad de los polinomios es consecuencia de hecho siguiente:
Si $f \in A(\mathbb{T})$ y $\varepsilon > 0$ existe n_0 de modo que entonces

$$\sum_{n < -M} |\hat{f}(n)| + \sum_{n > N} |\hat{f}(n)| < \varepsilon, \qquad N, M \geq n_0,$$

Es decir $||f - h_{M,N}||_{A(\mathbb{T})} < \varepsilon$ donde $h_{M,N}(t) = \sum_{k=-M}^{N} \hat{f}(n)\phi_n$.

(ii) Es una consecuencia de la completitud de $C(\mathbb{T})$ junto con el hecho de que si $f \in A(\mathbb{T})$ entonces la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\phi_n$ converge absolutamente en $C(\mathbb{T})$ (y por tanto en $L^1(\mathbb{T})$).

(iii) Como $\widehat{(f * g)}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$ se tiene que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{(f * g)}(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)||\hat{g}(n)| \leq ||f||_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(n)|.$$

(iv) Usar Cauchy-Schwarz y Plancherel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{(f*g)}(n)| \leq (\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2)^{1/2}(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(n)|^2)^{1/2} = ||f||_2\|g\|_2.$$

■

2.4 Teoremas de Young

Estudiaremos ahora las convolución y los coeficientes de Fourier de funciones en $L^p(\mathbb{T})$ para $1 < p < \infty$.

Teorema 2.4.1 *Sea* $1 \leq p \leq \infty$. *Si* $f \in L^1(\mathbb{T})$ *y* $g \in L^p(\mathbb{T})$ *entonces* $f * g \in L^p(\mathbb{T})$.

Además $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$.

DEM: Podemos suponer $1 < p < \infty$, pues los otros casos ya están resueltos. Tomar $1 < q < \infty$ tal que $1/q + 1/p = 1$.

Como $f * g(s) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(s-t)\frac{dt}{2\pi}$ tenemos

$$\begin{aligned}
|f*g(s)| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||g(s-t)|\frac{dt}{2\pi} \\
&\leq (\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||g(s-t)|^p \frac{dt}{2\pi})^{1/p}(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\frac{dt}{2\pi})^{1/q} \\
&\leq (\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||g(s-t)|^p \frac{dt}{2\pi})^{1/p}\|f\|_1^{1/q}
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_p^p &= \int_{-\pi}^{\pi} |f*g(s)|^p \frac{ds}{2\pi} \\
&\leq \|f\|_1^{p/q} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||g(s-t)|^p \frac{dt}{2\pi}\frac{ds}{2\pi} \\
&\leq \|g\|_p^p\|f\|_1^p
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.4.2 *Sea* $1 \leq p, q \leq \infty$ *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Si* $f \in L^p(\mathbb{T})$ *y* $g \in L^q(\mathbb{T})$ *entonces* $f * g \in C(\mathbb{T})$.

Además $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Dem: Suponer $1 \leq p < \infty$. Usando la expresión

$$f * g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g(s)\frac{ds}{2\pi}$$

tenemos

$$\begin{aligned} f * g(t) - f * g(t') &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(t-s) - f(t'-s)]g(s)\frac{ds}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (f_t - f_{t'})(s)g(-s)\frac{ds}{2\pi} \end{aligned}$$

$$|f * g(t) - f * g(t')| \leq \|g\|_q \|f_t - f_{t'}\|_p.$$

Y el resultado de continuidad de la traslación se obtiene el resultado.

El caso $p = \infty$ se obtiene ya que $f * g = g * f$. ∎

Teorema 2.4.3 *Sea* $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$ *con* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \geq 1$. *Si* $f \in L^{p_1}(\mathbb{T})$ *y* $g \in L^{p_2}(\mathbb{T})$ *entonces* $f * g \in L^{p_3}(\mathbb{T})$, *donde* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1 = \frac{1}{p_3}$.

Además $\|f * g\|_{p_3} \leq \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2}$.

Dem: Los casos $p_1 = 1$ y $p_1 = \infty$ están resueltos en los resultados anteriores. Supongamos $1 < p_1 < \infty$. Sean $1 < \mu, \eta, \alpha < \infty$ with $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\alpha} = 1$ que se elegirán convenientemente.

$$\begin{aligned} |f * g(s)| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||g(s-t)|\frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{p_1/\mu}|g(s-t)|^{p_2/\eta}|f(t)|^{1-p_1/\mu}|g(s-t)|^{1-p_2/\eta}\frac{dt}{2\pi} \\ &\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{p_1}\frac{dt}{2\pi}\right)^{1/\mu}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(s-t)|^{p_2}\frac{dt}{2\pi}\right)^{1/\eta} \\ &\times \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{\alpha(1-p_1/\mu)}|g(s-t)|^{\alpha(1-p_2/\eta)}\frac{dt}{2\pi}\right)^{1/\alpha} \\ &= \|f\|_{p_1}^{p_1/\mu}\|g\|_{p_2}^{p_2/\eta}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{\alpha(1-p_1/\mu)}|g(s-t)|^{\alpha(1-p_2/\eta)}\frac{dt}{2\pi}\right)^{1/\alpha} \end{aligned}$$

Elegir $\alpha = p_3$, μ y η tales que $\alpha(1 - p_1/\mu) = p_1$ y $\alpha(1 - p_2/\eta) = p_2$. Es decir, $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_3}$, $\frac{1}{\eta} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3}$ y $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p_3}$.

Entonces, $p_3 - p_1 = p_3p_1/\mu$ y $p_3 - p_2 = p_3p_2/\eta$,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |f * g(s)|^{p_3} \frac{ds}{2\pi} &\leq \|f\|_{p_1}^{p_3p_1/\mu} \|g\|_{p_3p_2}^{p_2/\eta} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{\alpha(1-p_1/\mu)} |g(s-t)|^{\alpha(1-p_2/\eta)} \frac{dt}{2\pi}\frac{ds}{2\pi} \\ &= \|f\|_{p_1}^{p_3p_1/\mu} \|g\|_{p_2}^{p_3p_2/\eta} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{p_1} |g(s-t)|^{p_2} \frac{dt}{2\pi}\frac{ds}{2\pi} \\ &= \|f\|_{p_1}^{p_3} \|g\|_{p_2}^{p_3}\end{aligned}$$

De donde se concluye $\|f * g\|_{p_3} \leq \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2}$. ∎

2.5 Series de Fourier

Definición 2.5.1 *Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$. La serie formal $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$ se dice "serie de Fourier" de f y se denota por $S(f)$.*

Se denota $S_N(f)(t) = \sum_{n=N}^{N} \hat{f}(n)e^{-int}$ la suma parcial de la serie anterior.

El objetivo de este capítulo es intentar describir la función en términos de su serie de Fourier, estudiando las posibles convergencias de las sumas parciales $S_N(f)$ de la serie anterior.

Hay varias situaciones completamente obvias y ya demostradas:

(i) Si $f \in \Pi(\mathbb{T})$ entonces $S(f)(t) = f(t)$ para todo $t \in [-\pi, \pi)$ (pues es una suma finita).

(ii) Si $f \in A(\mathbb{T})$ entonces $S(f) = f$ en $A(\mathbb{T})$, es decir $\lim_{N,M\to\infty} s_{M,N} = f$ donde $s_{M,N} = \sum_{k=-M}^{N} \hat{f}(n)e^{-int}$, pues la serie converge absolutamente.

En particular $\lim_{N,M\to\infty} s_{M,N}(t) = f(t)$ uniformemente en $t \in [-\pi, \pi)$.

(iii) Si $f \in L^2(\mathbb{T})$ entonces $s_{M,N} = \sum_{k=-M}^{N} \hat{f}(n)e^{-int}$ converge a f en $L^2(\mathbb{T})$.

Daremos algunas convergencias más débiles, pues en general no puede afirmarse demasiado sobre la convergencia de la serie en el sentido anterior.

Definición 2.5.2 *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de elementos de un espacio de Banach X. Diremos que la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$ es sumable Abel si existe*

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n r^{|n|}.$$

Denotaremos $(A) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$ *a dicho valor en caso de existir.*

Diremos valor principal de Cauchy de la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$*, si existe,al límite*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} x_k.$$

Denotaremos $(PV) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$ *a dicho valor.*

Diremos que la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$ *es sumable Cèsaro si existe* $\lim_{N\to\infty} \sigma_N$*, donde* σ_N *son los promedios de las sumas parciales* $s_n = \sum_{k=-N}^{N} x_k$*, es decir*

$$\sigma_N = \frac{s_0 + s_1 + ... + s_N}{N+1}.$$

Denotaremos $(C) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$ *a dicho valor en caso de existir.*

Ejercicio 2.5.1 *(i) Probar que la sumabilidad implica la sumabilidad Abel y la existencia del valor principal.*

(ii) Probar que la existencia del valor principal implica la sumabilidad Césaro.

¿ Son ciertos los recíprocos?.

Definición 2.5.3 *(Núcleo de Dirichlet) Se conoce con el nombre de Núcleo de Dirichlet a la sucesión*

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int}.$$

Se cumple que si $f \in L^1(\mathbb{T})$*, y* $N \in \mathbb{N}$ *entonces*

$$S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{int} = D_N * f(t).$$

Teorema 2.5.4 *(Propiedades del núcleo de Dirichlet.)*

(1) $D_N(t) = \frac{sen(N+\frac{1}{2})t}{sen(t/2)}$.

(2) $D_N(t) = D_N(-t)$ *para todo* $t \in [-\pi, \pi), N \in \mathbb{N}$.

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\frac{dt}{2\pi} = 1$*,* $N \in \mathbb{N}$*,.*

(4) $||D_N||_1 \approx log(N)$*,* $N \in \mathbb{N}$*,i. e. existen* $C_1, C_2 > 0$ *tales que*

$$C_1 log(N) \leq \|D_N\|_1 \leq C_2 log(N).$$

(5) $\|D_N\|_\infty = 2N + 1$.

DEM:

(1) Por inducción sobre N. Para $N = 0$, $D_0(t) = 1$.
Supongámoslo para N.

$$\begin{aligned} D_{N+1}(t) &= D_N(t) + e^{-i(N+1)t} + e^{i(N+1)t} \\ &= \frac{sen(N+\frac{1}{2})t}{sen(t/2)} + 2cos(N+1)t \\ &= \frac{sen(N+\frac{3}{2})t}{sen(t/2)}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $sen(p) - sen(q) = 2cos\frac{p+q}{2}sen\frac{p-q}{2}$.

(2) Obvio.

(3) Obvio.

(4) Teniendo en cuenta que $\frac{2t}{\pi} \leq sen(t) \leq t$ para $0 < t < \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{sen(N+\frac{1}{2})t}{sen(t/2)} \right| \frac{dt}{2\pi} &= 2\int_0^{\pi} \frac{|sen(N+\frac{1}{2})t|}{sen(t/2)} \frac{dt}{2\pi} \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|sen(2N+1)t|}{sen(t)} \frac{dt}{2\pi} \\ &\approx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|sen(2N+1)t|}{t} \frac{dt}{2\pi} \\ &\approx \int_0^{\frac{(2N+1)\pi}{2}} \frac{|sent|}{t} \frac{dt}{2\pi} \\ &= \sum_{k=0}^{2N} \int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}} \frac{|sent|}{t} \frac{dt}{2\pi} \\ &\approx \sum_{k=0}^{2N} \frac{1}{k} \int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}} |sent| \frac{dt}{2\pi} \\ &\approx \sum_{k=0}^{2N} \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |sent| \frac{dt}{2\pi} \\ &\approx \sum_{k=0}^{2N} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Es bien sabido que $H_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k} \approx log(n)$ de donde se sigue el resultado.

(5) Usar que $D_N(0) = 2N + 1$ y la estimación trivial $|D_N(t)| \leq 2N + 1$.

■

Estudiaremos ahora la situación de la no convergencia de la serie $S_N(f)$ en $C(\mathbb{T})$.

Lema 2.5.5 *Son equivalentes:*
(1) $S_N(f) \to f$ en $C(\mathbb{T})$ para toda $f \in C(\mathbb{T})$.
(2) Existe $C > 0$ con $||S_N(f)||_\infty \leq C||f||_\infty$ para todo $N \in \mathbb{N}$.

DEM:
(1) ⇒(2) Como $\{S_N(f)\}$ es acotada para toda $f \in C(\mathbb{T})$ entonces por el teorema de la acotación uniforme existe $C > 0$ con $||S_N(f)||_\infty \leq C||f||_\infty$ para todo $N \in \mathbb{N}$.
(2) ⇒(1) Sea $\|S_N\| = \sup\{\|S_N(f)\|_\infty : \|f\|_\infty = 1\}$. Dada $f \in C(\mathbb{T})$ y $\varepsilon > 0$ tomar $P \in \Pi(\mathbb{T})$ tal que $||f - P||_\infty < \varepsilon sup_N||S_N|| + 1$. Entonces, para $N \geq grado(P)$

$$||S_N(f) - f||_\infty \leq ||S_N(f - P)||_\infty + ||P - f||_\infty < (||S_N|| + 1)||f - P|| < \varepsilon.$$

■

Ejercicio 2.5.2 *Sea $1 \leq p < \infty$. $S_N(f) \to f$ en $L^p(\mathbb{T})$ para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$ si y sólo si existe $C > 0$ con $||S_N(f)||_p \leq C||f||_p$ para todo $N \in \mathbb{N}$.*

Teorema 2.5.6 *Existe una $f \in C(\mathbb{T})$ de modo que $S_N(f)(t)$ no converge uniformemente a f.*

DEM: Usando el Lema es suficiente probar que $||S_n||$ no está acotada.
Basta encontrar una sucesión $\phi_n \in C(\mathbb{T})$ tal que $sup||\phi_n||_\infty < \infty$ pero con $S_n(\phi_n)$ divergiendo a ∞.
Sea $D_n(t) = \frac{sen(n+\frac{1}{2})t}{sen\frac{t}{2}}$. Tomamos $t_k = \frac{k\pi}{n+\frac{1}{2}}$, $|k| \leq n$, que son los ceros de D_n y consideramos intervalos centrados en los mismos $I_k = (t_k - \delta_k, t_k + \delta_k)$ de modo que su unión es A_n y la suma de sus longitudes sea $m(A_n) = L_n \leq \frac{1}{2(2n+1)}$. Definimos $\phi_n(t) = sign(D_n(t))$ salvo en los intervalos prefijados y allí se unen los extremos por linealidad.
Obviamente $||\phi_n||_\infty = 1$. Además

$$\begin{aligned} ||S_n|| \quad & \geq ||S_n(\phi_n)||_\infty \\ & \geq |S_n(\phi_n(0)| \\ & = |\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\phi_n(t)\frac{dt}{2\pi}| \\ & \geq \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\frac{dt}{2\pi} - \int_{A_n} (|D_n(t)| - \phi_n(t)D_n(t))\frac{dt}{2\pi}. \end{aligned}$$

Nótese que $\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)\frac{dt}{2\pi}| \geq Clog(n)$ y que

$$|\int_{A_n} (|D_n(t)| - \phi_n(t)D_n(t))\frac{dt}{2\pi}| \leq 2(2n+1)m(A_n) < 1.$$

Por consiguiente $||S_n|| \geq Clog(n) - 1$ y se concluye el resultado. ∎

2.6 Núcleos de sumabilidad: Poisson y Fèjer

Definición 2.6.1 *(Núcleo de Poisson) Se conoce con el nombre de Núcleo de Poisson a la familia de funciones* $\{P_r\}_{0<r<1}$,

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}$$

Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$, *y* $0 < r < 1$ *se tiene que*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)r^{|n|}e^{int} = P_r * f(t).$$

Por tanto la sumabilidad Abel de f *se describe como* $\lim_{r\to 1} P_r * f(t)$.

Teorema 2.6.2 *(Propiedades del núcleo de Poisson.)*

(1) $P_r \in A(\mathbb{T})$ *y* $||P_r||_{A(\mathbb{T})} = \frac{1+r}{1-r}$, $0 < r < 1$.

(2) $P_r(t) = \frac{1-r^2}{(1-r)^2+4rsen^2(t/2)} = \frac{1-r^2}{|1-re^{it}|^2}$, $0 < r < 1$.

(3) $P_r(t)$ *es no negativa, par y monótona no creciente en* $[0,\pi]$, $0 < r < 1$.

(4) $\frac{1-r}{1+r} \leq P_r(t) \leq \frac{1+r}{1-r}$, $0 < r < 1$.

(5) $P : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *dada por* $re^{it} \to P_r(t)$ *es una función armónica.*

(6) $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\frac{dt}{2\pi} = 1$, $0 < r < 1$.

(7) Sea $\alpha > 0$ *entonces* $\lim_{r\to 1^-} \sup_{|t|>\alpha} P_r(t) = 0$.

(8) Sea $0 < \alpha < \pi$ *entonces* $\lim_{r\to 1^-} \int_{|t|>\alpha} P_r(t)\frac{dt}{2\pi} = 0$.

DEM:

(1) Se sigue de que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} = 1 + \frac{2r}{1-r} = \frac{1+r}{1-r}$.

(2) Basta observar que

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-int} = 1 + \frac{re^{it}}{1-re^{it}} + \frac{re^{-it}}{1-re^{-it}} = \frac{1-r^2}{|1-re^{it}|^2}.$$

Usar la expresión $|1-re^{it}|^2 = 1+r^2-2rcos(t) = (1-r)^2 + 4rsen^2(t/2)$ para la otra fórmula.

(3) De comprobación inmediata (usar $|1-re^{it_1}| \geq |1-re^{it_2}|$ para $t_2 \geq t_1 \geq 0$).

(4) Se sigue de (2) pues $(1-r)^2 \leq 1+r^2-2rcos(t) \leq (1+r)^2$.

(5) Observar que $P(z) = Re(\frac{1+z}{1-z})$ para $z = re^{it}$.

(6) Como $\sum_{n=-N}^{N} r^{|n|} e^{-int}$ converge a $P_r(t)$ uniformemente en $[-\pi, \pi)$, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\frac{dt}{2\pi} = \lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^{N} r^{|n|} e^{int}\frac{dt}{2\pi} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} r^{|n|} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\frac{dt}{2\pi} = 1.$$

(7) Nótese que

$$\sup_{|t|>\alpha} P_r(t) = \sup_{\pi\geq t>\alpha} P_r(t) \leq P_r(\alpha) = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\alpha}|^2}$$

y por tanto se tiene el resultado.

(8) Se sigue de (7). ∎

Definición 2.6.3 *(Núcleo de Fèjer) Se conoce con el nombre de Núcleo de Fèjer a la sucesión* $\{K_N\}$ *dada por*

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} (1 - \frac{|n|}{N+1})e^{int}.$$

Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$, *y* $N \in \mathbb{N}$ *se tiene*

$$\sigma_N(f)(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_N(f)(t) = K_N * f(t).$$

Por tanto la sumabilidad Cèsaro de f *se corresponde a* $\lim_{N\to\infty} \sigma_N(f)(t) = \lim_{N\to\infty} K_N * f(t)$

Nota 2.6.1

$$\begin{aligned}\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(t) &= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}\\ &= \frac{1}{N+1}\sum_{k=-N}^{N}(\sum_{N=|k|}^{N} 1)e^{ikt}\\ &= \sum_{k=-N}^{N}(1-\frac{|k|}{N+1})e^{ikt}.\end{aligned}$$

Teorema 2.6.4 *(Propiedades del núcleo de Fèjer.)*
(1) $K_N(t) = \frac{1}{N+1}\frac{sen^2(\frac{N+1}{2}t)}{sen^2(t/2)}, t \neq 0.$ $K_N(0) = N+1$
(2) $K_N(t) \geq 0$ *y* $K_N(t) = K_N(-t)$ *para todo* $t \in [-\pi, \pi), N \in \mathbb{N}$.
(3) $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\frac{dt}{2\pi} = 1,\ N \in \mathbb{N}$.
(4) $K_N(t) \leq min\{N+1, \frac{\pi^2}{(N+1)t^2}\}$.
(5) Sea $\alpha > 0$ *entonces* $\lim_{N\to\infty}\sup_{|t|>\alpha} K_N(t) = 0$.
(6) Sea $0 < \alpha < \pi$ *entonces* $\lim_{N\to\infty}\int_{|t|>\alpha} K_N(t)\frac{dt}{2\pi} = 0$.

DEM: (1) Para $t = 0$,

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(0) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(2n+1) = \frac{N(N+1)}{N+1} + 1 = N+1.$$

For $t \neq 0$,

$$\begin{aligned}K_N(t) &= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(t)\\ &= \frac{1}{(N+1)sen(t/2)}\sum_{n=0}^{N} Im(e^{i(n+\frac{1}{2})t})\\ &= \frac{1}{(N+1)sen(t/2)} Im(e^{i\frac{t}{2}}\sum_{n=0}^{N} e^{int})\\ &= \frac{1}{(N+1)sen(t/2)} Im(\frac{e^{i(N+1)t}-1}{e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}})\\ &= \frac{1}{(N+1)sen^2\frac{t}{2}} Im(\frac{e^{i(N+1)t}-1}{2i})\end{aligned}$$

$$= \frac{1 - cos(N+1)t}{2(N+1)sen^2\frac{t}{2}} = \frac{sen^2(\frac{N+1}{2}t)}{(N+1)sen^2\frac{t}{2}}.$$

(2) Obvio.
(3) $\int_{\pi}^{\pi} K_n(t)\frac{dt}{2\pi} = \widehat{K_N}(0) = 1$.
(4) Es claro que $\frac{t}{\pi} \leq sen\frac{t}{2} \leq \frac{t}{2}$ si $0 \leq t \leq \pi$. Entonces

$$K_N(t) \leq \frac{1}{(N+1)sen^2\frac{t}{2}} \leq \frac{\pi^2}{(N+1)t^2}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} |K_N(t)| &\leq \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}|D_n(t)| \leq \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(2n+1) \\ &= \frac{1}{N+1}(2\frac{N(N+1)}{2} + N + 1)) \leq N+1. \end{aligned}$$

(5) Se sigue de que

$$\sup_{|t|>\alpha} K_N(t) = \sup_{\pi \geq t > \alpha} K_N(t) \leq \frac{1}{(N+1)sen^2\frac{\alpha}{2}}.$$

(6) Es inmediato de (5). ■

Definición 2.6.5 *(Núcleo de sumabilidad) Una familia de funciones* $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *se dice un núcleo de sumabilidad sobre* $\mathbb{T}$ *si verifican*
(i) $\sup_{\varepsilon>0}\int_{-\pi}^{\pi}|K_\varepsilon(t)|\frac{dt}{2\pi} < \infty$.
(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} K_\varepsilon(t)\frac{dt}{2\pi} = 1$ *para todo* $\varepsilon > 0$.
(iii) Para todo $\alpha > 0$ $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\alpha<|t|<\pi}|K_\varepsilon(t)|\frac{dt}{2\pi} = 0$.

Ejemplo 2.6.1 *Los núcleos de Poisson* $K_\varepsilon = P_{r(\varepsilon)}(r(\varepsilon) = 1-\varepsilon)$*, o de Fèjer* $K_N = K_{\varepsilon_N}, (\varepsilon_N = \frac{1}{N})$ *son de sumabilidad.*

Teorema 2.6.6 *Sea* K_ε *un núcleo de sumabilidad. Si* $f \in C(\mathbb{T})$ *entonces* $K_\varepsilon * f$ *converge a* f *en* $C(\mathbb{T})$*, i.e.* $\lim_{\varepsilon\to 0}\|K_\varepsilon * f - f\|_\infty = 0$.

DEM:

$$\begin{aligned} f(t) - K_\varepsilon * f(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_\varepsilon(s) \frac{ds}{2\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) K_\varepsilon(s) \frac{ds}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - f(t-s)) K_\varepsilon(s) \frac{ds}{2\pi}. \end{aligned}$$

Dado $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que si $|s| < \delta$ entonces

$$|f(t) - f(t-s)| < \frac{\eta}{2sup_{\varepsilon>0}||K_\varepsilon||_1}.$$

Por otro lado dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon_0 > 0$ de modo que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\int_{|s|>\delta} |K_\varepsilon(s)| \frac{ds}{2\pi} < \frac{\eta}{4||f||_\infty}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |f(t) - K_\varepsilon * f(t)| &\leq \int_{|s|<\delta} |f(t) - f(t-s)||K_\varepsilon(s)| \frac{ds}{2\pi} \\ &+ \int_{|s|>\delta} |f(t) - f(t-s)||K_\varepsilon(s)| \frac{ds}{2\pi} \\ &\leq \frac{\eta}{2sup_{\varepsilon>0}||K_\varepsilon||_1} \int_{|s|<\delta} |K_\varepsilon(s)| \frac{ds}{2\pi} \\ &+ 2||f||_\infty \int_{|s|>\delta} |K_\varepsilon(s)| \frac{ds}{2\pi} < \eta. \end{aligned}$$

Por tanto $\|K_\varepsilon * f - f\|_\infty < \eta$, para $\varepsilon < \varepsilon_0$.

■

Corolario 2.6.7 *Sea $f \in C(\mathbb{T})$.*

(i) $$\lim_{r\to 1^-} P_r * f(t) = f(t) \text{ uniformemente en } [-\pi, \pi).$$

(En particular $A - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} = f(t)$ $\forall t \in [-\pi, \pi)$.)

(ii) $$\lim_{N\to\infty} K_N * f(t) = f(t) \text{ uniformemente en } [-\pi, \pi).$$

(En particular $C - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} = f(t)$ $\forall t \in [-\pi, \pi)$.)

Nota 2.6.2 *La densidad de $\Pi(\mathbb{T})$ en $C(\mathbb{T})$ se sigue de (ii), siendo éste un método constructivo a diferencia del uso del teorema de Stone-Weierstrass.*

Teorema 2.6.8 *Sea $1 \leq p < \infty$ y sea K_ε un núcleo de sumabilidad. Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ entonces $K_\varepsilon * f$ converge a f en $L^p(\mathbb{T})$, i.e. $\lim_{\varepsilon\to 0} \|K_\varepsilon * f - f\|_p = 0$.*

Dem: Como en el resultado anterior para funciones continuas. Sea $\delta > 0$, escribimos

$$|f(t)-K_\varepsilon*f(t)| \leq \int_{|s|<\delta} |f(t)-f(t-s)||K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi}+\int_{|s|>\delta} |f(t)-f(t-s)||K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder y el hecho $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$ se obtiene

Entonces

$$\begin{aligned}
&|f(t) - K_\varepsilon * f(t)|^p \leq 2^{p-1}((\int_{|s|<\delta} |f(t) - f(t-s)||K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi})^p \\
&+(\int_{|s|>\delta} |f(t) - f(t-s)||K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi})^p) \\
&\leq 2^{p-1}\Big((\int_{|s|<\delta} |f(t) - f(t-s)|^p|K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi})(\int_{|s|<\delta} |K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi})^{p/q} \\
&+(\int_{|s|>\delta} 2^{p-1}(|f(t-s)|^p + |f(t)|^p|K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi})(\int_{|s|>\delta} |K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi})^{p/q}\Big)
\end{aligned}$$

Integrando en la variable t se tiene

$$\begin{aligned}
\|f - K_\varepsilon * f\|_p^p \quad &\leq \quad 2^{p-1}\Big((\int_{|s|<\delta} \|f - f_{-s}\|_p^p|K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi}) \sup_{\varepsilon>0} \|K_\varepsilon\|_1^{p/q} \\
&+ \quad 2^p\|f\|_p^p(\int_{|s|>\delta} |K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi})^{p/q+1}\Big)
\end{aligned}$$

Por un lado, dado $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que $\|f - f_{-s}\|_p < \eta$ si $|s| < \delta$.

Por otro lado dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon_0 > 0$ de modo que $\int_{|s|>\delta} |K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi} < \eta$ para $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Por tanto, para el δ anterior

$$\|f - K_\varepsilon * f\|_p^p \leq 2^{p-1}\Big(\eta^p sup_{\varepsilon>0}\|K_\varepsilon\|_1^{p/q+1} + 2^p\|f\|_p^p \eta^{p/q+1}\Big).$$

Por tanto $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\|f - K_\varepsilon * f\|_p = 0$. ∎

Corolario 2.6.9 *Sea $f \in L^p(\mathbb{T})$ para $1 \leq p < \infty$.*
(i) $\lim_{r\to 1^-} P_r * f = f$ *en $L^p(\mathbb{T})$, (es decir, $A - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\varphi_n = f$.)*
(ii) $\lim_{N\to\infty} K_N * f = f$ *en $L^p(\mathbb{T})$, (es decir, $C - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\varphi_n = f$.)*

Nota 2.6.3 *La densidad de $\Pi(\mathbb{T})$ en $L^p(\mathbb{T})$ se sigue de (ii). ¿Es cierto el resultado en $L^\infty(\mathbb{T})$?*

2.7 Convergencia puntual de la serie de Fourier

Intentaremos ahora atacar la convergencia puntual de la serie de Fourier para funciones integrables.

Teorema 2.7.1 *Sea K_ε un núcleo de sumabilidad con $K_\varepsilon(t) = K_\varepsilon(-t)$ y de modo que para todo $\alpha > 0$ se tiene*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\sup_{\alpha<|t|\leq\pi}|K_\varepsilon(t)| = 0.$$

Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $s \in [-\pi,\pi)$ de modo que existe

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(s+t)+f(s-t)}{2} = A$$

entonces $\lim_{\varepsilon\to 0^+} K_\varepsilon * f(s) = A$.

Dem:

$$\begin{aligned} K_\varepsilon * f(s) - A &= \int_{-\pi}^{\pi}(f(s-t)-A)K_\varepsilon(t)\frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_{|t|\geq\alpha}(f(s-t)-A)K_\varepsilon(t)\frac{dt}{2\pi} \\ &+ \int_0^\alpha(f(s-t)+f(s+t)-2A)K_\varepsilon(t)\frac{dt}{2\pi}. \end{aligned}$$

Dado $\eta > 0$, elegimos entonces $\alpha > 0$ de modo que si $0 < t < \alpha$

$$|\frac{f(s-t)+f(s+t)}{2} - A| < \eta.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} |K_\varepsilon * f(s) - A| \quad & \leq \sup_{\alpha<|t|} |K_\varepsilon(t)| \int_{|t|\geq\alpha} |f(s-t) - A| \frac{dt}{2\pi} \\ & +2\int_0^\alpha |\frac{f(s-t)+f(s+t)}{2} - A||K_\varepsilon(t)|\frac{dt}{2\pi} \\ & \leq \sup_{\alpha<|t|} |K_\varepsilon(t)|(\|f\|_1 + |A|) + \eta \sup_{\varepsilon>0} \|K_\varepsilon\|_1 \end{aligned}$$

Usando ahora $\lim_{\varepsilon\to0^+} \sup_{\alpha<|t|\leq\pi} |K_\varepsilon(t)| = 0$ se termina la demostración.

∎

Corolario 2.7.2 *Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y supongamos que existen*

$$f(s^+) = \lim_{t\to0^+} f(s+t), \quad f(s^-) = \lim_{t\to0^+} f(s-t).$$

Entonces

$$\lim_{r\to1^-} P_r(f)(s) = \frac{f(s^+)+f(s^-)}{2}.$$

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N(f)(s) = \frac{f(s^+)+f(s^-)}{2}.$$

Corolario 2.7.3 *Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y f es continua en t. Entonces*

$$(A) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int} = f(t).$$

$$(C) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int} = f(t).$$

Nuestro siguiente objetivo es ver que la serie de Fourier de funciones integrables converge en media Cèsaro a la función en casi todo punto.

Definición 2.7.4 *Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$ se llama función maximal de Hardy-Littlewood a*

$$f^*(t) \quad = \quad \sup_{h>0} \frac{1}{m(J_h(t))} \int_{J_h(t)} |f(s)|dm = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |f(s)|ds$$

donde $J_h(t) = \{e^{is} : t-h < s < t+h\}$.

Lema 2.7.5 *Sea $\Omega = \cup_{\alpha \in \mathcal{J}} I_\alpha$ un conjunto medible donde I_α son intervalos en $\mathbb{T}$. Existe una subfamilia contable de intervalos disjuntos dos a dos de modo que*

$$m(\cup_{n=1}^\infty I_n) \geq \frac{1}{4} m(\Omega).$$

DEM: Sea $a_1 = \sup_{\alpha \in \mathcal{J}} m(I_\alpha)$. Tomemos un intervalo I_1 entre los mismos de modo que $m(I_1) > \frac{3}{4} a_1$. Sea, ahora, $\mathcal{J}_1 = \{\alpha \in \mathcal{J} : I_\alpha \cap I_1 = \varnothing\}$ y pongamos $\Omega_1 = \cup_{\alpha \in \mathcal{J}_1} I_\alpha$. Es claro que $\Omega_1 \cup I_1$ es una unión disjunta y $\Omega \subset \Omega_1 \cup \tilde{I}_1$, donde $\tilde{I}$ significa un intervalo del mismo centro que I pero de radio 4 veces el radio de I. (Nótese que si $t \in \Omega$ entonces o bien existe $\alpha \in \mathcal{J}_1$ tal que $t \in I_\alpha$ o bien siempre que $t \in I_\beta$ se tiene $I_\beta \cap I_1 \neq \varnothing$ y, como $m(I_\beta) \leq a_1$ entonces $I_\beta \subset \tilde{I}_1$.)

Reiteremos el proceso. Sea $a_2 = \sup_{\alpha \in \mathcal{J}_1} m(I_\alpha)$. Tomemos un intervalo I_2 entre los anteriores de modo que $m(I_2) > \frac{3}{4} a_2$. Sea, ahora, $\mathcal{J}_2 = \{\alpha \in \mathcal{J}_1 : I_\alpha \cap I_2 = \varnothing\}$ y pongamos $\Omega_2 = \cup_{\alpha \in \mathcal{J}_2} I_\alpha$. Es claro que $\Omega_2 \cup I_1 \cup I_2$ es una unión disjunta y $\Omega \subset \Omega_2 \cup \tilde{I}_1 \cup \tilde{I}_2$.

Reiterando el proceso n-veces tendremos $a_n = \sup_{\alpha \in \mathcal{J}_{n-1}} m(I_\alpha)$. Tomemos un intervalo I_n entre los anteriores de modo que $m(I_n) > \frac{3}{4} a_n$. Sea, ahora, $\mathcal{J}_n = \{\alpha \in \mathcal{J}_{n-1} : I_\alpha \cap I_n = \varnothing\}$ y pongamos $\Omega_n = \cup_{\alpha \in J_n} I_\alpha$.

Es claro que $\Omega_n \cup I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n$ es una unión disjunta y $\Omega \subset \Omega_n \cup \tilde{I}_1 \cup \tilde{I}_2 \cup ... \cup \tilde{I}_n$.

Si el proceso se acaba en un número finito de pasos, digamos N, tendremos $\Omega = \Omega' \cup (\cup_{n=1}^N I_n)$ con $\Omega' = \cup_{\alpha \in J_N} I_\alpha$, $I_\alpha \cap I_N \neq \varnothing$ para todo $\alpha \in \mathcal{J}_N$ (y por tanto $\Omega' \subset \tilde{I}_N$). Además $\Omega \subset \cup_{n=1}^N \tilde{I}_n$ y asi

$$m(\Omega) \leq \sum_{n=1}^N m(\tilde{I}_n) = 4 \sum_{n=1}^N m(I_n).$$

En el caso de un número infinito de pasos, tenemos a_n decreciente a 0 ya que $a_n \leq \frac{4}{3} m(I_n)$ y $\sum_{n=1}^\infty m(I_n) < \infty$ y $\cap_{n=1}^\infty \Omega_k = \varnothing$ de donde se sigue que para cada I_α existe k_0 de modo que $I_\alpha \cap I_{k_0} \neq \emptyset$ e $I_\alpha \cap I_k = \emptyset$ para $k < k_0$, y por consiguiente $I_\alpha \subset \tilde{I}_{k_0}$.

Esto garantiza que $\Omega \subset \cup_{n=1}^{\infty} \tilde{I}_n$ y de ahí

$$m(\cup_{n=1}^{\infty} I_n) \geq \frac{1}{4} m(\Omega).$$

■

Teorema 2.7.6 *(Desigualdad 1 − 1-débil) Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces*

$$m(\{t \in \mathbb{T} : f^*(t) > \lambda\}) \leq \frac{4||f||_1}{\lambda}.$$

Dem: Dado $\lambda > 0$ tomemos un intervalo I_t de modo que

$$\frac{1}{m(I_t)} \int_{I_t} |f(s)| \frac{ds}{2\pi} > \lambda.$$

Pongamos, ahora, $\Omega = \{t \in \mathbb{T} : f^*(t) > \lambda\} = \cup_{t \in \Omega} I_t$.

Entonces, aplicando el lema previo,

$$\begin{aligned} m(\{t \in \mathbb{T} : f^*(t) > \lambda\}) \quad & \leq 4m(\cup_{n \in \mathbb{N}} I_n) \\ & \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) \leq \frac{4}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} |f(s)| \frac{ds}{2\pi} \\ & \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) \leq \frac{4}{\lambda} \int_{\cup_{n \in \mathbb{N}} I_n} |f(s)| \frac{ds}{2\pi} \\ & \leq \frac{4}{\lambda} ||f||_1. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.7.7 *(Diferenciación de Lebesgue) Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |f(s) - f(t)| ds = 0 \qquad a.e.\ t \in \mathbb{T}.$$

DEM: Supongamos que f es continua. Veamos que para todo $t \in \mathbb{T}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |f(s)-f(t)|ds = 0.$$

En efecto, definimos para $t \in \mathbb{T}$,

$$F_t(x) = \int_0^x |f(s)-f(t)|\frac{ds}{2\pi},\ x \geq 0$$

$$F_t(x) = \int_x^0 |f(s)-f(t)|\frac{ds}{2\pi},\ x < 0.$$

Es claro que F_t es derivable para todo $x \in \mathbb{T}$ y $F_t'(t) = 0$.

Dada, ahora, $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $\varepsilon > 0$ existe $g \in C(\mathbb{T})$ con $||f-g||_1 < \varepsilon$. Veamos que

$$m(\{t : \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |f(s)-f(t)|ds \neq 0\}) = 0.$$

Como

$$\{t : \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |f(s)-f(t)|ds \neq 0\} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{t : \limsup_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |f(s)-f(t)|ds > \frac{1}{n}\}.$$

Es suficiente probar que

$$m(\{t : \limsup_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |f(s)-f(t)|ds > \lambda\}) = 0$$

para cada $\lambda > 0$.

Como

$$|f(s)-f(t)| \leq |f(s)-g(s)| + |g(s)-g(t)| + |g(t)-f(t)|,$$

entonces

$$\limsup_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |f(s)-f(t)|ds \leq \limsup_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |f(s)-g(s)|ds + |g(t)-f(t)|.$$

$$\begin{aligned} m(\{t : \limsup_{h\to 0} & \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |f(s)-f(t)|ds > \lambda\}) \leq \\ & \leq m(\{t : \limsup_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |f(s)-g(s)|ds > \frac{\lambda}{2}\}) \\ & + m(\{t : |g(t)-f(t)| > \frac{\lambda}{2}\}) \\ & \leq m(\{t : (f-g)^*(t) > \frac{\lambda}{2}\}) \\ & + m(\{t : |g(t)-f(t)| > \frac{\lambda}{2}\}) \leq \frac{C}{\lambda}||f-g||_1 < C\varepsilon. \end{aligned}$$

Como vale para cualquier $\varepsilon > 0$ se concluye el resultado. ∎

Teorema 2.7.8 *(Lebesgue) Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y supongamos que existe $A \in \mathbb{C}$ tal que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h |\frac{f(s+t)+f(s-t)}{2} - A|\frac{dt}{2\pi} = 0.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(s) \to A.$$

Dem: Denotemos

$$\Phi(u) = \int_0^u |\frac{f(s+t)+f(s-t)}{2} - A|dt.$$

$$\sigma_n(f)(s) - A = 2\int_0^\pi K_n(t)(\frac{f(s+t)+f(s-t)}{2} - A)\frac{dt}{2\pi}.$$

Usando que $K_n(t) \leq min\{n+1, \frac{\pi^2}{(n+1)t^2})$ y teniendo en cuenta que $n+1 = \frac{\pi^2}{(n+1)t^2} \iff t = \frac{\pi}{n+1}$ tenemos, para $\pi \geq \alpha_n \geq \frac{\pi}{n+1}$,

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f)(s) - A| & \leq 2\int_0^{\alpha_n} |\frac{f(s+t)+f(s-t)}{2} - A|\frac{dt}{2\pi} \\ & + 2\int_{\alpha_n}^\pi K_n(t)|\frac{f(s+t)+f(s-t)}{2} - A|\frac{dt}{2\pi} \\ & \leq 2\int_0^{\alpha_n} K_n(t)|\frac{f(s+t)+f(s-t)}{2} - A|\frac{dt}{2\pi} \\ & + \frac{\pi^2}{(n+1)\alpha_n^2}(||f||_1 + |A|). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^{\alpha_n} K_n(t)\Phi'(t)\frac{dt}{2\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{(n+1)}} K_n(t)\Phi'(t)\frac{dt}{2\pi} + \int_{\frac{\pi}{(n+1)}}^{\alpha_n} K_n(t)\Phi'(t)\frac{dt}{2\pi} \\
&\leq (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{(n+1)}} \Phi'(t)\frac{dt}{2\pi} + \frac{\pi^2}{n+1}\int_{\frac{\pi}{(n+1)}}^{\alpha_n} \frac{\Phi'(t)}{t^2}\frac{dt}{2\pi} \\
&\leq \frac{n+1}{2\pi}\Phi(\frac{\pi}{n+1}) + \frac{\pi}{2(n+1)}\left(\frac{\Phi(\alpha_n)}{\alpha_n^2} - \frac{\Phi(\frac{\pi}{n+1})}{(\frac{\pi}{n+1})^2}\right) \\
&+ \frac{\pi^2}{2(n+1)}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\alpha_n} \frac{\Phi(t)}{t^3}\frac{dt}{2\pi} \\
&\leq \frac{\pi}{2(n+1)}\frac{\Phi(\alpha_n)}{\alpha_n^2} + \frac{\pi^2}{2(n+1)}\max_{\frac{\pi}{n+1}<t<\alpha_n}\{\frac{\Phi(t)}{t}\}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{1}{t^2}\frac{dt}{2\pi} \\
&\leq \frac{\pi}{2(n+1)}\frac{\Phi(\alpha_n)}{\alpha_n^2} + \frac{\pi}{n+1}\max_{\frac{\pi}{n+1}<t<\alpha_n}\{\frac{\Phi(t)}{t}\}(\frac{n+1}{\pi} - \frac{1}{\pi}).
\end{aligned}$$

Tomemos $\alpha_n = \frac{\pi}{(n+1)^{1/4}}$ para que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n^2(n+1) = \infty$ y usar la hipótesis para terminar la demostración. ∎

Corolario 2.7.9 *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces*

$$(C) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int} = f(t), \qquad m - a.e.$$

DEM: Llamaremos un punto de Lebesgue de la función f al valor t tal que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}|f(s)-f(t)|ds = 0.$$

Usando el teorema de diferenciación de Lebesgue se tiene que casi todo punto es un punto de Lebesgue. Tomando $A_0 = f(t)$ en el teorema de Lebesgue de convergencia Césaro se tiene

$$m(\{t : \limsup_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|\frac{f(t+s)-f(t-s)}{2} - f(t)|ds > 0\}) = 0$$

y $\sigma_n(f)(t) \to f(t)$ en todo punto de Lebesgue, y por consiguiente a.e. ∎

Para estudiar el comportamiento de la convergencia Abel necesitaremos los siguientes lemas.

Lema 2.7.10 *Sea s una función simple, par, monótona decreciente y no negativa en $[0,\pi)$ y sea $f \in L^1(\mathbb{T})$. Entonces para todo $t \in [-\pi,\pi)$*

$$|s * f(t)| \leq ||s||_1 f^*(t).$$

DEM: Escribimos

$$s = \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k \chi_{[a_k, a_{k+1}]} + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k \chi_{[-a_{k+1}, -a_k]}$$

donde $\alpha_{k+1} \geq \alpha_k$, $a_k \leq a_{k+1}$, $a_1 = 0$, $a_N \leq \pi$.

Es claro que $||s||_1 = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k (a_{k+1} - a_k)$. También puede ponerse

$$s = \sum_{j=2}^{N} \beta_j \chi_{[-a_j, a_j]}$$

donde $\beta_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$. Entonces $||s||_1 = \frac{1}{\pi} \sum_{j=2}^{N} (\alpha_j - \alpha_{j-1}) a_j$.

Notemos que si $f \geq 0$ entonces

$$s * f(t) = \sum_{j=2}^{N} \beta_j \frac{a_j}{\pi} (f * \frac{\pi}{a_j} \chi_{[-a_j, a_j]})(t) \leq \frac{1}{\pi} \sum_{j=2}^{N} \beta_j a_j f^*(t) = ||s||_1 f^*(t).$$

El caso de f arbitaria se sigue usando $|s * f| \leq s * |f|$. ■

Lema 2.7.11 *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces*

$$P^*(f)(t) = \sup_{0<r<1} |P_r * f(t)| \leq f^*(t).$$

DEM: Como $P_r = \lim_{n\to\infty} s_n$ donde s_n es una sucesión monótona creciente de funciones simples como en el Lema 1, se tiene que $s_n * f(t)$ converge de manera creciente a $P_r * f(t)$.

Supongamos $f \geq 0$. Aplicando del teorema de la convergencia monótona de Lebesgue y el Lema 1 se tiene el resultado, puesto que $\|s_n\|_1$ converge a $\|P_r\|_1$.

Caso general se sigue del anterior por la estimación $|P_r * f|(t) \leq P_r * |f|(t)$. ■

Corolario 2.7.12 *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces*

$$(A) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int} = f(t), \qquad m - a.e.$$

DEM: Es sabido que que $P_r * f(t) \to f(t)$ para todo $t \in [-\pi, \pi)$ si f es continua y además $m(\{t : P^*(f)(t) > \lambda\}) \leq \frac{4}{\lambda}||f||_1$. Es suficiente ver que

$$m(\{t : \limsup_{r\to 1} |P_r * f(t) - f(t)| > \lambda\}) = 0$$

para todo $\lambda > 0$.

En efecto, dado $\varepsilon > 0$ existe $g \in C(\mathbb{T})$ tal que $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Ahora

$$|P_r * f(t) - f(t)| \leq |P_r * f(t) - P_r * g(t)| + |P_r * g(t) - g(t)| + |g(t) - f(t)|,$$

entonces

$$\limsup_{r\to 0} |P_r * f(t) - f(t)| \leq \sup_{0<r<1} |P_r * (f - g)(t)| + |g(t) - f(t)|.$$

$$\begin{aligned} m(\{t : \limsup_{r\to 0} |P_r * f(t) - f(t)| > \lambda\}) \quad & \leq m(\{t : P^*(f - g)(t) > \frac{\lambda}{2}\}) \\ & + m(\{t : |g(t) - f(t)| > \frac{\lambda}{2}\}) \\ & \leq \frac{C}{\lambda}||f - g||_1 < \frac{C}{\lambda}\varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando el límite en ε se tiene el resultado. ∎

Estudiaremos a continuación la situación la convergencia de la serie de Fourier para funciones continuas y veremos que nada puede esperarse en este caso.

Teorema 2.7.13 *Existe una función $f \in C(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier diverge en $t = 0$.*

DEM: Recordemos (ver demostración de la no convergencia de la serie de Fourier en $C(\mathbb{T})$) que existen $C > 0$, y funciones $\phi_n \in C(\mathbb{T})$ con $||\phi_n||_\infty \leq 1$ y $|S_n\phi_n(0)| \geq Clog(n)$.

Ahora tomar $\xi_n(t) = \sigma_{n^2}(\phi_n)(t)$. Nótese que

$$\begin{aligned}
||S_n(\xi_n) - S_n(\phi_n)||_\infty &= ||\sigma_{n^2} S_n(\phi_n) - S_n(\phi_n)||_\infty \\
&= sup\{|\sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n^2+1}\hat{\phi}_n(k)e^{ikt}|\} \\
&\leq \frac{1}{n^2+1}\sum_{k=-n}^{n} |k| \leq 2.
\end{aligned}$$

De aqui

$$\begin{aligned}
|S_n\xi_n(0)| &\geq |S_n\phi_n(0) + S_n\xi_n(0) - S_n\phi_n(0)| \\
&\geq |S_n\phi_n(0)| - ||S_n(\xi_n) - S_n(\phi_n)||_\infty \\
&\geq Clog(n) - 2.
\end{aligned}$$

Ahora tomamos una subsucesón (λ_n) creciente tal que $\lambda_n > n$ (que fijaremos después) y definimos

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\xi_{\lambda_n}(\lambda_n t).$$

Nótese que

$$\xi_{\lambda_n}(\lambda_n t) = \sum_{k=-\lambda_n^2}^{\lambda_n^2} \hat{\phi}_{\lambda_n}(k)(1 - \frac{|k|}{\lambda_n^2+1})e^{i\lambda_n kt}$$

es un polinomio de grado λ_n^3.

Para $k \in \mathbb{N}$ escribiremos la descomposición

$$f(t) = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^2}\xi_{\lambda_n}(\lambda_n t) + \frac{1}{k^2}\xi_{\lambda_k}(\lambda_k t) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\xi_{\lambda_n}(\lambda_n t).$$

Eligamos λ_n de modo que $\lambda_k^2 \geq \lambda_n^3$ si $n < k$, entonces

$$S_{\lambda_k^2}(\xi_{\lambda_n})(\lambda_n t) = (\xi_{\lambda_n})(\lambda_n t), \quad n < k$$

y tomando también $\lambda_k^2 < \lambda_{k+1}$ se tendrá para $n > k$

$$S_{\lambda_k^2}(\xi_{\lambda_n})(\lambda_n t) = S_{\lambda_k^2}(\hat{\xi}_{\lambda_n}(0) + \hat{\xi}_{\lambda_n}(1)e^{i\lambda_n t} + ...) = \hat{\xi}_{\lambda_n}(0).$$

Como, además $S_{\lambda_k^2}(\xi_{\lambda_k})(0) = S_{\lambda_k}(\xi_{\lambda_k})(0)$, se tendrá entonces

$$S_{\lambda_k^2} f(0) = \frac{1}{k^2} S_{\lambda_k}(\xi_{\lambda_k})(0) + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} \xi_{\lambda_n}(0) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \hat{\xi}_{\lambda_n}(0).$$

Por consiguiente

$$|S_{\lambda_k^2} f(0)| \geq \frac{C}{k^2} log(\lambda_k) - 2 - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j^2} |\xi_{\lambda_j}(0)| - \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} |\hat{\xi}_{\lambda_j}(0)| \geq Clog(\lambda_k)k^2 - C'.$$

Y eligiendo λ_k de modo que $\frac{log(\lambda_k)}{k^2} \to \infty$ cuando $k \to \infty$ se tendrá que $f \in C(\mathbb{T})$ y el $\lim_{n\to\infty} S_{\lambda_n^2}(f)(0) = \infty$. Finalmente mencionar que $\lambda_n = 2^{3^n}$ es un ejemplo verificando todas las condiciones.

∎

El siguiente resultado relaciona la convergencia en media Cèsaro con la convergencia de la serie de Fourier bajo ciertas condiciones.

Teorema 2.7.14 *(Teorema tauberiano) Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y existe $C > 0$ tal que $|\hat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|}$, $(n \neq 0)$. Entonces $S_n(f)(t)$ converge a A si y sólo si $\sigma_n(f)(t)$ converge a A.*

DEM: Sólo hay que probar que si $\sigma_n(f)(t)$ converge a A entonces $S_n(f)(t)$ converge a A.

Paso 1.- Sea $m > n$ entonces

$$S_n(f)(t) = \frac{m+1}{m-n}\sigma_m(f)(t) - \frac{n+1}{m-n}\sigma_n(f)(t) - \frac{m+1}{m-n} \sum_{n<|j|\leq m} (1 - \frac{|j|}{m+1}) \hat{f}(j) e^{ijt}.$$

En efecto, si $|j| > m$, ambos miembros son cero.

Ahora para $n < |j| \leq m$,

$$\hat{S}_n(f)(j) = 0 = \frac{m+1}{m-n}\hat{\sigma}_m(f)(j) - \frac{m+1}{m-n}(1 - \frac{|j|}{m+1})\hat{f}(j).$$

Si $|j| \leq n$,

$$\begin{aligned} \hat{S}_n(f)(j) &= \hat{f}(j) \\ &= \frac{m+1}{m-n}\hat{\sigma}_m(f)(j) - \frac{n+1}{m-n}\hat{\sigma}_n(f)(j) \\ &= (\frac{m+1}{m-n}(1 - \frac{|j|}{m+1}) - \frac{n+1}{m-n}(1 - \frac{|j|}{n+1}))\hat{f}(j) \\ &= (\frac{m+1-|j|}{m-n} - \frac{n+1-|j|}{m-n})\hat{f}(j). \end{aligned}$$

Paso 2.- Pongamos $A = \sigma(f)(t)$. Descomponiendo $1 = \frac{[\lambda n]+2}{[\lambda n]+1-n} - \frac{n+1}{[\lambda n]+1-n}$ se puede poner

$$\begin{aligned}
|S_n(f)(t) - \sigma(f)(t)| \quad & \leq |S_n(f)(t) - \frac{[\lambda n]+2}{[\lambda n]+1-n}\sigma_{[\lambda n]+1}(f)(t) \\
& + \frac{n+1}{[\lambda n]+1-n}\sigma_n(f)(t)| \\
& + |\frac{[\lambda n]+2}{[\lambda n]+1-n}(\sigma_{[\lambda n]+1}(f)(t) - \sigma(f)(t))| \\
& + |\frac{n+1}{[\lambda n]+1-n}(\sigma(f)(t) - \sigma_n(f)(t))| \\
& \leq \frac{[\lambda n]+2}{[\lambda n]+1-n} \sum_{n<|j|\leq[\lambda n]+1} (1 - \frac{|j|}{[\lambda n]+2})|\hat{f}(j)| \\
& + \frac{\lambda n+2}{(\lambda-1)n}|\sigma_{[\lambda n]+1}(f)(t) - \sigma(f)(t)| \\
& + \frac{n+1}{(\lambda-1)n}|\sigma_n(f)(t) - \sigma(f)(t)|.
\end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\frac{[\lambda n]+2}{[\lambda n]+1-n} \sum_{n<|j|\leq[\lambda n]+1} (1 - \frac{|j|}{[\lambda n]+2})|\hat{f}(j)| \leq$$

$$\leq \frac{[\lambda n]+1-n}{[\lambda n]+1-n} \sum_{n<|j|\leq[\lambda n]+1} |\hat{f}(j)| \leq C \sum_{n<|j|\leq[\lambda n]+1} \frac{1}{|j|}.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
|S_n(f)(t) - \sigma(f)(t)| \quad & \leq C \sum_{n<|j|<[\lambda n]+1} \frac{1}{|j|} \\
& + \frac{\lambda+2}{\lambda-1}|\sigma_{[\lambda n]+1}(f)(t) - \sigma(f)(t)| \\
& + \frac{2}{\lambda-1}|\sigma_n(f)(t) - \sigma(f)(t)|.
\end{aligned}$$

Paso 3.- Sea $\lambda > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces$\sum_{n<|j|\leq[\lambda n]} \frac{1}{|j|} \leq 2log(\lambda + \frac{1}{n})$.
En efecto

$$\sum_{n<|j|\leq[\lambda n]} \frac{1}{|j|} \leq 2\int_n^{[\lambda n]} \frac{dx}{x} \leq 2log(\lambda + \frac{1}{n}).$$

Dado $\varepsilon > 0$ existen $2 > \lambda_0 > 1$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $log(\lambda + \frac{1}{n}) < \frac{\varepsilon}{3C}$ si $\lambda_0 \leq \lambda < 1, n \geq n_0$.

Apliquemos entonces el proceso anterior a λ_0 y $n \geq n_0$ quedando entonces

$$\begin{aligned} |S_n(f)(t) - \sigma(f)(t)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{4}{\lambda_0 - 1}|\sigma_{[\lambda n]+1}(f)(t) - \sigma(f)(t)| \\ &+\frac{2}{\lambda_0 - 1}|\sigma_n(f)(t) - \sigma(f)(t)|. \end{aligned}$$

Ahora existe $n_1 \in \mathbb{N}$, con $n_1 \geq n_0$ tal que $|\sigma_n(f)(t) - \sigma(f)(t)| < \frac{\varepsilon(\lambda_0-1)}{12}$ si $n \geq n_1$ y se obtiene finalmente que para $n \geq n_1$ tenemos $|S_n(f)(t) - \sigma(f)(t)| \leq \varepsilon$. ∎

Corolario 2.7.15

(i) Sea f una función real de variación acotada.
Entonces $lim_{n\to\infty}S_n(f)(t) = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$.
(ii) Sea f una función absolutamente continua.
Entonces $lim_{n\to\infty}S_n(f)(t) = f(t)$ para todo t.

Dem: (i) Podemos escribir $f = f_1 - f_2$ donde $f_i \geq 0$ monótonas crecientes y tomemos las medidas de Borel-Stieltjes asociadas. Es inmediato comprobar que $\hat{f}(n) = O(\frac{1}{|n|})$.

Veamos una prueba directa (usando sólo la definición).

Recordemos que $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ se dice de variación acotada si existe $C > 0$ tal que para toda partición $t_0 = -\pi < t - 1 < ... < t_n = \pi$ se cumple que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq C.$$

Lema 2.7.16 *Sea $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$ periódica y de variación acotada. Entonces existe $K > 0$ tal que $|\hat{f}(n)| \leq \frac{K}{|n|}$ para $n \neq 0$.*

Dem: Escribimos para $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=-n}^{n-1} \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(t)e^{-int}\frac{dt}{2\pi}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=-n}^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(t+\frac{k\pi}{n}) e^{-in(t+\frac{k\pi}{n})} \frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{n}} \Big(\sum_{k=-n}^{n-1} f(t+\frac{k\pi}{n}(-1)^k) e^{-int} \Big) \frac{dt}{2\pi}.
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
|\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \frac{dt}{2\pi}| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} |\sum_{k=-n}^{n-1} f(t+\frac{k\pi}{n}(-1)^k) e^{-int}| \frac{dt}{2\pi} \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sum_{k=-n}^{n-1} |f(t+\frac{k\pi}{n}) - f(t+\frac{(k+1)\pi}{n})| \frac{dt}{2\pi} \\
&\leq C\frac{\pi}{n}.
\end{aligned}
$$

Para $-n \in \mathbb{N}$ la prueba es análoga.
(ii) Ejercicio.

■

Algunas condiciones simples que implican la convergencia puntual de la serie de Fourier.

Teorema 2.7.17 *(Test de Dini) Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que*

$$\int_{-1}^{1} |\frac{f(t+t_0) - f(t_0)}{t}| dt < \infty.$$

Entonces

$$lim_{n\to\infty} S_n(f)(t_0) = f(t_0).$$

DEM: Haremos previamente el siguiente caso:

Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\int_{-1}^{1} |\frac{f(t)}{t}| dt < \infty$. Veamos que $lim_{n\to\infty} S_n(f)(0) = 0$.

$$
\begin{aligned}
S_n(f)(0) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{sen(n+\frac{1}{2})t}{sen\frac{t}{2}} \frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) cos(nt) \frac{dt}{2\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{cos\frac{t}{2} sen(nt)}{sen\frac{t}{2}} \frac{dt}{2\pi}.
\end{aligned}
$$

La hipótesis garantiza que $g(t) = f(t)\frac{cos\frac{t}{2}}{sen\frac{t}{2}} \in L^1(\mathbb{T})$ y por tanto, usando el lema de Riemann-Lebesgue,

$$S_n(f)(0) = \frac{\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)}{2} + \frac{\hat{g}(-n) - \hat{g}(n)}{2i} \to 0, (n \to \infty).$$

Sea ahora $g(t) = f(t + t_0) - f(t_0)$. Entonces $\hat{g}(n) = e^{int_0}\hat{f}(n) - f(t_0)\delta_{n,0}$, de donde se sigue que $S_n(g)(0) = S_n(f)(t_0) - f(t_0)$ y basta aplicar el caso anterior. ∎

Chapter 3

Análisis de Fourier en $\mathbb{R}^n$

3.1 Espacios de funciones continuas e integrables en $\mathbb{R}^n$

Consideramos el espacio de medida de Lebesgue $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue m_n. No es un grupo compacto, sino localmente compacto. En $\mathbb{R}^n$ tenemos la ley $+$ como estructura de grupo y denotamos $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ la norma que da lugar a la topología euclídea sobre el mismo.

Definición 3.1.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una función continua. Se llama soporte de la función al conjunto $sop(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$. Utilizamos las notaciones*

$$C_{00}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C};\ \textit{funciones continuas con soporte compacto}\ \}.$$

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C};\ \textit{funciones continuas con}\ \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}.$$

$C_0(\mathbb{R}^n)$ con el producto puntual $f.g(t) = f(t).g(t)$ y la norma $||f||_\infty = sup_{t\in\mathbb{R}^n}|f(t)|$ es un álgebra de Banach conmutativa sin unidad pero con unidad aproximada acotada.

Basta tomar $\phi_k(x_1, ..., x_n) = e_k(x_1)e_k(x_2)...e_k(x_n)$ donde $e_k(t) = 1$ para todo $t \in [-k, k]$, $e_k(t) = t - (k + 1)$ si $t \in [k, k + 1]$ y $e_k(t) = k + 1 - t$ si $t \in [-k - 1, -k]$.

Proposición 3.1.2 *$C_{00}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $C_0(\mathbb{R}^n)$.*

Dem: Ejercicio. ∎

Definición 3.1.3 *Sea $1 \leq p < \infty$. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ se dice p-integrable Lebesgue si es medible Lebesgue y $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dm_n(x) < \infty$.*

Nótese que si $f = 0$ en casi todo punto entonces f es medible Lebesgue y $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dm_n(x) = 0$.

Entre las funciones p-integrables consideramos la siguiente relación de equivalencia: Sean f, g medibles Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$, $f \approx g$ si $f = g$ en casi todo punto, i.e $m_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Definimos las clases de equivalencia

$$[f] = \{g \text{ medibles Lebesgue en } \mathbb{R}^n \text{ con } g = f \text{ a.e}\}.$$

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ clases de funciones p-integrables Lebesgue}\}.$$

Una colección de funciones p-integrables son las funciones simples (soportadas sobre medibles de medida finita):

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f(x) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{A_k}(t) : N \in \mathbb{N}, \alpha_k \in \mathbb{C}, A_k \text{ medibles con } m_n(A_k) < \infty\}.$$

Proposición 3.1.4 *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces $L^p(\mathbb{R}^n)$ un espacio de Banach con la norma dada por $||f||_p = (\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dm_n(x))^{1/p}$.*

DEM: Análoga al caso del toro $\mathbb{T}$. ∎

Proposición 3.1.5 *Sea $1 \leq p < \infty$. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

DEM:

Supongamos que $f \geq 0$. Definimos, para $k \in \mathbb{N}, j \in \{0, 1, ..., k2^k - 1\}$,

$$E_{j,k} = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{j}{2^k} \leq f(x) < \frac{j+1}{2^k}\}$$

y escribimos $s_k = \sum_{j=0}^{k2^k-1} \frac{j}{2^k} \chi_{E_{j,k}} + k\chi_{\{x:f(x)>k\}}$.

Es sencillo ver que $\lim_{k\to\infty} s_k(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ de manera creciente. Debido a la estimación

$$|s_k(x) - f(x)|^p \leq f^p(x)$$

podemos usar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para obtener que $\lim_{k\to\infty} s_k = f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Veamos que $s_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, es decir que $m_n(E_{j,k}) < \infty$ y que $m_n(\{x : f(x) > k\}) < \infty$.

Se sigue de la desigualdad de Tchebichev,

$$m_n(E_{j,k}) \leq m_n(\{x : f(x) > \frac{j}{2^k}\}) \leq \frac{2^{pk}}{j^p}\|f\|_p^p < \infty.$$

Análogamente el otro conjunto.

El caso general se sigue de descomponer $f = (Ref)^+ - (Ref)^- + i(Imf)^+ - i(Imf)^-$. ■

Proposición 3.1.6 *Sea* $1 \leq p < \infty$. $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ *es denso en* $L^p(\mathbb{R}^n)$.

DEM: Observar en primer lugar que $C_{00}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.

Sea $f \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ y sea $K = sop(f)$. Obviamente

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dm_n(x) = \int_K |f(x)|^p dm_n(x) \leq (\max\{|f(x)| : x \in K\})^p m_n(K) < \infty.$$

Supongamos $f = \chi_E$ con E medible de medida finita. Dado $\varepsilon > 0$ y cada E con $m_n(E) < \infty$ existen un compacto K y un abierto G con $K \subset E \subset G$ y de modo que $m(G \setminus K) < \frac{\varepsilon^p}{2^p}$.

Ahora, usando el Lema de Uryshon (para $\mathbb{R}^n$), tomar $\phi \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ de modo que $0 \leq \phi(x) \leq 1$, $\phi(x) = 1$ si $x \in K$ y $\phi(x) = 0$ si $x \notin G$.

Es claro que

$$\begin{aligned} ||f - \phi||_p^p &= \int_G |\chi_E(x) - \phi(x)|^p dm_n(x) \\ &= \int_{G \setminus K} |\chi_E(x) - \phi(x)|^p dm_n(x) \\ &\leq 2^p m_n(G \setminus K) < \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ el resultado se sigue por el caso anterior. Para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, usando la densidad de la simples se deduce el resultado. ■

Definición 3.1.7 *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *una función medible. Diremos que está esencialmente acotada si existe* $M \geq 0$ *tal que* $|f| \leq M$ *a.e. es decir*

$$m_n(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > M\}) = 0.$$

Al valor M *se le dice cota esencial de* $|f|$.

Denotamos $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *el espacio de la clases de equivalencia de funciones esencialmente acotadas y ponemos*

$$\|f\|_\infty = \inf\{M : |f| \leq M \ a.e.\}.$$

Los siguientes resultados tienen la misma demostración que en el caso $\mathbb{T}$, y por tanto no la incluimos.

Proposición 3.1.8 *Sea* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Entonces*

$$\|f\|_\infty = \min\{\sup_{x \notin N} |f(x)| : m_n(N) = 0\}.$$

Proposición 3.1.9 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *es un espacio de Banach.*

Proposición 3.1.10 $C_0(\mathbb{R}^n)$ *es un subespacio cerrado de* $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *y la clausura de* $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ *en* $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *coincide con* $C_0(\mathbb{R}^n)$.

Ejercicio 3.1.1 *Demostrar que no existe relación de contenidos entre los espacios* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *para diferentes valores de* p *y que* $C_0(\mathbb{R}^n)$ *no está incluido en* $L^p(\mathbb{R}^n)$.

3.2 Transformada de Fourier.

Definición 3.2.1 *(Operador traslación) Sea* $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *y* $x \in \mathbb{R}^n$, *definimos* $f_x(y) = f(x+y)$. *Denotamos* $\tau_x : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ *la aplicación* $\tau_x(f) = f_x$.

Esta operación genera un representación del grupo $\mathbb{R}^n$ *en los operadores sobre* $L^p(\mathbb{R}^n)$, *pues* $\tau_0 = id$, $\tau_x \tau_y = \tau_{x+y}$ *y* $(\tau_x)^{-1} = \tau_{-x}$.

Proposición 3.2.2 *(i) Sea* $x \in \mathbb{R}^n$. τ_x *es una isometria sobre* $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ *y sobre* $C_0(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Sea $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ *entonces la aplicación* $x \to f_x$ *es uniformemente continua de* $\mathbb{R}^n$ *en* $C_0(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ *entonces la aplicación* $x \to f_x$ *es uniformemente continua de* $\mathbb{R}^n$ *en* $L^p(\mathbb{R}^n)$.

DEM:

(i) Obviamente es lineal. Es claro que la invarianza por traslaciones de la medida de Lebesgue implica que $||\tau_x(f)||_p = ||f||_p$.

(ii) Sea $f \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$. Entonces f es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que si $|y - y'| < \delta$ entonces $|f(y) - f(y')| < \varepsilon$. Luego dados $x, x' \in \mathbb{R}^n$ con $|x - x| < \delta$ se tiene

$$||f_x - f_{x'}||_\infty = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x'+y)| < \varepsilon.$$

Dadas $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ y $g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ estimamos

$$||f_x - f_{x'}||_\infty \leq ||f_x - g_x||_\infty + ||g_x - g_{x'}||_\infty + ||f_{x'} - g_{x'}||_\infty = 2||f - g||_\infty + ||g_x - g_{x'}||_\infty.$$

Por tanto, si $\varepsilon > 0$, encontramos $g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon/3$ y $\delta > 0$ tal que si $|x - x'| < \delta$ entonces $||g_x - g_{x'}||_\infty < \varepsilon/3$. Esto concluye que $||f_x - f_{x'}||_\infty < \varepsilon$ para $|x - x'| < \delta$.

(iii) Dado $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$ tomar $g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ con $||f - g||_p < \varepsilon$.

Ahora, como antes,

$$||f_x - f_{x'}||_p \leq ||f_x - g_x||_p + ||g_x - g_{x'}||_p + ||g_{x'} - f_{x'}||_p \leq 2||f - g||_p + ||g_x - g_{x'}||_p.$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} ||g_x - g_{x'}||_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(x+y) - g(x'+y)|^p dy \\ &= \int_{(sop(g)-x)\cup(sop(g)-x')} |g(x+y) - g(x'+y)|^p dy \\ &\leq ||g_x - g_{x'}||_\infty^p m_n((K-x)\cup(K-x')) \\ &\leq ||g_x - g_{x'}||_\infty^p 2m_n(K) \end{aligned}$$

donde $sop(g) = K$. Con ésto se concluye la demostración. ∎

Definición 3.2.3 *(Operador Dilatación) Sea $\delta > 0$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, definimos $f_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} f(\frac{x}{\delta})$. Denotamos $D_\delta : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ la aplicación $D_\delta(f) = f_\delta$.*

Esta operación genera un representación del grupo multiplicativo $\mathbb{R}^+$ en los operadores sobre $L^1(\mathbb{R}^n)$, pues $D_1 f = f$, $D_\delta D_{\delta'} = D_{\delta\delta'}$ y $(D_\delta)^{-1} = D_{\delta^{-1}}$.

Proposición 3.2.4 *Sea $\delta > 0$. Entonces*

(i) $\|f_\delta\|_1 = \|f\|_1$ para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\|f_\delta\|_p = \delta^{-n(1-1/p)}\|f\|_p$ para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(iii) $\|f_\delta\|_\infty = \delta^{-n}\|f\|_1$ para todo $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$

Dem: Inmediata. ∎

Definición 3.2.5 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$. Definimos la transformada de Fourier de f en el punto ξ como*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dm_n(x)$$

siendo $\langle x, \xi\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$.

Nota 3.2.1 *Dada $f \in L^1(\mathbb{R})$ con soporte contenido en $[-\pi, \pi)$, podemos considerar g su periodificación en $\mathbb{R}$. Entonces el coeficiente de Fourier $\hat{g}(n)$ para $n \in \mathbb{Z}$ coindide con el valor de la transformada de Fourier $\hat{f}(\xi)$ para $\xi = n$.*

Proposición 3.2.6 *Sea $f(x_1, ..., x_n) = f_1(x_1)...f_n(x_n)$ donde $f_i \in L^1(\mathbb{R})$ para $i = 1, ..., n$. Entonces $\hat{f}(\xi_1, ..., \xi_n) = \hat{f}_1(\xi_1)...\hat{f}_n(\xi_n)$.*

Dem: Ejercicio ∎

Proposición 3.2.7 *(Lema de Riemann-Lebesgue) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces* $\lim_{|\xi|\to\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$.

Dem: Escribimos

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle} dm_n(x) = -\int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle} e^{i\pi\langle \xi, \frac{\xi}{|\xi|^2}\rangle} dm_n(x)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= -\int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f(x)e^{-i\langle \xi, x-\frac{\pi\xi}{|\xi|^2}\rangle} dm_n(x) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} f(x + \frac{\pi\xi}{|\xi|^2})e^{-i\langle x,\xi\rangle} dm_n(x) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} f_{\frac{\pi\xi}{|\xi|^2}}(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle} dm_n(x) \end{aligned}$$

Consecuentemente, sumando ambas expresiones para $\hat{f}(\xi)$, se obtiene

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f_{\frac{\pi\xi}{|\xi|^2}}(x))e^{-i\langle x,\xi\rangle} dm_n(x).$$

Ahora

$$|\hat{f}(\xi)| \le \frac{1}{2}\|f - f_{\frac{\pi\xi}{|\xi|^2}}\|_1,$$

y, usando $y = \frac{\pi\xi}{|\xi|^2}$ que tiene $|y| = \frac{\pi}{|\xi|}$ junto con la continuidad de la traslación en $L^1(\mathbb{R}^n)$ se concluye el resultado. ∎

Teorema 3.2.8 *La transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$ define un operador lineal continuo de norma* 1.

Dem:

Probemos primero la continuidad de la función $\hat{f}(\xi)$. Sea (ξ_k) una sucesión convergiendo a ξ, probemos que $\lim_{k\to\infty} \hat{f}(\xi_k) = \hat{f}(\xi)$. Como

$$\hat{f}(\xi_k) - \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(e^{-i\langle x,\xi_k\rangle} - e^{-i\langle x,\xi\rangle})dm_n(x),$$

si llamamos $\phi_k(x) = f(x)(e^{-i\langle x,\xi_k\rangle} - e^{-i\langle x,\xi\rangle})$ se tiene que $\phi_k(x)$ converge a cero para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y además $|\phi_k(x)| \leq 2|f(x)|$. Luego por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se tiene $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(x)dm_n(x) = 0$, es decir $\lim_{k\to\infty} \hat{f}(\xi_k) = \hat{f}(\xi)$.

Combinando con el Lema de Riemann-Lebesgue se obtiene que $\mathcal{F}$ está bien definido. Obviamente es lineal:

$$(f+g)\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi) + \hat{g}(\xi), \quad (\lambda f)\hat{}(\xi) = \lambda\hat{f}(\xi).$$

Se tiene $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Luego $\|\mathcal{F}\| \leq 1$.

Demostremos que $\|\mathcal{F}\| = 1$. Es suficiente encontrar $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f\| = 1$ y $\|\hat{f}\|_\infty = 1$.

Observemos que si $f \geq 0$ entonces $\hat{f}(0) = \|f\|_1$ Luego para funciones integrables no negativas, se tiene $\|f\|_1 = \|\hat{f}\|_\infty$. Basta, ahora, elegir una con norma 1 (como por ejemplo $f = \frac{\chi_A}{m_n(A)}$ para cualquier medible de medida positiva) para terminar la demostración. ∎

Definición 3.2.9 *Sea $x \in \mathbb{R}^n$ denotamos $M_x f(y) = e^{i\langle x,y\rangle} f(y)$. Obviamente $M_x : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ es una isometría para $1 \leq p \leq \infty$.*

Nótese que es una representación del grupo $\mathbb{R}^n$ en los operadores, donde $M_0 = Id$, $M_x M_{x'} = M_{x+x'}$ y $(M_x)^{-1} = M_{-x}$.

Definición 3.2.10 *Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, denotamos por $\bar{f}(x) = f(-x)$ y $Rf = \bar{f}$ la rotación anterior.*

En general, si A es la matriz inversible $n \times n$ se escribe $f_A(x) = f(Ax)$ y denotamos $T_A(f) = f_A$.

Proposición 3.2.11 *Sea $1 \leq p < \infty$, y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*

(i) $\|\bar{f}\|_p = \|f\|_p$.

(ii) $\|f_A\|_p^p = |det(A)|^{-1/p}\|f\|_p$.

DEM:

$$\|f_A\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(Ax)|^p dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |det(A^{-1})| dm_n(y) = |det(A)|^{-1}\|f\|_p^p$$

■

Proposición 3.2.12 *Sea $x \in \mathbb{R}^n$, A matriz inversible y $\delta > 0$.*
(i) $\mathcal{F}\tau_x(f) = M_x\mathcal{F}(f)$ para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
(ii) $\mathcal{F}M_x(f) = \tau_{-x}\mathcal{F}(f)$ para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
(iii) $\mathcal{F}D_\delta(f) = \frac{1}{\delta^n}D_{\frac{1}{\delta}}\mathcal{F}(f)$ para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
(iv) $\mathcal{F}T_A(f) = |det(A)|^{-1}T_{(A^*)^{-1}}\mathcal{F}(f)$ para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
(v) $\mathcal{F}R(f) = R\mathcal{F}(f)$ para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

DEM: (i)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\tau_x(f)(\xi) &= \hat{f}_x(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)e^{-i\langle y,\xi\rangle} dm_n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle y-x,\xi\rangle} dm_n(y) \\
&= e^{i\langle x,\xi\rangle}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle y,\xi\rangle} dm_n(y) \\
&= e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{f}(\xi) = M_x\mathcal{F}(f)(\xi)
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}M_x(f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{i\langle y,x\rangle}e^{-i\langle y,\xi\rangle} dm_n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle y,\xi-x\rangle} dm_n(y) \\
&= \hat{f}(\xi - x) = \tau_{-x}\mathcal{F}(f)(\xi)
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}D_\delta(f)(\xi) &= \hat{f}_\delta(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\delta^n} f(\frac{y}{\delta})e^{-i\langle y,\xi\rangle} dm_n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle \delta y,\xi\rangle} dm_n(y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\langle y, \delta\xi\rangle} dm_n(y) \\
&= \hat{f}(\delta\xi) = \frac{1}{\delta^n} D_{\frac{1}{\delta}} \mathcal{F}(f)(\xi)
\end{aligned}
$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(T_A f)(\xi) &= \hat{f}_A(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(Ay) e^{-i\langle y,\xi\rangle} dm_n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle A^{-1}x,\xi\rangle} |det(A)|^{-1} dm_n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,(A^*)^{-1}\xi\rangle} |det(A)|^{-1} dm_n(y) \\
&= |det(A)|^{-1} \hat{f}((A^*)^{-1}\xi) = |det(A)|^{-1} T_{(A^*)^{-1}} \mathcal{F}(f)(\xi)
\end{aligned}
$$

(v) Se sigue de (iv), usando $A = -I$. ■

Proposición 3.2.13 *(Derivación)*
(i) Si $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y tiene soporte compacto entonces

$$
(\frac{\partial f}{\partial x_k})\hat{}(\xi) = i\xi_k \hat{f}(\xi).
$$

(ii) Si $f \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ entonces existen la derivada parcial k-ésima de $\hat{f}$ y

$$
(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_k})(\xi) = -i(x_k f)\hat{}(\xi).
$$

DEM: (i) Supongamos que f es de clase C^1 y de soporte compacto, y supongamos $k = 1$. Aplicando integración por partes en la variable x_1 y usando el soporte compacto,

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial f}{\partial x_1})\hat{}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\frac{\partial f}{\partial x_1})(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dm_n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} ...(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) e^{-ix_1\xi_1} dm_1(x_1)) e^{-i\sum_{j=2}^n x_j\xi_j} dm_{n-1}(x_2, ..., x_n) \\
&= \int_{\mathbb{R}} ...(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2, ..., x_n) i\xi_1 e^{-ix_1\xi_1} dm_1(x_1)) e^{-i\sum_{j=2}^n x_j\xi_j} dm_{n-1}(x_2, ..., x_n) \\
&= i\xi_1 \int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2, ..., x_n) e^{-i\sum_{j=1}^n x_j\xi_j} dm_n(x_1, x_2, ..., x_n) = i\xi_1 \hat{f}(\xi).
\end{aligned}
$$

(ii) Como $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dm_n(x)$. Aplicando la fórmula de derivación bajo el signo integral se obtiene

$$\begin{aligned}(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_k})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \xi_k}(f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle})dm_n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(-ix_k)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dm_n(x) = -i(x_k f)\widehat{\ }(\xi).\end{aligned}$$

∎

El resultado anterior puede verse en mayor generalidad:

Nota 3.2.2 *(i) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es tal que existe $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ a.e. para $1 \leq k \leq n$ y $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces*

$$(\frac{\partial f}{\partial x_k})\widehat{\ }(\xi) = i\xi_k \hat{f}(\xi).$$

(ii) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $|x_k|f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq k \leq n$ entonces existen la derivada parcial k-ésima de $\hat{f}$ y

$$(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_k})(\xi) = -i(x_k f)\widehat{\ }(\xi).$$

3.3 Convolución en $\mathbb{R}^n$

Lema 3.3.1 *Sea $F(x,y) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y sea $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo con det$(D\Phi(x,y)) = 1$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, dado por $u = \phi_1(x,y), v = \phi_2(x,y)$. Entonces $G(x,y) = F(\phi_1(x,y), \phi_2(x,y)) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Además $\|G\|_{L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)} = \|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)}$.*

Proposición 3.3.2 *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dm_n(y)$$

está definido a.e. y es integrable en $\mathbb{R}^n$. Además $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$.

Dem: Usar $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dada por $u = x - y$ y $v = y$, y usar $F(u,v) = f(u)g(v)$ en el lema anterior. Esto permite demostrar que $(x,y) \to f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ es integrable, y por tanto $\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dm_n(y)dm_n(x) < \infty$. Luego $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dm_n(y) < \infty$ a.e. y por tanto tambien $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dm_n(y)$ está definida a.e. El resto es inmediato del teorema de Fubini. ∎

Proposición 3.3.3 *$L^1(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de Banach conmutativa con la convolución.*

DEM: Consecuencia de la proposición anterior. ■

Teorema 3.3.4 *$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$ es un homomorfismo de álgebras.*

DEM: Sólo hay que ver que $(f * g)\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$. En efecto

$$\begin{aligned}
(f * g)\hat{}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f * g(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dm_n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dm_n(y)) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dm_n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\langle y,\xi\rangle} g(x-y) e^{-i\langle x-y,\xi\rangle} dm_n(y) dm_n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\langle y,\xi\rangle} (\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) e^{-i\langle x-y,\xi\rangle} dm_n(x)) dm_n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\langle y,\xi\rangle} \hat{g}(\xi) dm_n(y) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.3.5
(i) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * g$ es uniformemente continua y acotada y además $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$.
(ii) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$.
(iii) Si $f, g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$.

DEM: Como $y \to f(y)g(x-y)$ es medible y $|f(y)g(x-y)| \le \|g\|_\infty |f(y)|$ entonces $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dm_n(y)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Además $|f * g(x)| \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(i) Por otro lado

$$\begin{aligned}
f * g(x) - f * g(x') &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x'-y)) g(y) dm_n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (f_x(-y) - f_{x'}(-y)) g(y) dm_n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (f_x(y) - f_{x'}(y)) g(-y) dm_n(y).
\end{aligned}$$

Así se tiene $|f*g(x)-f*g(x')|\leq \|g\|_\infty\|f_x-f_{x'}\|_1$. Ahora utilizar que la traslación es uniformemente continua en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Suponer primero que $sop(g)\subset B(0,R)$.

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dm_n(y)=\int_{B(0,R)} f(x-y)g(y)dm_n(y).$$

Luego, si $|x|>R$,

$$\begin{aligned}|f*g(x)| &\leq \int_{B(0,R)}|f(x-y)||g(y)|dm_n(y)\\ &\leq \|g\|_\infty\int_{|y|\leq R}|f(x-y)|dm_n(y)\\ &\leq \|g\|_\infty\int_{|y'|\geq|x|-R}|f(y')|dm_n(y')\end{aligned}$$

Por tanto $\lim_{|x|\to\infty}|f*g(x)|=0$.

En el caso general, si $g\in C_0(\mathbb{R}^n)$, dado $\varepsilon>0$ tomar $g_1\in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ con $\|g-g_1\|_\infty<\varepsilon$. Como $f*g(x)=f*(g-g_1)(x)+f*g_1(x)$, se tiene

$$|f*g(x)|\leq\|f*(g-g_1)\|_\infty+|f*g_1(x)|<\varepsilon+|f*g_1(x)|.$$

Ahora se concluye el resultado por el caso anterior.

(iii) Suponer que $sop(f)\subset B(0,R_1)$ y $sop(g)\subset B(0,R_2)$. Veamos que $sop(f*g)\subset B(0,R_1+R_2)$. En efecto, si $|x|>R_1+R_2$ y $|y|\leq R_2$ entonces $|x-y|>R_1$ entonces

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dm_n(y)=\int_{B(0,R_2)} f(x-y)g(y)dm_n(y)=0.$$

∎

Teorema 3.3.6 *Sea $1<p,q<\infty$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Si $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g\in L^q(\mathbb{R}^n)$ entonces $f*g\in C_0(\mathbb{R}^n)$.*

Además $\|f*g\|_\infty\leq\|f\|_p\|g\|_q$.

DEM: Como $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g_x(-y)\in L^q(\mathbb{R}^n)$ entonces por la desigualdad de Hölder $|f(y)g(x-y)|\in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$. Luego $f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dm_n(y)$ está definida para todo $x\in\mathbb{R}^n$. Además $|f*g(x)|\leq\|f\|_p\|g\|_q$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$.

Como antes

$$\begin{aligned} f*g(x)-f*g(x') &= \int_{\mathbb{R}^n}(f(x-y)-f(x'-y))g(y)dm_n(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}(f_x(y)-f_{x'}(-y))g(y)dm_n(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}(f_x(y)-f_{x'}(y))g(-y)dm_n(y). \end{aligned}$$

Así se tiene $|f*g(x)-f*g(x')|\leq \|g\|_q\|f_x-f_{x'}\|_p$. Ahora utilizar que la traslación es uniformemente continua para demostrar que $f*g$ es continua.

El hecho de que $f*g\in C_0(\mathbb{R}^n)$ se sigue de la densidad de $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $L^q(\mathbb{R}^n)$. En efecto, si $(f_n)\in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ converge a f en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $(g_n)\in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ converge a g en $L^q(\mathbb{R}^n)$ entonces $f_n*g_n\in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ y además

$$\|f*g-f_n*g_n\|_\infty\leq \|f-f_n\|_p\|g\|+\|f_n\|_p\|g-g_n\|_q$$

. De aquí se concluye que $f*g=\lim_{n\to\infty} f_n*g_n$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por tanto $f*g\in C_0(\mathbb{R}^n)$. ∎

Nota 3.3.1 *Si $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ no implica que $f*g\in C_0(\mathbb{R}^n)$. Es suficiente observar que para $g=1$ se tiene que $f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$.*

Teorema 3.3.7 *Sea $1\leq p_1,p_2\leq\infty$ con $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\geq 1$. Si $f\in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ y $g\in L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ entonces $f*g\in L^{p_3}(\mathbb{R}^n)$, donde $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-1=\frac{1}{p_3}$.*

Además $\|f*g\|_{p_3}\leq\|f\|_{p_1}\|g\|_{p_2}$.

Dem: La misma prueba que en $\mathbb{T}$. ∎

3.4 Núcleos de sumabilidad en $\mathbb{R}^n$: Poisson y Gauss-Weierstrass

Definición 3.4.1 *(Núcleo de sumabilidad en $\mathbb{R}^n$) Una familia de funciones $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ se dice un núcleo de sumabilidad sobre $\mathbb{R}^n$ si verifican*

(i) $\sup_{\varepsilon>0}\int_{\mathbb{R}^n}|K_\varepsilon(x)|dm_n(x)<\infty$.

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n}K_\varepsilon(x)dm_n(x)=1$ *para todo* $\varepsilon>0$.

(iii) Para todo $\delta>0$ $\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{|x|>\delta}|K_\varepsilon(x)|dm_n(x)=0$.

Existe una manera muy sencilla de generar núcleos de sumabilidad en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 3.4.2 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dm_n(x) = 1$. Definimos $K_\varepsilon(x) = D_\varepsilon f(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f(\frac{x}{\varepsilon})$. Entonces $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es un núcleo de sumabilidad.*

DEM: Las propiedades (i) y (ii) se tienen pues $\|K_\varepsilon\|_1 = \|f\|_1$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x)dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dm_n(x) = 1$$

para todo $\varepsilon > 0$.

La propiedad (iii) es también consecuencia de la integrabilidad, ya que

$$\int_{|x|>\delta} |K_\varepsilon(x)|dm_n(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{|x|>\delta} |f(\frac{x}{\varepsilon})|dm_n(x) = \int_{|y|>\frac{\delta}{\varepsilon}} |f(y)|dm_n(y).$$

Ahora usar que $\lim_{M\to\infty} \int_{|x|>M} |f(x)|dm_n(x) = 0$. ∎

Ejemplo 3.4.1 *(Núcleo de Poisson) Sea $P_t(x) = C_n \frac{t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ donde $t > 0$, y $C_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$.*

Caso $n = 1$, $P_t(x) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+x^2}$.

DEM: Notar que $P_t = D_t P$ donde $P(x) = C_n \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$. Comprobemos que $\int_{\mathbb{R}^n} P(x)dm_n(x) = 1$. Usamos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(|x|)dm_n(x) = nv_n \int_0^\infty r^{n-1}\phi(r)dr,$$

con $v_n = m_n(B(0,1))$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x)dm_n(x) = nv_nC_n \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}}dr.$$

$$\begin{aligned} nv_nC_n \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}}dr &= nv_nC_n \int_0^{\pi/2} \frac{(tag\theta)^{n-1}}{(1+(tag\theta)^2)^{\frac{n+1}{2}}}(1+(tag\theta)^2)d\theta \\ &= nv_nC_n \int_0^{\pi/2} \frac{(tag\theta)^{n-1}(cos\theta)^{n+1}}{(cos\theta)^2}d\theta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= nv_nC_n\int_0^{\pi/2}(sen\theta)^{n-1}d\theta\\
&= nv_nC_n\int_0^{1}(1-t^2)^{\frac{n}{2}-1}dt\\
&= \frac{n}{2}v_nC_n\int_0^{1}(1-s)^{\frac{n}{2}-1}s^{\frac{1}{2}-1}ds\\
&= \frac{n}{2}v_nC_nB(\frac{n}{2},\frac{1}{2})
\end{aligned}
$$

Otro método más rápido de obtener lo mismo es hacer el cambio $s=\frac{1}{1+r^2}$

Ahora recordemos que $B(\frac{n}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$ y que $\Gamma(\frac{1}{2})=\pi^{1/2}$ y $v_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$, de donde se sigue el resultado, para $C_n=\frac{2\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{n\pi^{\frac{n}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$. ∎

Nota 3.4.1 *El cálculo de v_n puede realizarse usando el siguiente argumento: Observar que*

$$(\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx)^n=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\|x\|^2}dx=\pi^{n/2}$$

y ahora recordar que

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\|x\|^2}dx=nv_n\int_0^\infty e^{-r^2}r^{n-1}dr=\frac{n}{2}v_n\int_0^\infty e^{-r}r^{n/2-1}dr=v_n\Gamma(\frac{n}{2}+1).$$

Ejemplo 3.4.2 *(Núcleo de Gauss-Weierstrass) Sea $W_t(x)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ para $t>0$.*

DEM: Notar que $W_t=D_{2\sqrt{t}}W$ donde $W(x)=\pi^{-\frac{n}{2}}e^{-|x|^2}$. Comprobemos que $\int_{\mathbb{R}^n}W(x)dm_n(x)=1$.

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|x|^2}dm_n(x) &= \int_{\mathbb{R}}...\int_{\mathbb{R}}e^{-x_1^2}...e^{-x_n^2}dm_1(x_1)...dm_n(x_n)\\
&= (\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dm_1(x))^n\\
&= (\int_{\mathbb{R}^2}e^{-(x^2+y^2)}dm_2(x,y))^{n/2}\\
&= (\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta)^{n/2}\\
&= (\pi\int_0^\infty e^{-\rho}d\rho)^{n/2}=\pi^{n/2}.
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Ejemplo 3.4.3 *(Núcleo en C_{00}^∞, es decir $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y de soporte compacto)* *Sea* $\phi(x) = A_n e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} \chi_{B(0,1)}(x)$ *donde* $A_n^{-1} = \int_{B(0,1)} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} dm_n(x)$.

Dem: Es fácil probar que $\varphi(t) = e^{-\frac{1}{1-t^2}} \chi_{(-1,1)}(t)$ es una función par acotada y de clase $C^\infty(\mathbb{R})$. En efecto,

$$\varphi'(t) = \frac{-2te^{-\frac{1}{1-t^2}}}{(1-t^2)^2}$$

para $t \in (-1,1)$. Luego φ es continua en $t = 1$ pues

$$\lim_{t \to 1^-} e^{-\frac{1}{1-t^2}} = \lim_{s \to \infty} e^{-s} = 0.$$

Lo mismo ocurre con φ', pues

$$\lim_{t \to 1^-} \frac{e^{-\frac{1}{1-t^2}}}{(1-t^2)^2} = \lim_{s \to \infty} s^2 e^{-s} = 0,$$

y φ' también es continua en $t = 1$. Repitiendo el argumento se prueba que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $\varphi^{(k}(1) = \varphi^{(k}(-1) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ahora llamamos

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t)dt = 2\int_0^1 e^{-\frac{1}{1-t^2}} dt = A^{-1}.$$

y por tanto se tiene que $K_\varepsilon(t) = A\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{t}{\varepsilon})$ es un núcleo de sumabilidad en $\mathbb{R}$

Ahora si consideramos $\phi(x) = \varphi(|x|)$ y teniendo en cuenta que $x \to |x|^2$ es un polinomio se obtiene el resultado eligiendo A_n para que la integral sea 1. $\blacksquare$

Proposición 3.4.3 *Si* $f(x) = e^{-|x|^2}$ *entonces* $\hat{f}(\xi) = \pi^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}}$.

Dem:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} e^{-i\langle x, \xi \rangle} dm_n(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{j=1}^n x_j^2 + i x_j \xi_j} dm_n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{j=1}^n (x_j + \frac{i\xi_j}{2})^2} e^{-\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j^2}{4}} dm_n(x) \\
&= e^{-\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j^2}{4}} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n e^{-(x_j + \frac{i\xi_j}{2})^2} dm_n(x) \\
&= e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} (\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dm_1(x))^n \\
&= \pi^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}}.
\end{aligned}
$$

El último paso se consigue aplicando el teorema de Cauchy a la función e^{z^2} en el recinto conveniente. ■

Lema 3.4.4 *Sea $\beta > 0$. Entonces*

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u} e^{-\frac{\beta^2}{4u}}}{\sqrt{u}} du.$$

Dem: Se sigue de la fórmula (que se obtiene aplicando el teorema de los residuos)

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{cos(\beta x)}{1+x^2} dx$$

junto con $\frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-(1+x^2)u} du$. ■

Proposición 3.4.5 *Si $f(x) = e^{-|x|}$ entonces $\hat{f}(\xi) = \frac{(2\pi)^n C_n}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$, siendo $C_n = \pi^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2})$.*

Dem: Aplicando el lema anterior

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|} e^{-i\langle x,\xi\rangle} dm_n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u} e^{-\frac{|x|^2}{4u}}}{\sqrt{u}} du) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dm_n(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4u}} e^{-i\langle x,\xi\rangle} dm_n(x)) \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \Big(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} e^{i\langle \xi, 2\sqrt{u}y\rangle}(2\sqrt{u})^n dm_n(y)\Big)\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du \\
&= (\sqrt{\pi})^{n-1}\int_0^\infty e^{-u|\xi|^2}2^n(\sqrt{u})^{n-1}e^{-u}du \\
&= 2^n(\sqrt{\pi})^{n-1}\int_0^\infty e^{-u(|\xi|^2+1)}u^{\frac{n-1}{2}}du \\
&= \frac{2^n(\sqrt{\pi})^{n-1}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^\infty e^{-v}v^{\frac{n-1}{2}}du \\
&= \frac{2^n(\sqrt{\pi})^{n-1}\Gamma(\frac{n+1}{2})}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(2\pi)^n C_n}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Definición 3.4.6 *Sea $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ se dice que g es integrable en sentido Abel si existe*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-\varepsilon|x|}dx = (A)\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dm_n(x).$$

Definición 3.4.7 *Sea $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ se dice que g es integrable en sentido Gauss-Weierstrass si existe*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-\varepsilon|x|^2}dx = (G)\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dm_n(x).$$

Proposición 3.4.8 *Si $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\cap L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces g es integrable en sentido Abel y en sentido Gauss-Wierstrass. Además*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dm_n(x) = (A)\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dm_n(x) = (G)\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dm_n(x).$$

DEM: Es consecuencia directa del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. ∎

3.5 Aproximación en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$

Veamos los teoremas de aproximación de las convoluciones.

Teorema 3.5.1 *Sea (K_ε) un núcleo de sumabilidad y sea $1 \le p < \infty$.*
(i) Si $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ entonces $\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon * f = f$ in $C_0(\mathbb{R}^n)$.
(ii) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces $\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon * f = f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

DEM: (i) Escribamos

$$f(x)-K_\varepsilon*f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}(f(x)-f(x-y))K_\varepsilon(y)dm_n(y)=\int_{\mathbb{R}^n}(f(x)-f_{-y}(x))K_\varepsilon(y)dm_n(y).$$

Por tanto

$$\|f-K_\varepsilon*f\|_\infty\le\int_{\mathbb{R}^n}\|f-f_y\|_\infty|K_\varepsilon(y)|dm_n(y).$$

Ahora para $\delta>0$ se tiene

$$\begin{aligned}\|f-K_\varepsilon*f\|_\infty &\le \int_{|y|\le\delta}\|f-f_y\|_\infty|K_\varepsilon(y)|dm_n(y)+\int_{|y|>\delta}\|f-f_y\|_\infty|K_\varepsilon(y)|dm_n(y)\\ &\le \sup_{|y|\le\delta}\|f-f_y\|_\infty\sup_{\varepsilon>0}\|K_\varepsilon\|_1+2\|f\|_\infty\int_{|y|>\delta}|K_\varepsilon(y)|dm_n(y)\end{aligned}$$

Usando la continuidad del operador traslación y la propiedad de los núcleos se concluye el resultado.

(ii) Puede repetirse la demostración de $\mathbb{T}$, pero damos una prueba para $1<p<\infty$ usando (i) y la densidad de $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$, junto con el teorema de Young.

Dado $\nu>0$ existe $g\in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ con $sop(g)=K$ y tal que $\|f-g\|_p<\nu$. Ahora

$$\begin{aligned}\|f-K_\varepsilon*f\|_p &\le \|f-g\|_p+\|g-K_\varepsilon*g\|_p+\|K_\varepsilon(g-f)\|_p\\ &\le \|f-g\|_p+\|g-K_\varepsilon*g\|_p+\|K_\varepsilon\|_1\|g-f\|_p\\ &\le (1+\sup_{\varepsilon>0}\|K_\varepsilon\|_1)\|g-f\|_p+\|g-K_\varepsilon*g\|_p\\ &\le (1+\sup_{\varepsilon>0}\|K_\varepsilon\|_1)\nu+\|g-K_\varepsilon*g\|_p.\end{aligned}$$

Ahora usemos que

$$\begin{aligned}\|g-K_\varepsilon*g\|_p &= (\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)-K_\varepsilon*g(x)|^p dm_n(x))^{1/p}\\ &\le \|g-K_\varepsilon*g\|_\infty^{1/p'}(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)-K_\varepsilon*g(x)|dm_n(x))^{1/p}\\ &\le \|g-K_\varepsilon*g\|_\infty^{1/p'}(2\|g\|_1)^{1/p}.\end{aligned}$$

Por tanto $\lim_{\varepsilon\to0}\|f-K_\varepsilon*f\|_p\le(1+\sup_{\varepsilon>0}\|K_\varepsilon\|_1)\nu$, lo que permite concluir $\lim_{\varepsilon\to0}\|f-K_\varepsilon*f\|_p=0$. ■

Proposición 3.5.2 *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)g(y)dm_n(y).$$

Dem:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dm_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-i\langle x,y\rangle}dm_n(y))dm_n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x,y\rangle}dm_n(x))dm_n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\hat{f}(y)dm_n(y)
\end{aligned}$$

■

Proposición 3.5.3 *(Fórmula de inversión) Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}dm_n(\xi) \qquad a.e.$$

Dem: Supongamos que además $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Tengamos en cuenta que la transformada de Fourier de $e^{-t|x|^2}$ es $\pi^{n/2}t^{-n/2}e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} = (2\pi)^n W_t(\xi)$. Aplicamos la proposición anterior y obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)e^{-t|x|^2}dm_n(x) = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(y)W_t(y)dm_n(y) = (2\pi)^n W_t * f(0).$$

Ahora pasamos al limite cuando $t \to 0$ y usamos el teorema anterior para conseguir $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)dm_n(x) = (2\pi)^n f(0)$. Aplicando el paso previo a $\tau_x f$ se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)e^{i\langle x,y\rangle}dm_n(y) = (2\pi)^n f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Para hacer el caso general, sea $f_m \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - f_m\|_1$ converge a cero. Tenemos

$$f_m(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_m(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}dm_n(\xi).$$

Teniendo en cuenta que para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_m(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} dm_n(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} dm_n(\xi)$$

y que existe una subsucesión m_k tal que $\lim_{k\to\infty} f_{m_k} = f$ a.e. se obtiene el resultado. ■

Corolario 3.5.4 *Si* $P(x) = \frac{C_n}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}}$ *entonces* $\hat{P}(\xi) = (2\pi)^{-n} e^{-|\xi|}$

Nota 3.5.1 *El valor de la constante* C_n *puede darse usando*

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x) = 1 = n v_n \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{(n+1)/2}} dr$$

y calculando el valor de la integral por métodos de una variable.

Corolario 3.5.5 *Sean* $f, g, \hat{f}, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$*. Entonces*

$$(2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(-x) dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) dm_n(\xi).$$

Dem: Aplicar la fórmula de inversión a $f * g$.

$$(2\pi)^n f * g(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) dm_n(\xi).$$

■

Corolario 3.5.6 *Si* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *con* $\hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi)$ *para todo* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *entonces* $f = g$ *a.e.*

Dem: Aplicar la fórmula de inversión a $f - g$. ■

Proposición 3.5.7 *(i)* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *es un álgebra sin unidad pero con unidad aproximada acotada.*

(ii) $\mathcal{F}$ *es un homomorfismo de álgebras inyectivo.*

DEM: (i) Supongamos que existiera $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $f * g = g$ para toda $g \in L^1(\mathbb{R})$. Luego $\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = \hat{g}(\xi)$ para toda $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Tomar $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dm_n(x) = \hat{g}(0) = 1$. Ahora aplicar el resultado para $M_\xi g$, y se obtiene $\hat{M}_\xi g(\xi) = 1$ luego $\hat{f}(\xi) = 1$ para todo ξ, y por tanto $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

Cualquier núcleo de sumabilidad proporciona una unidad aproximada acotada, $(K_{1/k})_{k\in\mathbb{N}}$.

(ii) Se sigue del Corolario 3.5.6 ∎

Corolario 3.5.8 *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ entonces*

$$(2\pi)^n f(x) = (A)\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle}dm_n(\xi) = (G)\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle}dm_n(\xi).$$

DEM: Observar que $\hat{f}(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle}$ es integrable en sentido Abel y Gauss-Weierstrass a $(2\pi)^n f$, puesto que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle}e^{-t|\xi|}dm_n(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_x(\xi)e^{-t|\xi|}dm_n(\xi) = (2\pi)^n f_x * P_t(0)\\ &= (2\pi)^n f * P_t(x)\end{aligned}$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_x(\xi)e^{-t|\xi|^2}dm_n(\xi) = (2\pi)^n f_x * W_t(0) = (2\pi)^n f * W_t(x).$$

Usar ahora los resultados de aproximación. ∎

Definición 3.5.9 *Definimos*

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = 0\},$$

$$C_{00}^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), sop(f) \text{ compacto } \}.$$

Lema 3.5.10 *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

(i) $sop(f * g) \subset \overline{sop(f) + sop(g)}$.

(ii) si $sop(f)$ ó $sop(g)$ es compacto entonces $sop(f * g) \subset sop(f) + sop(g)$.

(iii) $f, g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$.

DEM: (i) Es suficiente ver que $\{x : f * g(x) \neq 0\} \subset sop(f) + sop(g)$. Téngase en cuenta que

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dm_n(y) = \int_{sop(f)\cap(x-sop(g))} f(y)g(x-y)dm_n(y).$$

Por tanto, si $x \notin sop(f) + sop(g)$ entonces $sop(f) \cap (x - sop(g)) = \varnothing$ y $f * g(x) = 0$.

(ii) Recordar que si C es cerrado y K es compacto entonces $C + K$ es cerrado.

(iii) Inmediato. ■

Lema 3.5.11 *Si $f \in \cup_{p\geq 1} L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in C_{00}^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

DEM: Existe $p_0 \geq 1$ tal que $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$. En el caso $p_0 = 1$, usando que $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ se tiene el resultado. En el caso $p_0 > 1$, como $g \in L^{q_0}(\mathbb{R}^n)$ con $1/p_0 + 1/q_0 = 1$ entonces $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ por el resultado probado con anterioridad.

Por otro lado $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dm_n(y)$, y para aplicar los resultados de derivación bajo el signo integral en el punto x_0 necesitamos que

(i) exista $\frac{\partial g}{\partial x_k}$ en un entorno de $|x - x_0| < r$,

(ii) $|f(y)\frac{\partial g}{\partial x_k}(x-y)| \leq h(y)$ siempre que $|x - x_0| < r$, para cierta $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Supongamos que $sop(g) \subset B(0, R)$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ tomemos x tal que $|x - x_0| < r$.

Si $|y| > R + |x_0| + r$ entonces

$$|x - y| \geq |y| - |x| > R + |x_0| + r - |x| > R$$

y por tanto $g(x - y) = 0$ y $\frac{\partial g}{\partial x_k}(x - y) = 0$.

Para $|y| \leq R + |x_0| + r$ se tiene, para $R_0 = 2r + R + |x_0|$

$$|f(y)\frac{\partial g}{\partial x_k}(x-y)| \leq |f(y)| \max_{|z|\leq R_0} |\frac{\partial g}{\partial x_k}(z)|$$

Definiendo $h(y) = |f(y)| \max_{|z|\leq R} |\frac{\partial g}{\partial x_k}(z)|\chi_{B(0,R+|x_0|+r)}(y)$ se tiene que $|f(y)\frac{\partial g}{\partial x_k}(x-y)| \leq h(y)$ siempre que $|x - x_0| < r$, $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ por ser de soporte compacto y $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$.

Se concluye que existe $\frac{\partial f*g}{\partial x_k}(x_0)$ para todo x_0. Además, derivando bajo el signo integral,

$$\frac{\partial f*g}{\partial x_k}(x_0) = f * \frac{\partial g}{\partial x_k}(x_0).$$

Repitiendo el argumento para las derivadas de orden superior se completa la demostración. ∎

Teorema 3.5.12 *Sea $1 \le p < \infty$. $C_{00}^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $C_0(\mathbb{R}^n)$.*

DEM: Sea $\eta > 0$. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ existe $g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f-g\|_p < \eta$. Sea K_ε un núcleo de sumabilidad en $C_{00}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Se tiene que $\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon * g = g$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y por tanto existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\|g - K_\varepsilon * g\|_p < \eta$ para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Observar que por los lemas anteriores $K_\varepsilon * g \in C_{00}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y verifica que

$$\|f - K_\varepsilon * g\|_p \le \eta + \|g - K_\varepsilon * g\|_p < 2\eta.$$

La misma demostración vale para $C_0(\mathbb{R}^n)$. ∎

Ahora vamos a considerar la noción de partición de la unidad. El objetivo es poder escribir $1 = \sum_{j=1}^\infty \phi_j(x)$ donde $\phi_j \in C_{00}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Veamos primero una extensión del Lema de Uryshon.

Lema 3.5.13 *Sea K compacto, V abierto, $K \subset V$. Existe $\phi \in C_{00}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que sop$(\phi) \subset V$, $0 \le \phi \le 1$ y $\phi(x) = 1$ para $x \in K$.*

DEM: Paso 1: Dados $K_1 \subset V_1$, K_1 compacto, V_1 abierto existe $\phi_1 \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ tal que *sop*$(\phi_1) \in V_1$, $0 \le \phi_1 \le 1$ y $\phi_1(x) = 1$ para $x \in K_1$.

Basta definir

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{d(x,K_1)}{d(x,K_1) + d(x, \mathbb{R}^n \setminus V_1)}.$$

Las propiedades son de comprobación elemental.

Paso 2: Observar que puede suponerse que V es acotado (pues $K \subset \cup_{k=1}^\infty V \cap B(0,k)$).

Sean K_1 compacto, V_1 abierto tales que

$$K \subset int(K_1) \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset V.$$

Podemos considerar $0 < d_1 < d_1' < d$ donde $d = d(K, \mathbb{R}^n \setminus V) > 0$ y tomar

$$K_1 = \{x \in V : d(x,K) \le d_1\}, V_1 = \{x \in V : d(x,K) < d_1'\}.$$

Ahora usando el paso anterior existe $\phi_1 \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ tal que $sop(\phi_1) \in V_1$, $0 \leq \phi_1 \leq 1$ y $\phi_1(x) = 1$ para $x \in K_1$.

Sea K_ε un núcleo de sumabilidad de $C_{00}^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $K_\varepsilon \geq 0$ y $sop(K_\varepsilon) \subset B(0,\varepsilon)$. Consideremos $\phi_1 * K_\varepsilon$ para ε suficientemente pequeo.

En primer lugar es claro que $\phi_1 * K_\varepsilon \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$.

Sabemos que

$$sop(\phi_1 * K_\varepsilon) \subset sop(\phi_1) + B(0,\varepsilon) \subset V_1 + B(0,\varepsilon)$$

luego existe ε_0 tal que $V_1 + B(0,\varepsilon) \subset \{x : d(x, V_1) < d_1' + \varepsilon\} \subset V$ para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Por otro lado

$$0 \leq \phi_1 * K_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_1(x-y)K_\varepsilon(y)dm_n(y) \leq \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y)dm_n(y) = 1.$$

Existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que si $x \in K$ e $|y| < \varepsilon_1$ entonces $x - y \in K_1$ luego $\phi_1(x-y) = 1$ para $|y| < \varepsilon$ si $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Por consiguiente

$$\phi_1 * K_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_1(x-y)K_\varepsilon(y)dm_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y)dm_n(y) = 1.$$

Tomando entonces $\phi = \phi_1 * K_\delta$ para $\delta = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ se completa la demostración. ∎

Teorema 3.5.14 *Sea K compacto, Ω_j abiertos tales que $K \subset \cup_{j=1}^m \Omega_j$. Entonces existen $\phi_j \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ tal que $sop(\phi_j) \in \Omega_j$, $0 \leq \phi_j \leq 1$ y $\sum_{j=1}^m \phi_j(x) = 1$ para $x \in K$.*

DEM: Paso 1: Existen compactos K_j tales que $K_j \subset \Omega_j$ y $K \subset \cup_{j=1}^m K_j$.

En efecto, para cada $x \in K$ se tiene $x \in \Omega_{j(x)}$ y por tanto en una bola $\overline{B(x, r_x)} \subset \Omega_{j(x)}$.

Como $K \subset \cup_{x \in K} B(x, r_x)$ se puede extraer una subfamilia finita $K \subset \cup_{i=1}^p B(x_i, r_{x_i})$. Denotamos $F_j = \{i : B(x_i, r_{x_i}) \subset \Omega_j\} = \{i : j(x_i) = j\}$ y definimos $K_j = \cup_{i \in F_j} \overline{B}(x_i, r_{x_i})$. Es un compacto y $K_j \subset \Omega_j$.

Paso 2: Usando el Lema 3.5.13 para $K_j \subset \Omega_j$ se tiene que existe $\phi_j \in C_{00}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $sop(\phi_j) \in \Omega_j$, $0 \leq \phi_j \leq 1$ y $\phi_j(x) = 1$ para $x \in K_j$.

Definimos

$$\varphi_1(x) = \phi_1(x),$$

$$\varphi_2(x) = \phi_2(x)(1 - \phi_1(x)),$$

$$\cdots$$

$$\varphi_m(x) = \phi_k(x) \prod_{i=1}^{m-1} (1 - \phi_i(x)).$$

Es claro que $\varphi_j \in C_{00}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ por ser producto de funciones de ese tipo, $0 \le \varphi_j \le 1$ y $sop(\varphi_j) \subset sop(\phi_j) \in \Omega_j$.

Comprobemos que si $x \in K$ entonces $\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) = 1$. Veamos por inducción que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) = 1 - \prod_{j=1}^{m} (1 - \phi_j(x)).$$

En efecto, $\varphi_1(x) = 1 - (1 - \phi_1(x))$. Supuesto para k, veamoslo para $k+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k+1} \varphi_j(x) &= \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x) + \varphi_{k+1}(x) \\
&= 1 - \prod_{j=1}^{k} (1 - \phi_j(x)) + \varphi_{k+1}(x) \\
&= 1 - \prod_{j=1}^{k} (1 - \phi_j(x)) + \phi_{k+1}(x) \prod_{j=1}^{k} (1 - \phi_j(x)) \\
&= 1 - (1 - \phi_{k+1}(x)) \prod_{j=1}^{k} (1 - \phi_j(x)) \\
&= 1 - \prod_{j=1}^{k+1} (1 - \phi_j(x))
\end{aligned}$$

Ahora para $x \in K$ se tiene $x \in K_j$ para algún j, y por tanto $\phi_j(x) = 1$. De ahí se deduce que $\prod_{j=1}^{m} (1 - \phi_j(x)) = 0$ y $\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) = 1$. ∎

Chapter 4

Algunos teoremas clave

4.1 Teorema de Plancherel en $\mathbb{R}$

Recordemos que $\mathcal{F}$ transforma $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $C_0(\mathbb{R}^n)$ de manera inyectiva. Veremos que para funciones de $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ puede decirse algo más.

Veamos los espacios que análogos a $A(\mathbb{T})$ y $\Pi(\mathbb{T})$.

Definición 4.1.1 *Denotamos*

$$\Pi(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \hat{f} \in C_{00}(\mathbb{R}^n)\},$$
$$A(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$$

y definimos la norma $\|f\|_{A(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{f}\|_1$.

Por supuesto $\Pi(\mathbb{R}^n) \subset A(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 4.1.2
(i) $A(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$. *Además* $\|f\|_\infty \leq (2\pi)^{-n}\|f\|_{A(\mathbb{R}^n)}$ *para* $f \in A(\mathbb{R}^n)$.
(ii) $\Pi(\mathbb{R}^n)$ *y* $A(\mathbb{R}^n)$ *son ideales de* $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Dem: (i) Recordar que si $f \in A(\mathbb{R}^n)$ entonces $(2\pi)^n f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} dm_n(\xi)$. De donde se sigue que $(2\pi)^n f(x) = (\hat{f})\hat{}(-x)$ y por tanto en $C_0(\mathbb{R}^n)$. Además $\|f\|_\infty \leq (2\pi)^{-n}\|f\|_{A(\mathbb{R}^n)}$.

(ii) Usar que $(f*g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$. Por tanto si $\hat{f} \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ o $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ también $(f*g)\hat{} \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ o $(f*g)\hat{} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

■

Proposición 4.1.3 *(Núcleo de Fèjer en $\mathbb{R}$) Sea* $K(x) = \frac{1}{2\pi}(\frac{sen(x/2)}{x/2})^2$, $x \in \mathbb{R}$ *y* $x \neq 0$. *Entonces*

(i) $\widehat{K}(\xi) = (1-|\xi|)\chi_{[-1,1]}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$.

(ii) $\int_{\mathbb{R}} K(x)dm_1(x) = 1$.

DEM:

(i) Es sufiente probar que $K(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(1-|\xi|)\chi_{[-1,1]}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$. Sea $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-|\xi|)e^{ix\xi}d\xi &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}e^{ix\xi}d\xi - \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}|\xi|e^{ix\xi}d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}cos(x\xi)d\xi - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\xi cos(x\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{sen(x\xi)}{x}\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{\pi}\frac{\xi sen(x\xi)}{x}\Big|_{0}^{1} - \frac{1}{x\pi}\int_{0}^{1}sen(x\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{x^2\pi}cos(x\xi)\Big|_{0}^{1} \\ &= \frac{1-cosx}{x^2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}(\frac{sen(x/2)}{x/2})^2 \end{aligned}$$

(ii) se obtiene (i) de manera directa, pues $\int_{\mathbb{R}} K(x)dx = \hat{K}(0)$. ∎

Nota 4.1.1 *Una prueba directa de que* $\int_{\mathbb{R}} K(x)dx = 1$.

Es claro que $K \in L^1(\mathbb{R})$ *(pues* K *es continua en* $|x| \leq 1$ *y acotada por* $\frac{C}{|x|^2}$ *en* $|x| \geq 1$*). Por tanto* $\int_{\mathbb{R}} K(x)dx = A$.

Recordemos que el núcleo de Fèjer de $\mathbb{T}$ *es* $K_n(t) = \frac{1}{n+1}(\frac{sen((n+1)x/2)}{sen(x/2)})^2$ *y se cumple*

$$2\pi = \int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)dt = 2\int_{0}^{(n+1)\pi}\frac{sen^2(x/2)}{(n+1)^2sen^2(\frac{x}{2(n+1)})}dx.$$

Tenemos, entonces

$$\begin{aligned} \int_{0}^{(n+1)\pi}\frac{sen^2(x/2)}{(x/2)^2}dx &= \int_{0}^{(n+1)\pi}\frac{sen^2(\frac{x}{2(n+1)})}{\frac{x^2}{4(n+1)^2}}\frac{sen^2(x/2)}{(n+1)^2sen^2(\frac{x}{2(n+1)})}dx \\ &\leq \int_{0}^{(n+1)\pi}\frac{sen^2(x/2)}{(n+1)^2sen^2(\frac{x}{2(n+1)})}dx = \pi. \end{aligned}$$

Por tanto $A = \int_{\mathbb{R}} K(x)dx = 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{(n+1)\pi} \frac{sen^2(x/2)}{(x/2)^2}dx \leq 1$.

Como que $K_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}K(\frac{x}{\varepsilon})$ *y para* $\delta > 0$ *se tiene*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|<\delta} K_\varepsilon(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|<\delta\varepsilon} K(x)dx = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} K(x) = A.$$

Por tanto, usando $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, *y que* $\frac{sen(x)}{x}$ *es monótona decreciente en* $(0, \frac{\pi}{2})$ *obtenemos*

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{sen^2((n+1)x/2)}{(n+1)(x/2)^2}\frac{dx}{2\pi} \\ &\geq \frac{sen^2(\delta/2)}{(\delta/2)^2}\lim_{n\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{sen^2((n+1)x/2)}{(n+1)sen^2(x/2)}\frac{dx}{2\pi} \\ &\geq \frac{sen^2(\delta/2)}{(\delta/2)^2} \end{aligned}$$

donde hemos usado que el núcleo de Fèjer de $\mathbb{T}$ *es un núcleo de sumabilidad en el último paso. Finalmente pasado al límite cuando* δ *tiende a* 0 *se obtiene* $A = 1$. ∎

Corolario 4.1.4 *Sea* $1 \leq p < \infty$. $\Pi(\mathbb{R}^n)$ *es denso en* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *y en* $C_0(\mathbb{R}^n)$.

DEM: Consideremos $K(x_1, .., x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n}\prod_{i=1}^n (\frac{sen(x_i/2)}{x_i/2})^2$. Es inmediato comprobar que $K \in \Pi(\mathbb{R}^n)$. Entonces si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ o $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $K_\varepsilon * f \in \Pi(\mathbb{R}^n)$ y converge a f en $L^p(\mathbb{R}^n)$ o $C_0(\mathbb{R}^n)$ respectivamente. ∎

Corolario 4.1.5

(i) Si $1 \leq p < \infty$ *y* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ *entonces*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}(1 - \frac{|\xi|}{\lambda})\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi = f(\text{ en } L^p(\mathbb{R})).$$

(ii) Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$ *entonces*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}(1 - \frac{|\xi|}{\lambda})\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi = f(x)$$

uniformemente en $x \in \mathbb{R}$.

Nota 4.1.2 *Para $n \geq 2$ el resultado anterior también es válido, es decir, tenemos*

(i) Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|\xi|<\lambda} (1 - \frac{|\xi|}{\lambda}) \hat{f}(\xi) e^{i<\xi,x>} d\xi = f(\text{ en } L^p(\mathbb{R}^n)).$$

(ii) Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$ entonces

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|\xi|<\lambda} (1 - \frac{|\xi|}{\lambda}) \hat{f}(\xi) e^{i<\xi,x>} d\xi = f(x)$$

uniformemente en $x \in \mathbb{R}^n$.

Hay que observar que el producto de núcleos de Fèjer no lleva a ese resultado, pero basta considerar el núcleo K tal que $\hat{K}(\xi) = (1 - |\xi|)\chi_{\{|\xi|\leq 1\}}$ y repetir el proceso.

Vamos a intentar extender la transformada de Fourier a funciones de $L^2(\mathbb{R})$. Necesitaremos pasar por subespacios densos.

Teorema 4.1.6 *Sea $f \in C_{00}(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx.$$

DEM: Paso 1: Suponer $sop(f) \subset (-\pi, \pi)$. Denotemos $\tilde{f}$ la periodificación de f. Usando, para $n \in \mathbb{Z}$, que $\widehat{\tilde{f}}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) e^{-int} \frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixn} dx = \frac{\mathcal{F}(f)(n)}{2\pi}$ y el Teorema de Plancherel de $\mathbb{T}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\tilde{f}}(n)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi}.$$

Apliquemos este proceso a las funciones $M_{-\alpha} f(x) = e^{-i\alpha x} f(x)$. Es sabido que $\mathcal{F}(M_{-\alpha} f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi + \alpha)$. Luego para $0 < \alpha < 1$,

$$\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\mathcal{F}(f)(n + \alpha)|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi}.$$

Integrando en $\alpha \in (0,1)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 |\mathcal{F}(f)(n+\alpha)|^2 d\alpha \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

Paso 2: Soporte compacto cualquiera. Suponer $sop(f) \subset (-M, M)$. Tomar $F_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} f(\frac{x}{t})$ cuyo soporte está en $(-tM, tM)$. Tomar $0 < t < \frac{\pi}{M}$ y aplicar el caso anterior, obteniendo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dm_1(x) &= \int_{\mathbb{R}} |F_t(x)|^2 dm_1(x) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(F_t)(\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} t|\mathcal{F}(f)(t\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

■

Teorema 4.1.7 *Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ entonces $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Además $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$.*

DEM: Dada $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Tomar $f_k = f\chi_{[-k,k]} * K_{\varepsilon_k}$ siendo K_ε un núcleo de sumabilidad en $C_{00}(\mathbb{R})$. Luego, si $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
\|f - f\chi_{[-k,k]} * K_{\varepsilon_k}\|_i &\leq \|(f - f\chi_{[-k,k]}) * K_{\varepsilon_k}\|_i + \|f - f * K_{\varepsilon_k}\|_i \\
&\leq \|f - f\chi_{[-k,k]}\|_i \|K_{\varepsilon_k}\|_1 + \|f - f * K_{\varepsilon_k}\|_i.
\end{aligned}$$

Luego existe $f_n \in C_{00}(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 + \|f - f_n\|_2 = 0$. Ahora, por el teorema anterior,

$$\frac{1}{2\pi}\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2^2 = \|f_n - f_m\|^2,$$

luego existe $g \in L^2(\mathbb{R})$ con $\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n = g$ in $L^2(\mathbb{R})$. Por tanto $\|g\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|\hat{f}_n\|_2$.

Además $\|f\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2$. De donde se deduce que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|g\|_2 = \|f\|_2$.

Finalmente observar que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $L^1(\mathbb{R})$ y por tanto $\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(\xi) = \hat{f}(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$. De donde se deduce que $g = \hat{f}$ a.e. y se concluye que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. ∎

Teorema 4.1.8 *(Teorema de Plancherel) Existe una extensión $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ que es una biyección continua con $\|\mathcal{F}\| = \sqrt{2\pi}$ que verifica $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ para $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.*

Dem: Usando la densidad de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ se puede extender el operador conservando la norma.

Veamos que es suprayectivo. Dada $g \in L^2(\mathbb{R})$ existe $g_n \in \Pi(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|g - g_n\|_2 = 0$.

Sea entonces $f_n(x) = \hat{g}_n(-x)$. Usando que $\|f_n - f_m\|_2 = \sqrt{2\pi}\|g_n - g_m\|_2$ se concluye que existe $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\lim f_n = f$ in $L^2(\mathbb{R})$. Como es obvio que $\mathcal{F}(f_n) = 2\pi g_n$ entonces, por unicidad de la extensión $\mathcal{F}(f) = 2\pi g$. ∎

4.2 Teoremas de Paley-Wiener

El objetivo es estudiar la relación entre la propiedades de analiticidad y el crecimiento de una función en $\mathbb{R}$ y el crecimiento de su transformada de Fourier. Considerando $\mathbb{R}$ como el eje del plano complejo, es claro que una función es analítica en $\mathbb{R}$ si y sólo si es la restricción a $\mathbb{R}$ de una función F holomorfa en cierto dominio que contenga $\mathbb{R}$. En general dicho dominio no tiene por que contener una banda $\Omega_a = \{z \in \mathbb{C} : |Im(z)| < a\}$ para $a > 0$.

Lema 4.2.1 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que existe $a > 0$ con $|\hat{f}(y)| \leq Ce^{-a|y|}$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi z} d\xi \in \mathcal{H}(\Omega_a).$$

Además F es acotada en Ω_{a_1} para $a_1 < a$ y $F|_{\mathbb{R}} = f$.

DEM: Nótese que si $z \in \Omega_a$ entonces

$$|\hat{f}(\xi)e^{i\xi z}| = |\hat{f}(\xi)|e^{-\xi Im(z)} \leq Ce^{-a|\xi|-\xi Im(z)} \leq Ce^{-|\xi|(a-|Im(z)|)}.$$

Luego $\hat{f}(\xi)e^{i\xi z}$ es continua e integrable y $F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{i\xi z}d\xi$ está bien definida.

Veamos que es holomorfa en Ω_a. Sea $(z_n), z \in \Omega_a$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Probemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(z_n) - F(z)}{z_n - z} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} i\xi \hat{f}(\xi)e^{i\xi z}d\xi.$$

En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)(\frac{e^{i\xi z_n} - e^{i\xi z}}{z_n - z} - i\xi e^{i\xi z})d\xi = 0.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \hat{f}(\xi)(\frac{e^{i\xi z_n} - e^{i\xi z}}{z_n - z} - i\xi e^{i\xi z}) = 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y además

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)(\frac{e^{i\xi z_n} - e^{i\xi z}}{z_n - z} - i\xi e^{i\xi z})| &\leq |\hat{f}(\xi)|(\sup_{z'\in[z_n,z]} |\xi e^{i\xi z'}| + |\xi e^{i\xi z}|) \\
&\leq 2C|\xi| \sup_{z'\in[z_n,z]} e^{-|\xi|(a-|Im(z')|)} \\
&\leq 2C|\xi|e^{-|\xi|\delta},
\end{aligned}$$

para $0 < \delta < a$, donde $|Im(z')| < a - \delta$ para todo $z' \in [z_n, z]$ y $n \in \mathbb{N}$.

Usando el teorema de la convergencia dominada se obtiene la derivabilidad de la función en z.

Para la acotación es suficiente usar que si $z \in \Omega_{a_1}$

$$|F(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)e^{i\xi z}|d\xi \leq \frac{C}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-|\xi|(a-a_1)}d\xi.$$

∎

Lema 4.2.2 *Sea $a > 0$ y $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $e^{a|\xi|}\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{i\xi z}d\xi \in \mathcal{H}(\Omega_a).$$

Se tiene $F|_{\mathbb{R}} = f$ a.e. y $\hat{F}_y(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-y\xi}$ donde $Fy(x) = F(x+iy)$.

Dem: Nótese que si $z \in \Omega_a$ entonces

$$|\hat{f}(\xi)e^{i\xi z}| = e^{-a|\xi|}|e^{a|\xi|}\hat{f}(\xi)|e^{-\xi Im(z)} \leq |e^{a|\xi|}\hat{f}(\xi)|e^{-|\xi|(a-|Im(z)|)}.$$

Luego, usando Cauchy-Schwarz, $\hat{f}(\xi)e^{i\xi z}$ es integrable y $F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{i\xi z}d\xi$ está bien definida.

Veamos que es holomorfa en Ω_a. Sea $(z_n), z \in \Omega_a$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Probemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(z_n) - F(z)}{z_n - z} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} i\xi\hat{f}(\xi)e^{i\xi z}d\xi.$$

Es el mismo argumento que en el lema anterior, reemplazando la estimación final como sigue:

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)(\frac{e^{i\xi z_n} - e^{i\xi z}}{z_n - z} - i\xi e^{i\xi z})| &\leq |\hat{f}(\xi)|(\sup_{z'\in[z_n,z]} |\xi e^{i\xi z'}| + |\xi e^{i\xi z}|) \\ &\leq 2|\xi||e^{a|\xi|}\hat{f}(\xi)| \sup_{z'\in[z_n,z]} e^{-|\xi|(a-|Im(z')|)} \\ &\leq 2e^{a|\xi|}|\hat{f}(\xi)||\xi|e^{-|\xi|\delta}, \end{aligned}$$

para $0 < \delta < a$, donde $|Im(z')| < a - \delta$ para todo $z' \in [z_n, z]$ y $n \in \mathbb{N}$.

Usando, que $|\xi|e^{-|\xi|\delta} \in L^2(\mathbb{R})$ y Cauchy-Schwarz de nuevo, se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada.

Observar que la hipótesis garantiza que $\hat{f}(\xi)e^{-\xi y} \in L^1(\mathbb{R})$ para $|y| < a$. Luego

$$F_y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{-\xi y}e^{i\xi x}d\xi \in C_0(\mathbb{R})$$

para cada $|y| < a$. En particular, debido a la fórmula de inversión se tiene $F_0(x) = f(x) a.e.$ y también que $\hat{F}_y(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-y\xi}$ donde $Fy(x) = F(x + iy)$.

■

Teorema 4.2.3 *(Paley-Wiener) Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y sea $a > 0$. Son equivalentes:*

(i) f es la restricción a $\mathbb{R}$ de una función $F \in \mathcal{H}(\Omega_a)$ tal que

$$\sup_{|y|<a} \int_{\mathbb{R}} |F(x + iy)|^2 dx < \infty.$$

(ii) $e^{a|\xi|}\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$.

DEM:

(ii)$\Longrightarrow$ (i) Usando el Lema 4.2.2 se tiene que $F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{i\xi z}d\xi$ es la función que buscamos. Además, usando el Teorema de Plancherel

$$\sup_{|y|<a}\int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2e^{2\xi y}d\xi = \|\hat{f}e^{a|\xi|}\|_2^2.$$

(i)$\Longrightarrow$ (ii) Sea $F_y(x) = F(x+iy)$. Veamos que $\hat{F}_y(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-y\xi}$ para todo $|y| < a$.

Considerar $z \in \Omega_a$, entonces

$$G_\lambda(z) = \int_{\mathbb{R}} F(z-u)K_\lambda(u)du$$

donde K_λ es el núcleo de Fèjer en $\mathbb{R}$.

Observar $G_\lambda \in \mathcal{H}(\Omega_a)$, puesto que si $F = U + iV$ tenemos $Re(G_\lambda)(z) = \int_{\mathbb{R}} U(z-u)K_\lambda(u)du$ e $Im(G_\lambda)(z) = \int_{\mathbb{R}} V(z-u)K_\lambda(u)du$ verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann (debido a la derivación bajo el signo integral).

Obsérvese que $G_\lambda(x) = f * K_\lambda(x)$, y denotemos $g_{\lambda,y}(x) = G_\lambda(x+iy)$. Es claro que $g_{\lambda,y} = F_y * K_\lambda$ y por tanto

$$\hat{g}_{\lambda,y}(\xi) = \hat{F}_y(\xi)\hat{K}_\lambda(\xi).$$

Como $\hat{g}_{\lambda,y}$ tiene soporte compacto se tiene $\hat{g}_{\lambda,y}(\xi) = \hat{g}_{\lambda,0}(\xi)e^{-\xi y}$ para todo $y > 0$. Consecuentemente $\hat{F}_y(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-\xi y}$ para todo $y > 0$ y $|\xi| < \lambda$. Como $\lambda > 0$ es arbitrario se tiene $\hat{F}_y(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-\xi y}$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y $y > 0$. Ahora usando Plancherel y la hipótesis tenemos

$$\sup_{|y|<a}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2e^{2\xi y}d\xi < \infty.$$

Por tanto, por el teorema de la convergencia dominada $e^{a|\xi|}\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$.

■

Denotemos $H = \{z : Im(z) > 0\}$.

Teorema 4.2.4 *(Paley-Wiener) Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Son equivalentes*

(i) Existe una función $F \in \mathcal{H}(H)$ tal que

$$\sup_{y>0}\int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2dx < \infty$$

y

$$\lim_{y\to 0}\int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)-f(x)|^2 dx = 0$$

(ii) $\hat{f}(\xi) = 0$ *para todo* $\xi < 0$.

DEM:

(ii)$\Longrightarrow$ (i) Definimos $F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{i\xi z}d\xi$ para $Im(z) > 0$. Es fácil comprobar que $F \in \mathcal{H}(H)$, $F(x+iy)$ es la transformada de Fourier inversa de $e^{-\xi y}\hat{f}$, y, por Plancherel

$$\|F(.+iy)\|_2 = \|\hat{f}e^{-\xi y}\|_2 \leq \|\hat{f}\|_2$$

Además

$$\lim_{y\to 0}\|F(.+iy)-f\|_2 = \lim_{y\to 0}\|\hat{f}(e^{-\xi y}-1)\|_2 = 0.$$

(i)$\Longrightarrow$ (ii) Escribimos $f_1(x) = F(x+i)$. Por tanto

$$\|F(.+i(1+y))\|_2 = \|\hat{f}_1 e^{-\xi y}\|_2$$

para $-1 < y < \infty$. En particular, tomando límites cuando $y \to \infty$ en $\|\hat{f}_1 e^{-\xi y}\|_2 \leq C$ se obtiene $\hat{f}_1(\xi) = 0$ para $\xi < 0$. Por otro lado la transformada de Fourier de $F(\cdot + y)$ es $\hat{f}_1(\xi)e^{\xi(1-y)}$ y por la hipótesis

$$\lim_{y\to 0}\int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)-f(x)|^2 dx = \lim_{y\to 0}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_1(\xi)e^{\xi(1-y)} - \hat{f}(\xi)|^2 d\xi = 0.$$

Esto implica $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi)e^{\xi} = 0$ para $\xi < 0$. ∎