ANÁLISIS DE FOURIER

Oscar Blasco

Contents

Chapter 1

Espacios de funciones sobre $\mathbb{T}$

1.1 Preliminares sobre Análisis Funcional

Recordemos algunas nociones y resultados abstractos de Análisis Funcional que serán de uso habitual en los capítulos que siguen.

Definición 1.1.1 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. El espacio $(X, ||.||)$ es normado si para todo $x, y, z \in X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se cumple*
(i) $||x|| \geq 0$ *y* $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
(ii) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.
Un espacio normado se dice de Banach si es un espacio completo, i.e toda sucesión de Cauchy es convergente.

Proposición 1.1.2 *Sea $(X, ||.||)$ un espacio normado.*
X es Banach sí y solamente si toda serie absolutamente convergente, i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty$, es convergente (i.e. existe $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_n \in X$).

DEM:
$\Rightarrow$Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie absolutamente convergente. Notar que si $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ entonces $||s_n - s_m|| \leq \sum_{k=m+1}^{n} ||x_k||$ y por tanto es de Cauchy en X y por hipótesis converge.
$\Longleftarrow$)Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en X. Para todo $k \in \mathbb{N}$ tomemos n_k subsucesión creciente de modo que

$$||x_n - x_m|| < \frac{1}{2^k}, \ \forall n, m \geq n_k.$$

Escribimos $y_1 = x_{n_1}$, $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} ||y_n|| \leq 1$ y por tanto existe $y \in X$ tal que $x_{n_k} = \sum_{j=1}^{k-1} y_j \to y$, es decir dado $\varepsilon > 0$ existe k_0 con

$$||x_{n_k} - y|| < \frac{\varepsilon}{2}, k \geq k_0.$$

Finalmente, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 con

$$||x_n - x_m|| < \frac{\varepsilon}{2}, n, m \geq n_0$$

Tomar $k_0' \geq k_0$ tal que $n_k \geq n_0$ para $k \geq k_0'$, entonces

$$||x_n - y|| \leq ||x_n - x_{n_k}|| + ||x_n - x_{n_k}|| < \varepsilon, n \geq n_{k_0'}$$

∎

Nota 1.1.1 *Sea* $1 \leq p < \infty$.

$$\ell_p(\mathbb{Z}) = \{(z_n) \subset \mathbb{C} : \|(z_n)\|_p = (\sum_{n \in \mathbb{Z}} |z_n|^p)^{1/p} < \infty\}.$$

$$\ell_\infty(\mathbb{Z}) = \{(z_n) \subset \mathbb{C} : \|(z_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |z_n| < \infty\}.$$

Son espacios de Banach (La demostración queda como ejercicio).

Nota 1.1.2 *Sea E un espacio normado y F un espacio de Banach.*

$$\mathcal{L}(E, F) = \{T : E \to F; \textit{ aplicaciones lineales y continuas}\}.$$

Con la norma $||T|| = sup_{||x||_E \leq 1} ||T(x)||_F$ es un espacio de Banach.
En particular $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ es Banach para todo espacio normado E.

Definición 1.1.3 *Sea $(H, +, .)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Se dice que es un espacio prehilbert si tiene además un producto escalar (ó producto interno) $\langle\ ,\ \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ de modo que para todo $x, y, z \in H$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ se cumple*
(i) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
(ii) $\langle \lambda_1 x + \lambda_2 y, z \rangle = \lambda_1 \langle x, z \rangle + \lambda_2 \langle y, z \rangle$,
(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *y* $\langle x, x \rangle = 0$ *sí y sólo si* $x = 0$.
Un espacio prehilbert se dice espacio de Hilbert si es completo respecto a la norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Nota 1.1.3

$$\ell_2(\mathbb{Z}) = \{(z_n) \subset \mathbb{C} : \|(z_n)\|_2 = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} |z_n|^2)^{1/2} < \infty\}.$$

Con el producto escalar

$$\langle (z_n), (w_n)\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z_n \bar{w}_n$$

es un espacio de Hilbert.

Definición 1.1.4 *Sea* $(A, ||.||)$ *un espacio normado. Se dice que es un álgebra normada si tiene además una operación interna* $A \times A \to A$ *de modo que para todo* $x, y, z \in X$ *y* $\lambda \in \mathbb{C}$ *se cumple*

(i) $x(y+z) = xy + yz, \quad (y+z)x = yx + zx$

(ii) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$.

(iii) $x(yz) = (xy)z$.

(iv) $||xy|| \leq ||x||||y||$.

Conmutativa si

(v) $xy = yx$

Con unidad si existe $e \in A$ *tal que*

(vi) $xe = ex = x$

Con unidad aproximada (acotada) si existe $x_n \in A$ *(*$sup_{n\in\mathbb{N}}||x_n|| < \infty$*) tal que*

(vii) $xx_n = x_n x \to x$ *cuando* $n \to \infty$.

Un álgebra normada se dice de Banach si es un espacio completo, i.e toda sucesión de Cauchy es convergente.

Nota 1.1.4

$$c_0(\mathbb{Z}) = \{(z_n) : \lim_{|n|\to\infty} z_n = 0\}.$$

Con el producto puntual $(z_n)(z'_n) = (z_n z'_n)$ *y la norma* $||(z_n)|| = sup_{n\in\mathbb{N}}|z_n|$ *es un álgebra de Banach conmutativa sin unidad pero con unidad aproximada acotada* $(z_n) = e_n = (0, 0, ..., 1, 0, ...)$

Nota 1.1.5 *Sea* K *un espacio topológico compacto.*

$$C(K) = \{f : K \to \mathbb{C};\ \textit{funciones continuas}\}.$$

Con el producto puntual $f.g(t) = f(t).g(t)$ *y la norma* $||f||_\infty = sup_{t\in K}|f(t)|$ *es un álgebra de Banach conmutativa con unidad dada por la función unidad* $e(t) = 1$ *para todo* $t \in K$.

Nota 1.1.6

$$C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ \textit{funciones continuas con } \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}.$$

Con el producto puntual $f.g(t) = f(t).g(t)$ *y la norma* $||f||_\infty = sup_{t\in K}|f(t)|$ *es un álgebra de Banach conmutativa sin unidad pero con unidad aproximada acotada dada por las funciones* $e_n(t) = 1$ *para todo* $t \in [-n, n]$, $e_n(t) = t - (n+1)$ *si* $t \in [n, n+1]$ *y* $e_n(t) = n + 1 - t$ *si* $t \in [-n-1, -n]$.

Nota 1.1.7 *Sea* E *un espacio de Banach.*

$$\mathcal{L}(E, E) = \{T : E \to E;\ \textit{aplicaciones lineales y continuas}\}.$$

Con el producto de composición $T_1T_2(x) = T_1(T_2(x))$ *y* $||T|| = sup_{||x||\leq 1}||T(x)||$ *es un álgebra de Banach no conmutativa con unidad dada por el operador identidad* $I(x) = x$ *para todo* $x \in E$.

1.2 Funciones continuas e integrables en $\mathbb{T}$

Definición 1.2.1 *Consideremos* $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Es un espacio métrico compacto con la topología inducida por $\mathbb{C}$.

Es un grupo multiplicativo ($z_1, z_2 \in \mathbb{T}$ *entonces* $z_1z_2 \in \mathbb{T}$*) con unidad* $e = 1$ *y de modo que* $z^{-1} = \bar{z}$.

Consideremos $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ *dado por* $\phi(x) = e^{ix}$. *Es un homomorfismo de grupos continuo, suprayectivo y con* $ker(\phi) = \{x \in \mathbb{R} : e^{ix} = 1\} = 2\pi\mathbb{Z}$.

Recordemos que para cada $z \in \mathbb{T}$ *existe un único* $x \in [-\pi, \pi)$ *de modo que* $e^{ix} = z$ *(se conoce como Argumento principal de z). Por tanto una identificación de* $\mathbb{T}$ *es como el grupo cociente* $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = [-\pi, \pi)$.

Según ésto una función $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *continua (o medible Borel) corresponde a una* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *continua (o medible Borel) que sea* 2π*-periódica.*

Usaremos indistintamente la notación $f(t) = f(e^{it})$ *con* $t \in [-\pi, \pi)$ *para indicar* $f(z)$ *con* $z = e^{it} \in \mathbb{T}$, *asi como* $m(A) = \int_A \frac{dt}{2\pi}$ *para* $A \in [-\pi, \pi)$ *para la medida de Lebesgue normalizada en* $[-\pi, \pi)$.

Definición 1.2.2

$$C(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C};\ \textit{continuas}\} = \{f \in C([-\pi, \pi]) : f(\pi) = f(-\pi)\}.$$

El subespacio

$$\Pi(\mathbb{T}) = \{f(t) = \sum_{k=-M}^{N} \alpha_k e^{ikt} : N, M \in \mathbb{N}, \alpha_k \in \mathbb{C}\}$$

se conoce por el espacio de los polinomios trigonométricos.

Proposición 1.2.3 *$C(\mathbb{T})$ un álgebra de Banach con el producto puntual y la norma dada por $||f||_{C(T)} = sup_{t\in[-\pi,\pi)}|f(t)|$ y $\Pi(\mathbb{T})$ es denso en $C(\mathbb{T})$.*

DEM: Las propiedades de álgebra normada son de comprobación inmediata.

Sea $\{f_n\} \subset C(\mathbb{T})$ una sucesión de Cauchy. Entonces $\{f_n(t)\}$ es de Cauchy y por tanto convergente para todo $t \in [-\pi, \pi)$. Sea $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$. Veamos que es una función continua.

Dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 de modo que

$$sup_{t\in[-\pi,\pi)}|f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad n, m \geq n_0.$$

Pasando al límite en $m \to \infty$,

$$sup_{t\in[-\pi,\pi)}|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad n \geq n_0.$$

Como f_{n_0} es continua en t_0 existe $\delta > 0$ de modo que

$$|f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |t - t_0| < \delta$$

Aplicando la desigualdad triangular se tiene

$$|f(t) - f(t_0)| \leq |f(t) - f_{n_0}(t)| + |f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)| + |f_{n_0}(t_0) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

Para ver la densidad puede usarse el Teorema de Stone-Weierstrass (Toda subálgebra autoadjunta de $C(K)$ con K compacto, que separa puntos y contiene a las constantes es densa en $C(K)$.)

Es inmediato observar que ésto ocurre con $\Pi(\mathbb{T})$. ∎

Nota 1.2.1 *Para poder trabajar con el espacio $L^1(\mathbb{T})$ se necesita recordar algunas nociones de teoría de la medida.*

1.- Dado X un conjunto y $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ se dice que es una σ-álgebra sobre X si se cumple

a) $\varnothing, X \in \Sigma$.
b) Si $A_n \in \Sigma$ *entonces* $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.
c) Si $A \in \Sigma$ *entonces* $X \setminus A_n \in \Sigma$.

2.- Dada $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ *se llama* σ*-álgebra engendrada por* $\mathcal{R}$ *y se denota* $\sigma(\mathcal{R})$*, a la menor* σ*-álgebra que contiene a* $\mathcal{R}$*.*

3.- Si X *es un espacio topológico y* $\mathcal{G}$ *es la familia de los abiertos de la topología, se conoce por* σ*-álgebra de Borel a la* σ*-álgebra generada por los abiertos, y se denota* $\mathcal{B}(X)$*. A sus elementos se le llama borelianos o medibles Borel.*

4.- Dado un medible Lebesgue A *(en* $\mathbb{R}^n$ *o en* $[a,b)$*) existe un Boreliano* B *y un conjunto nulo* N *tal que* $A = B \cup N$*.*

5.- Dada f *medible Lebesgue (en* $\mathbb{R}^n$ *o en* $[a,b)$*) existe una* g *medible Borel (i.e límite en casi todo punto de simples sobre conjuntos de Borel, o bien* $\{x : f(x) \in G\}$ *es boreliano para todo* G *abierto (en* $\mathbb{R}^n$ *o en* $[a,b)$*)) tal que* $f = g$ *a.e.*

6.- Para todo $\varepsilon > 0$ *y todo boreliano* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$ *existen un compacto* K *y un abierto* G *tales que* $K \subseteq A \subseteq G$ *con* $m(G \setminus K) < \varepsilon$*.*

Definición 1.2.4 *Una función* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *se dice integrable Lebesgue si es medible Lebesgue y* $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \frac{dt}{2\pi} < \infty$*. Nótese que si* $f = 0$ *a.e. entonces* f *es medible Lebesgue y* $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \frac{dt}{2\pi} = 0$*.*

Con vista a definir una norma entre las funciones integrable consideramos la siguiente relación de equivalencia: Sean f, g *medibles Lebesgue sobre* $\mathbb{T}$

$f \approx g$ *si* $f = g$ *a.e. , i.e* $m(\{t \in [-\pi, \pi) : f(t) \neq g(t)\}) = 0$*.*

Definimos las clases de equivalencia

$$[f] = \{g \text{ medibles Lebesgue en } \mathbb{T} \text{ con } g = f a.e\}.$$

$$L^1(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} \text{ clases de funciones integrables Lebesgue}\}.$$

Una colección de funciones integrables son las funciones simples:

$$\mathcal{S}(\mathbb{T}) = \{f(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{A_k}(t) : N \in \mathbb{N}, \alpha_k \in \mathbb{C}, A_k \text{ medibles } \}.$$

Proposición 1.2.5 $L^1(\mathbb{T})$ *un espacio de Banach con la norma dada por* $||f||_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \frac{dt}{2\pi}$ *.*

DEM: Es inmediato comprobar que $||f||_1$ es una norma. Para ver la completitud usaremos la proposición del principio.

Supongamos $\{f_n\} \subset L^1(\mathbb{T})$ con $\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_1 < \infty$.

Es inmediato, del teorema de la convergencia monótona, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)| \frac{dt}{2\pi} < \infty.$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)| < \infty$ a.e., de donde se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = f(t)$ converge a.e.

Además

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{n=N}^{\infty} f_n(t)| \frac{dt}{2\pi} \leq \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=N}^{\infty} |f_n(t)| \frac{dt}{2\pi} = \sum_{n=N}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(t)| \frac{dt}{2\pi}$$

y por tanto $||f_N - f||_1 \to 0$ cuando $N \to \infty$.

■

Nota 1.2.2 *$C(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ y $||f||_1 \leq ||f||_\infty$ para $f \in C(\mathbb{T})$.*

Proposición 1.2.6 *$\mathcal{S}(\mathbb{T})$ y $C(\mathbb{T})$ son densos en $L^1(\mathbb{T})$.*

DEM:

Para ver la densidad de las funciones simples recordemos que si $f \geq 0$ medible Lebesgue existe una sucesión de funciones simples $s_n \geq 0$ tales que $s_n \leq s_{n+1}$ y $\lim_{n\to\infty} s_n = f$.

Usando la descomposición $f = (Re(f))^+ - (Re(f))^- + i(Im(f))^- - i(Im(f))^-$ podemos encontrar $s_n \in \mathcal{S}(\mathbb{T})$ de modo que $\lim_{n\to\infty} s_n = f$ y $|s_n| \leq 4|f|$.

Tomando $g_n = f - s_n \to 0$ y como $|g_n| \leq 5|f|$ entonces el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue garantiza que $||f - s_n||_1 \to 0$.

Ahora para la densidad de $C(\mathbb{T})$. Dado $\varepsilon > 0$ y $0 \neq f \in L^1(\mathbb{T})$ existe una función simple $s \in \mathcal{S}(\mathbb{T})$, $s = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j}$, tal que $||f - s||_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Para cada A_j existen un compacto K_j y un abierto G_j con $K_j \subset A_j \subset G_j$ y de modo que $m(G_j \setminus K_j) < \varepsilon/4 \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j|$.

Ahora, usando el Lema de Uryshon, tomar $\phi_j \in C(\mathbb{T})$ de modo que $0 \leq \phi_j(t) \leq 1$, $\phi_j(t) = 1$ si $t \in K_j$ y $\phi_j(t) = 0$ si $t \notin G_j$.

Definir $g = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \phi_j \in C(\mathbb{T})$.

Es claro que

$$\begin{aligned}||s-g||_1 &= \sum_{j=1}^m |\alpha_j| \int_{G_j} |\chi_{A_j}(t)-\phi_j(t)|\frac{dt}{2\pi} \\ &= \sum_{j=1}^m |\alpha_j| \int_{G_j\setminus K_j} |\chi_{A_j}(t)-\phi_j(t)|\frac{dt}{2\pi} \\ &\leq 2\sum_{j=1}^m |\alpha_j| m(G_j\setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Ahora $||f-g||_1 \leq ||f-s||_1 + ||s-g||_1 < \varepsilon$. ∎

Corolario 1.2.7 $\Pi(\mathbb{T})$ *es denso en* $L^1(\mathbb{T})$.

Dem: Combinar la densidad de la continuas en $L^1(\mathbb{T})$ y la de los polinomios en $C(\mathbb{T})$, junto con el contenido $C(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$. ∎

1.3 Espacios $L^p(\mathbb{T})$

Definición 1.3.1 *Sea* $1 \leq p < \infty$. $L^p(\mathbb{T})$ *denota el espacio vectorial de clases de funciones medibles Lebesgue* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *tales que* $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \frac{dt}{2\pi} < \infty$ *y ponemos*

$$||f||_p = (\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \frac{dt}{2\pi})^{1/p}.$$

Definición 1.3.2 *Dada* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *medible, llamamos función de distribución de* f*, denotada* m_f *a la función definida para* $\lambda > 0$

$$m_f(\lambda) = m(\{t \in \mathbb{T} : |f(t)| > \lambda\}).$$

Teorema 1.3.3 *Si* $f \in L^p(\mathbb{T})$ *entonces*
(i) $m_f(\lambda) \leq \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}$.
(ii) $\|f\|_p^p = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_f(\lambda) d\lambda$.

Dem: (i)

$$\begin{aligned}m_f(\lambda) &= m(\{t \in \mathbb{T} : |f(t)|^p > \lambda^p\}) \\ &\leq \int_{\{|f|>\lambda\}} \frac{|f(t)|^p}{\lambda^p}\frac{dt}{2\pi} \\ &\leq \frac{1}{\lambda^p}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \frac{dt}{2\pi}\end{aligned}$$

(ii) Consideremos la función de dos variables $\Phi : \mathbb{T} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $(t, \lambda) \to |f(t)| - \lambda$.

No es dificil ver que Φ es medible. Si denotamos $E = \{(t, \lambda) : \Phi(t, \lambda) > 0\}$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_f(\lambda) d\lambda &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \Big(\int_{\{t:|f(t)|>\lambda\}} \frac{dt}{2\pi}\Big) d\lambda \\
&= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} \chi_E(t, \lambda) \frac{dt}{2\pi}\Big) d\lambda \\
&= \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} p\lambda^{p-1} \chi_E(t, \lambda) \frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\int_0^\infty p\lambda^{p-1} \chi_E(t, \lambda) d\lambda\Big) \frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\int_0^{|f(t)|} p\lambda^{p-1} d\lambda\Big) \frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \frac{dt}{2\pi}
\end{aligned}$$

■

Proposición 1.3.4 *Sea $1 < p < \infty$, denotamos p' el exponente conjugado de p, i.e. $1/p + 1/p' = 1$. Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{T})$ entonces $fg \in L^1(\mathbb{T})$.*

Dem: Supongamos que $\|f\|_p = \|g\|_{p'} = 1$. Usando el Teorema 1.3.3 se tiene

$$\begin{aligned}
\|fg\|_1 &= \int_0^\infty m_{fg}(\lambda) d\lambda \\
&= \int_0^\infty m(\{|fg| > \lambda\}) d\lambda \\
&\leq \int_0^\infty m(\{|f| > \lambda^{1/p}\} \cup \{|g| > \lambda^{1/p'}\}) d\lambda \\
&\leq \int_0^\infty m(\{|f|^p > \lambda\} d\lambda + \int_0^\infty m(\{|g|^{p'} > \lambda\}) d\lambda \leq 2
\end{aligned}$$

Por homogeneidad, en general si $\|f\|_p \|g\|_{p'} > 0$ llamando $f' = f/\|f\|_p$ and $g' = g/\|g\|_{p'}$ se tiene $\|fg\|_1 \leq 2\|f\|_p \|g\|_{p'}$. ■

Nota 1.3.1 *Sea* $\Omega = \mathbb{T} \times ... \times \mathbb{T}$ *el espacio de medida con la medida* $m_n(A) = \int_A \frac{dt_1}{2\pi} ... \frac{dt_n}{2\pi}$. *Considerando* $F(t_1, ..., t_n)$ *medible y poniendo*

$$m_f(\lambda) = m_n(\{(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{T} \times ... \times \mathbb{T} : |F(t_1, ..., t_n)| > \lambda\}).$$

la demostración anterior conduce a la estimación:

$$\int_{\mathbb{T} \times ... \times \mathbb{T}} |F(t_1, ..., t_n)||G(t_1, ..., t_n)| \frac{dt_1}{2\pi} ... \frac{dt_n}{2\pi} \leq 2\|F\|_p \|G\|_{p'}.$$

Proposición 1.3.5 *(Desigualdad de Hölder) Sea* $1 < p < \infty$, *denotamos* p' *el exponente conjugado de* p, *i.e.* $1/p + 1/p' = 1$. *Si* $f \in L^p(\mathbb{T})$ *y* $g \in L^{p'}(\mathbb{T})$ *entonces*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Dem: Apliquemos la nota anterior a $F(t_1, ..., t_n) = f(t_1)...f(t_n)$ y $G(t_1, ..., t_n) = g(t_1)...g(t_n)$. Se tiene

$$\begin{aligned}
(\int_{\mathbb{T}} |f(t)g(t)| \frac{dt}{2\pi})^n &= \int_{\mathbb{T}^n} |f(t_1)...f(t_n)||g(t_1)...g(t_n)| \frac{dt_1}{2\pi} ... \frac{dt_n}{2\pi} \\
&\leq 2(\int_{\mathbb{T}^n} |f(t_1)...f(t_2)|^p \frac{dt_1}{2\pi} ... \frac{dt_n}{2\pi})^{1/p} (\int_{\mathbb{T}^n} |g(t_1)...g(t_2)|^{p'} \frac{dt_1}{2\pi} ... \frac{dt_n}{2\pi})^{1/p'} \\
&= 2\|f\|_p^n \|g\|_{p'}^n.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_{\mathbb{T}} |f(t)g(t)| \frac{dt}{2\pi} \leq 2^{1/n} \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Pasando ahora al límite se obtiene el resultado. ∎

Ejercicio 1.3.1 *Sean* $1 < p_1 \leq p_2 \leq p_3 < \infty$ *tales que* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$, *y sean* $f_i \in L^{p_i}(\mathbb{T})$ *para* $i = 1, 2, 3$. *Probar que*

$$\int_{\mathbb{T}} |f_1(t) f_2(t) f_3(t)| \frac{dt}{2\pi} \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \|f_3\|_{p_3}.$$

Proposición 1.3.6 *Sea* $1 < p < \infty$. *Entonces* $(L^p(\mathbb{T}), \|.\|_p)$ *un espacio de Banach.*

DEM: Comprobemos que $||f||_p$ es una norma. Es inmediato que $\|f\|_p = 0$ sí y sólo si $f = 0$ a.e. y que $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$. Veamos la desigualdad triangular: (Desigualdad de Minkowski)

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Usaremos la desigualdad de Hölder y el hecho $p'(p-1) = p$

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_{\mathbb{T}} |f(t)+g(t)|^{p-1} |f(t)+g(t)| \frac{dt}{2\pi} \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} |f(t)+g(t)|^{p-1} |f(t)| \frac{dt}{2\pi} + \int_{\mathbb{T}} |f(t)+g(t)|^{p-1} |g(t)| \frac{dt}{2\pi} \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} |f(t)+g(t)|^{(p-1)p'} \frac{dt}{2\pi})^{1/p'} (\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p \frac{dt}{2\pi})^{1/p} \\
&+ (\int_{\mathbb{T}} |f(t)+g(t)|^{(p-1)p'} \frac{dt}{2\pi})^{p/p'} (\int_{\mathbb{T}} |g(t)|^p \frac{dt}{2\pi})^{1/p} \\
&= \|f+g\|_p^{p/p'} (\|f\|_p + \|g\|_p)
\end{aligned}$$

Observese que $|f + g| \leq 2^p \max\{|f|, |g|\}$ y por tanto $(f + g) \in L^p(\mathbb{T})$. Podemos suponer, pues, que $0 < \|f+g\|_p < \infty$. Por tanto se tiene $\|f+g\|_p = \|f + g\|_p^{p-p/p'} \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)$.

Para ver la completitud argumentamos como en el caso $p = 1$.

Supongamos $\{f_n\} \subset L^p(\mathbb{T})$ con $\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_p < \infty$.

Consideremos $h_n(t) = (\sum_{k=1}^{n} |f_k(t)|)^p$, que es una sucesión monótona creciente. Además, usando la desigualdad de Minkowski, se tiene

$$\int_{\mathbb{T}} h_n(t) \frac{dt}{2\pi} = \| \sum_{k=1}^{n} |f_k| \|_p^p \leq (\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p)^p < \infty.$$

Es inmediato, del teorema de la convergencia monótona, que

$$\int_{\mathbb{T}} (\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)|)^p = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{T}} h_n(t) \frac{dt}{2\pi} < \infty.$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)| < \infty$ a.e., de donde se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = f(t)$ converge a.e.

Además, si $M, N \in \mathbb{N}$, con $N \leq M$

$$(\int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{n=N}^{M} f_n(t)|^p \frac{dt}{2\pi})^{1/p} \leq \sum_{n=N}^{M} (\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(t)|^p \frac{dt}{2\pi})^{1/p}.$$

Fijamos $N \in \mathbb{N}$. Usando ahora el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tenemos $|\sum_{n=N}^{M} f_n(t)|^p \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)|)^p \in L^1(\mathbb{T})$ y

$$\lim_{M\to\infty} |\sum_{n=N}^{M} f_n(t)|^p = |f(t) - \sum_{n=1}^{N} f_n(t)|^p.$$

Por tanto $||f - \sum_{n=1}^{N} f_n||_p^p \to 0$ cuando $N \to \infty$.

∎

Nota 1.3.2 *(i) $C(\mathbb{T}) \subseteq L^p(\mathbb{T})$ y $||f||_p \leq ||f||_\infty$ para $f \in C(\mathbb{T})$.*

(ii) Si $1 \leq p \leq q < \infty$ entonces $L^q(\mathbb{T}) \subseteq L^p(\mathbb{T})$ y $||f||_p \leq ||f||_q$ para $f \in L^q(\mathbb{T})$.

Proposición 1.3.7 *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces $\Pi(\mathbb{T})$, $C(\mathbb{T})$ y $\mathcal{S}(\mathbb{T})$ son densos en $L^p(\mathbb{T})$.*

DEM: Veamos la densidad de las funciones simples. Por el mismo argumento usado en el caso $p = 1$ podemos encontrar $s_n \in \mathcal{S}(\mathbb{T})$ de modo que $\lim_{n\to\infty} s_n = f$ y $|s_n| \leq 4|f|$. Tomando $g_n = |f - s_n|^p \to 0$ se tiene $|g_n| \leq C|f|^p$. Entonces el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue garantiza que $||f - s_n||_p^p \to 0$.

Para la densidad de $C(\mathbb{T})$ usamos lo mismo que en el caso $p = 1$ con la siguiente modificación. Dado $\varepsilon > 0$ y $0 \neq f \in L^1(\mathbb{T})$ existe una función simple $s \in \mathcal{S}(\mathbb{T})$, $s = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j}$, tal que $||f - s||_p < \frac{\varepsilon}{2}$.

Para cada A_j existen un compacto K_j y un abierto G_j con $K_j \subset A_j \subset G_j$ y de modo que $m(G_j \setminus K_j) < (\varepsilon/4 \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j|)^p$.

Ahora, usando el Lema de Uryshon, tomar $\phi_j \in C(\mathbb{T})$ de modo que $0 \leq \phi_j(t) \leq 1$, $\phi_j(t) = 1$ si $t \in K_j$ y $\phi_j(t) = 0$ si $t \notin G_j$.

Definir $g = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \phi_j \in C(\mathbb{T})$.

Es claro que

$$\begin{aligned} ||s - g||_p &\leq \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j| (\int_{G_j} |\chi_{A_j}(t) - \phi_j(t)|^p \frac{dt}{2\pi})^{1/p} \\ &= \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j| (\int_{G_j \setminus K_j} |\chi_{A_j}(t) - \phi_j(t)|^p \frac{dt}{2\pi})^{1/p} \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j| m^{1/p}(G_j \setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ahora $||f-g||_p \leq ||f-s||_p + ||s-g||_p < \varepsilon$.

Combinando la densidad de la continuas en $L^p(\mathbb{T})$ y la de los polinomios en $C(\mathbb{T})$, junto con el contenido $C(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$ se obtiene la densidad de $\Pi(\mathbb{T})$ en $L^p(\mathbb{T})$ ■

Definición 1.3.8 *Sea $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{T})$ y $t \in [-\pi, \pi)$, definimos $f_t(s) = f(s+t)$, (o bien para $z \in \mathbb{T}$ ponemos $f_z(w) = f(zw)$ para $w \in \mathbb{T}$).*

Esta operación genera un subgrupo en $L^p(\mathbb{T})$, pues $f_0 = f$ y $(f_t)_s = f_{t+s}$.

Por otro lado es claro que $||f_t||_p = ||f||_p$ y $||f_t - f_s||_p = ||f_{t-s} - f||_p$

Proposición 1.3.9 *(i) Sea $f \in C(\mathbb{T})$ entonces la aplicación $t \to f_t$ es continua de $\mathbb{T}$ en $C(\mathbb{T})$.*

(i) Sea $f \in L^p(\mathbb{T})$ entonces la aplicación $t \to f_t$ es continua de $\mathbb{T}$ en $L^p(\mathbb{T})$.

DEM:

(i) Usando que $f \in C(\mathbb{T})$ es uniformemente continua, por ser continua y periódica (o bien continua en el compacto $\mathbb{T}$), se tiene la afirmación, pues dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que

$$|f(t) - f(t')| < \varepsilon, \text{ si } |t-t'| < \delta$$

Esto es, para $t_0 \in [-\pi, \pi)$ y $|t - t_0| < \varepsilon$ se tiene

$$||f_t - f_{t_0}||_\infty = \sup_{s \in [-\pi,\pi)} |f(t+s) - f(t_0+s)| < \varepsilon.$$

(ii) Dada $f \in L^p(\mathbb{T})$ y $\varepsilon > 0$ tomar $g \in C(\mathbb{T})$ con $||f-g||_p < \frac{\varepsilon}{3}$.

Ahora, usando las observaciones precedentes, basta ver la continuidad en $t = 0$,

$$||f_t - f||_p \leq ||f_t - g_t||_p + ||g_t - g||_p + ||g - f||_p \leq 2||f-g||_p + ||g_t - g||_\infty < \varepsilon.$$

■

Definición 1.3.10 *Sea $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ una función medible. Diremos que está esencialmente acotada si existe $M \geq 0$ tal que $|f| \leq M$ a.e. es decir*

$$m(\{t \in [-\pi, \pi) : |f(t)| > M) = 0$$

o bien $m_f(M) = 0$ *para algún valor* $M \geq 0$. *Al valor* M *se le dice cota esencial de* $|f|$.

Denotamos $L^\infty(\mathbb{T})$ *el espacio de la clases de equivalencia de funciones esencialmente acotadas y ponemos*

$$\|f\|_\infty = \inf\{M : |f| \leq M a.e.\}.$$

Proposición 1.3.11 *Sea* $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. *Entonces*

(i) $\|f\|_\infty = \inf_{m(N)=0}\{\sup_{t\notin N} |f(t)|\}$.

(ii) Existe N_0 *medible de medida nula, tal que* $\|f\|_\infty = \sup_{t\notin N_0} |f(t)|$.

DEM: (i) Pongamos $A = \inf_{m(N)=0}\{\sup_{t\notin N} |f(t)|\}$. Si M es una cota esencial de $|f|$ entonces $N = \{t : |f(t)| > M\}$ en un conjunto nulo y se tiene $\sup_{t\notin N} |f(t)| \leq M$. Por tanto $A \leq M$ y tomando ínfimos se obtiene $A \leq \|f\|_\infty$.

Reciprocamente, para cada $\varepsilon > 0$ existe N_ε conjunto nulo tal que $M_\varepsilon = \sup_{t\notin N_\varepsilon} |f(t)| < A + \varepsilon$. Como M_ε es cota esencial se obtiene $\|f\|_\infty \leq M_\varepsilon \leq A + \varepsilon$, y consecuentemente $\|f\|_\infty \leq A$.

(ii) Usando (i) se tiene que existe una sucesión de conjuntos nulos N_k tales que

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{t\notin N_k} |f(t)| < \|f\|_\infty + \frac{1}{k}.$$

Sea $N_0 = \cup_{k=1}^\infty N_k$. Es un conjunto nulo y $\sup_{t\notin N_0} |f(t)| = \|f\|_\infty$. ∎

Teorema 1.3.12 $(L^\infty(\mathbb{T}), \|.\|_\infty)$ *es un espacio de Banach.*

DEM: Claramente $\|f\|_\infty = 0$ implica $f = 0$ a.e.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces $\|\lambda f\|_\infty = \inf_{m(N)=0}\{\sup_{t\notin N} |\lambda f(t)|\} = |\lambda|\|f\|_\infty$.

Si $f, g \in L^\infty(\mathbb{T})$ entonces $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$ a.e. y $|g(t)| \leq \|g\|_\infty$ a.e. Por tanto $|f(t) + g(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ a.e. y por consiguiente $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\mathbb{T})$. Fijamos $n, m \in \mathbb{N}$ y para la función $f_n - f_m$ encontramos un conjunto nulo $N_{n,m}$ de modo que

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{t\notin N_{n,m}} |f_n(t) - f_m(t)|.$$

Definimos $N = \cup_{n,m} N_{n,m}$. Si $t \notin N$ se tiene que $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Definimos $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ para $t \notin N$ y definimos $f(t) = 0$ para $t \in N$. Veamos que $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ y que $\lim f_n = f$ en $L^\infty(\mathbb{T})$. Por un lado, si $t \notin N$,

$$|f(t)| = \lim_{n\to\|} |f_n(t)| \leq \sup_N \|f_n\|_\infty$$

y por tanto $f \in L^\infty(\mathbb{T})$.

Además, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ para $n, m \geq n_0$. Ahora bien, para $t \notin N$ y $n \geq n_0$,

$$|f_n(t) - f(t)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(t) - f_m(t)| \leq \limsup_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon,$$

de donde se concluye que $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ para $n \geq n_0$. ∎

Proposición 1.3.13 *(i) $L^\infty(\mathbb{T}) \subseteq \cap_{p\geq 1} L^p(\mathbb{T})$. Además si $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ entonces $\sup_{p\geq 1} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$.*

(ii) Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ entonces $fg \in L^1(\mathbb{T})$. Además $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

DEM: Ejercicio. ∎

Proposición 1.3.14 *$C(\mathbb{T})$ es un subespacio cerrado de $L^\infty(\mathbb{T})$.*

DEM: Sea $f \in C(\mathbb{T})$. Veamos que si $f \in C(\mathbb{T})$ entonces $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ y además $\|f\|_\infty = \|f\|_{C(\mathbb{T})}$. Es claro que $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{C(\mathbb{T})}$.

Como $\|f\|_{C(\mathbb{T})} = |f(t_0)|$ para cierto $t_0 \in [-\pi, \pi)$ veamos que para todo N conjunto nulo, se tiene $\sup_{t\notin N} |f(t)| \geq |f(t_0)|$.

En efecto, si $t_0 \notin N$ ésto es obvio. Supongamos pues que $t_0 \in N$. Como $(t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}) \cap ([-\pi, \pi) \setminus N) \neq \varnothing$ entonces podemos considerar una sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de puntos en $[-\pi, \pi) \setminus N$ convergiendo a t. Ahora usando la continuidad de f se obtiene

$$\sup_{t\notin N} |f(t)| \geq \sup_{k\in\mathbb{N}} |f(t_k)| \geq |f(t_0)|$$

Para ver que $C(\mathbb{T})$ es cerrado, tomemos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de modo que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $L^\infty(\mathbb{T})$ y probemos que $f = g$ a.e. para alguna $g \in C(\mathbb{T})$.

Usando que $\|f_n - f_m\|_\infty = \|f_n - f_m\|_{C(\mathbb{T})}$ y la completitud de $C(\mathbb{T})$ se tiene que existe $g \in C(\mathbb{T})$ de modo que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en $C(\mathbb{T})$. Por unicidad del límite se tiene que $f = g$ como elemento de $L^\infty(\mathbb{T})$.

∎

Chapter 2

Análisis de Fourier en $\mathbb{T}$

2.1 Convolución y propiedades

Para motivar las nociones que siguen lo haremos de manos de la variable compleja.

Sea f una función holomorfa en el disco unidad $D(0,r)$ con $r>1$ y sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ su desarrollo de Taylor en $|z|<r$. Es sabido que

$$a_n = \frac{f^{(n}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{f(w)}{w^{n+1}}dw = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-int}\frac{dt}{2\pi}.$$

Usando la fórmula de Cauchy podemos decir que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{f(w)}{1-\bar{w}z}\frac{dw}{w} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{it})}{1-e^{-it}z}\frac{dt}{2\pi}.$$

Si ponemos $z=re^{i\theta}$ tenemos

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{it})}{1-re^{i(\theta-t)}}\frac{dt}{2\pi}.$$

Definición 2.1.1 *Dada $f\in C(\mathbb{T})$ y $n\in\mathbb{Z}$ definimos el coeficiente de Fourier n-ésimo de f por*

$$\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\frac{dt}{2\pi},$$

o de otro modo

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{f(w)}{w^{n+1}}dw.$$

Definición 2.1.2 *Dadas $f, g \in C(\mathbb{T})$ definimos la convolución de f y g como la nueva función*

$$f * g(s) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(s-t)\frac{dt}{2\pi},$$

o de otro modo

$$f * g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} f(w)g(z^{-1}w)\frac{dw}{w}.$$

Nota 2.1.1 *Obsérvese que $t \to f(t)g(s-t)$ es una función continua para todo $s \in [-\pi, \pi)$, por lo cual la convolución está bien definida.*

Proposición 2.1.3 *$C(\mathbb{T})$ es un álgebra de Banach conmutativa con la convolución, es decir $* : C(\mathbb{T}) \times C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$ dada por $(f, g) \to f * g$ es una aplicación bilineal continua.*

DEM: En primer lugar hay que ver que está bien definida.

Dadas $0 \neq f, g \in C(\mathbb{T})$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|g(s_1) - g(s_2)| < \varepsilon||f||_\infty$ siempre que $|s_1 - s_2| < \delta$. Entonces

$$|f * g(t_1) - f * g(t_2)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||g(t_1 - t) - g(t_2 - t)|\frac{dt}{2\pi} < \varepsilon.$$

La bilinealidad es consecuencia obvia de las propiedades de la integral y finalmente la continuidad del operador se sigue de

$$|f * g(s)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||g(s-t)|\frac{dt}{2\pi} \leq ||g||_\infty||f||_1.$$

Luego $\|f * g\|_\infty \leq ||f||_\infty||g||_\infty$. ∎

Proposición 2.1.4 *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ entonces*

$$h(s) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(s-t)\frac{dt}{2\pi}$$

está definida para casi todo $s \in [-\pi, \pi)$.

Además $h \in L^1(\mathbb{T})$ y $||h||_1 \leq ||f||_1||g||_1$.

(La función h se llama convolución de f y g, y se denota $f * g$.)

Dem: Como $(e^{is}, e^{it}) \to e^{i(s-t)}$ es continua de $\mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ se tiene que $\mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ dada por $(s,t) \to F(t,s) = f(t)g(s-t)$ es medible Lebesgue. Usando el Teorema de Fubini se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(t,s)| \frac{dt}{2\pi}\frac{ds}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi}(\int_{-\pi}^{\pi} |g(s-t)|\frac{ds}{2\pi})|f(t)|\frac{dt}{2\pi} = ||f||_1||g||_1.$$

Esto garantiza que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)g(s-t)|\frac{dt}{2\pi} \in L^1(\mathbb{T})$ y por tanto h está definida a.e y además $h \in L^1(\mathbb{T})$ y $||h||_1 \leq ||f||_1||g||_1$. ∎

Ejercicio 2.1.1 *Probar que si (f_n) converge a f en $L^1(\mathbb{T})$ y (g_n) converge a g en $L^1(\mathbb{T})$, entonces $(f_n * g_n)$ converge a $f*g$ en $L^1(\mathbb{T})$.*

Proposición 2.1.5 *Sean $f, g, h \in L^1(\mathbb{T})$, $\alpha \in \mathbb{C}$.*
(i) $f * g = g * f$.
(ii) $f * (g+h) = f*g + f*h$.
(iii) $(\alpha f) * g = \alpha(f*g)$.
(iv) $||f*g||_1 \leq ||f||_1||g||_1$.
(Es decir $L^1(\mathbb{T})$ es un álgebra de Banach conmutativa con la convolución).

Dem: Inmediata. ∎

Nota 2.1.2 *(1) Si $\phi_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$ entonces $\phi_n * \phi_m = \delta_{n,m}\phi_m$.*

$$\phi_n * \phi_m(s) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}e^{im(s-t)}\frac{dt}{2\pi} = e^{ims}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\frac{dt}{2\pi}.$$

(2) $f, g \in \Pi(\mathbb{T})$, supongamos $f = \sum_{k=-M}^{N} \alpha_k\phi_k, g = \sum_{k=-M'}^{N'} \beta_k\phi_k$ entonces

$$f * g = \sum_{k=-min(M,M')}^{min(N,N')} \alpha_k\beta_k\phi_k.$$

(3) Si $f_\epsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$, $g \in L^1(\mathbb{T})$ entonces $f_\epsilon * g(s) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} f(t)\frac{dt}{2\pi}$.

Proposición 2.1.6 *(i) Si $f \in C(\mathbb{T})$, $g \in L^1(\mathbb{T})$ entonces $f*g \in C(\mathbb{T})$.*
Además $||f*g||_\infty \leq ||f||_\infty||g||_1$.

Dem: Usando que f es uniformemente continua, para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que

$$|f(u) - f(u')| < \varepsilon ||g||_1, \qquad |u - u'| < \delta.$$

Por tanto si $|t - t'| < \delta$

$$|f * g(t) - f * g(t')| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |g(s)||f(t-s) - f(t'-s)| \frac{ds}{2\pi} < \varepsilon.$$

■

2.2 Resultados sobre coeficientes de Fourier

Definición 2.2.1 *Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $n \in \mathbb{Z}$ definimos el coeficiente de Fourier n-ésimo de f por*

$$\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \frac{dt}{2\pi}.$$

Nota 2.2.1 Ejemplos

(1) Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, $\phi_n(t) = e^{int}$ entonces $\phi_n * f = \hat{f}(n)\phi_n$.

(2) $\hat{f}(n) = \phi_n * f(0)$.

(3) Si $P \in \Pi(\mathbb{T})$ y $P = \sum_{k=-M}^{N} \alpha_k e^{ikt}$ entonces $\hat{P}(n) = \alpha_n$ si $-M \leq n \leq N$ y $\hat{P}(n) = 0$ en otro caso.

(4) Si $f \in \Pi(\mathbb{T})$, $g \in L^1(\mathbb{T})$ entonces $f * g \in \Pi(\mathbb{T})$. Además si $f = \sum_{k=-M}^{N} \alpha_k e^{ikt}$ entonces $f * g(t) = \sum_{k=-M}^{N} \alpha_k \hat{g}(k) e^{-ikt}$.

(5) Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$, $t \in [-\pi, \pi)$ entonces $\hat{f}_t(n) = \hat{f}(n)\phi_n(t)$.

Teorema 2.2.2 *La aplicación $f \to \{\hat{f}(n)\}$ es un homomorfismo de álgebras inyectivo de $L^1(\mathbb{T})$ en $c_0(\mathbb{Z})$, es decir:*

(i) $\widehat{(f * g)}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$.

(ii) $)\widehat{(f + g)}(n) = \hat{f}(n) + \hat{g}(n)$

(iii) $\widehat{(\alpha f)}(n) = \alpha \hat{f}(n)$.

(iv) Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces $\{\hat{f}(n)\} \in c_0(\mathbb{Z})$.

(v) $sup_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \leq ||f||_1$.

(vi) Si $\hat{f}(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces $f = 0$ a.e.

DEM:

(i)

$$\begin{aligned}
(f*g)\hat{}(n) &= \int_{-\pi}^{\pi}(\int_{-\pi}^{\pi} f(s-t)g(t)\frac{dt}{2\pi})e^{-ins}\frac{ds}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}(\int_{-\pi}^{\pi} f(s-t)e^{in(s-t)}\frac{ds}{2\pi})g(t)e^{-int}\frac{dt}{2\pi} \\
&= \hat{f}(n)\hat{g}(n).
\end{aligned}$$

(ii) Inmediato.

(iii) Inmediato.

(iv) Dado $\varepsilon > 0$ existe $P \in \Pi(\mathbb{T})$ de modo que $||f-P||_1 < \varepsilon$. Entonces

$$|\hat{f}(n)| \leq |\hat{f}(n) - \hat{P}(n)| + |\hat{P}(n)| \leq ||f-P||_1 + |\hat{f}(n)| < \varepsilon + |\hat{P}(n)|.$$

Como $\hat{P}(n) = 0$ para todo $n \geq n_0$ para $n_0 = max(M,N)$ donde $P = \sum_{k=-M}^{N} \alpha_k e^{ikt}$, se concluye que $|\hat{f}(n)| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$.

(v) Inmediato.

(vi) Si $\hat{f}(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{P}(t)\frac{dt}{2\pi} = 0 \quad , P \in \Pi(\mathbb{T}).$$

Por densidad (podemos suponer $f \neq 0$ a.e)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{g}(t)\frac{dt}{2\pi} = 0 \quad g \in C(\mathbb{T}).$$

En efecto, dado $\varepsilon > 0$ y $g \in C(\mathbb{T})$ existe $P \in \Pi(\mathbb{T})$ con $||g-P||_\infty < \varepsilon ||f||_1$.
Por tanto

$$|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{g}(t)\frac{dt}{2\pi}| = |\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{P}(t)\frac{dt}{2\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\bar{g}(t)-\bar{P}(t))\frac{dt}{2\pi}| \leq ||g-P||_\infty ||f||_1 < \varepsilon.$$

Ahora para todo medible E se tiene

$$\int_E f(t)\frac{dt}{2\pi} = 0.$$

En efecto, dado un medible E con $m(E) > 0$ tomemos K_n, G_n compactos y abiertos respectivamente tales que $K_n \subset E \subset G_n$ y $m(G_n \setminus K_n) < \frac{1}{n}$.

Consideremos entonces $g_n \in C(\mathbb{T})$ con $0 \leq g_n \leq 1$, $g_n(t) = 1$ para $t \in K_n$ y $g_n(t) = 0$ para $t \notin G_n$.

Nótese que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{g}(t)\frac{dt}{2\pi} = 0 = \int_{K_n} f(t)\frac{dt}{2\pi} + \int_{G_n \setminus K_n} f(t)\bar{g}_n(t)\frac{dt}{2\pi}.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \int_E f(t)\frac{dt}{2\pi} &= \int_{K_n} f(t)\frac{dt}{2\pi} + \int_{E\setminus K_n} f(t)\frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_{E\setminus K_n} f(t)\frac{dt}{2\pi} + \int_{G_n\setminus K_n} f(t)\bar{g}_n(t)\frac{dt}{2\pi} \end{aligned}$$

Finalmente

$$|\int_E f(t)\frac{dt}{2\pi}| \leq 2\int_{G_n\setminus K_n} |f(t)|\frac{dt}{2\pi}.$$

Usando que $\lim_{m(A)\to 0} \int_A |f(t)|\frac{dt}{2\pi} = 0$ (ver como ejercicio) se concluye que $\int_E f(t)\frac{dt}{2\pi} = 0$ para todo medible E.

Consideremos $E_0 = \{t : f(t) \neq 0\}$ y descomponemos

$$\begin{aligned} E_0 &= \{t : Re(f)(t) > 0\} \cup \{t : Re(f)(t) < 0\} \\ &\cup \{t : Im(f)(t) > 0\} \cup \{t : Im(f)(t) < 0\} \end{aligned}$$

Veamos que cada conjunto es de medida nula. Nótese que si $E_k = \{t : Re(f)(t) > 1/k\}$ se tiene $\{t : Re(f)(t) > 0\} = \cup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ y además

$$m(\{t : Re(f)(t) > 1/k\} \leq k\int_{E_k} Re(f)(t)\frac{dt}{2\pi} = kRe(\int_{E_k} f(t)\frac{dt}{2\pi}) = 0.$$

Similarmente se tratan los otros conjuntos. ∎

Corolario 2.2.3 *Si $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces $f = g$ a.e.*

Corolario 2.2.4 *Si (h_n) es una sucesión en $L^1(\mathbb{T})$ tal que $\lim_{n\to\infty} h_n = f$ in $L^1(\mathbb{T})$ entonces $\lim_{n\to\infty} \hat{h}_n(k) = \hat{f}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Corolario 2.2.5 *$L^1(\mathbb{T})$ es un álgebra de Banach sin unidad.*

DEM: Supongamos que existe $g \in L^1(\mathbb{T})$ con $f * g = f$ para todo $f \in L^1(\mathbb{T})$. En particular $\hat{f}(k)\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Ahora para $n \in \mathbb{Z}$ eligiendo $g = \phi_n$ se tendría que $\hat{f}(n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y por tanto $\{\hat{f}(n)\} \notin c_0(\mathbb{Z})$. ∎

2.3 Teorema de Plancherel

En esta sección analizaremos los coefficientes de Fourier de funciones de $L^2(\mathbb{T})$.

Recordemos que $L^2(\mathbb{T})$ y $\ell^2(\mathbb{Z})$ son espacios de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ con los productos escalares

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{g}(t)\frac{dt}{2\pi},$$

$$\langle(\alpha_n),(\beta_n)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\bar{\beta}_n.$$

Definición 2.3.1 *Sea $E \subset L^2(\mathbb{T})$.*

(i) Se dice que es un sistema ortonormal *en $L^2(\mathbb{T})$ si $\langle f, g\rangle = 0$ para todo $f \neq g$, $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ y además $\|f\| = 1$ para todo $f \in L^2(\mathbb{T})$.*

(ii) Se dice que es un sistema completo *si no hay funciones no nulas ortogonales a todas las del sistema, es decir $\langle f, g\rangle = 0$ para toda $g \in E$ implica que $f = 0$.*

Por ejemplo, $E = \{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal y completo en $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Teorema 2.3.2 *(Teorema de Plancherel) La aplicación $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ definida por $\mathcal{F}(f) = \{\hat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un isomorfismo isometrico que preserva el producto escalar.*

DEM: PASO 1: $\mathcal{F}$ está bien definido y $\|(\hat{f}(n))\|_2 \leq \|f\|_2$. Sea $f \in \Pi(\mathbb{T})$. Escribimos

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 &= \langle f, f\rangle \\
&= \langle\sum_{-N}^{M}\alpha_k\phi_k, \sum_{-N}^{M}\beta_k\phi_k\rangle \\
&= \sum_{k=-N}^{M}\sum_{l=-N}^{M}\langle\alpha_k\phi_k, \beta_l\phi_l\rangle \\
&= \sum_{k=-N}^{M}\langle\alpha_k\phi_k, \beta_k\phi_k\rangle
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=-N}^{M} |\alpha_k|^2$$
$$= \sum_{k=-N}^{M} |\hat{f}(k)|^2$$

Para $f \in L^2(\mathbb{T})$, fijados $N, M \in \mathbb{N}$ y consideramos $g = f - \sum_{k=-N}^{M} \hat{f}(k)\phi_k$. Es claro que

$$\|g\|^2 = \|f\|^2 + \|\sum_{k=-N}^{M} \hat{f}(k)\phi_k\|^2 - \langle f, \sum_{k=-N}^{M} \hat{f}(k)\phi_k\rangle - \langle \sum_{k=-N}^{M} \hat{f}(k)\phi_k, f\rangle$$

Además $\langle f, \sum_{k=-N}^{M} \hat{f}(k)\phi_k\rangle = \langle \sum_{k=-N}^{M} \hat{f}(k)\phi_k, f\rangle = \sum_{k=-N}^{M} \|\hat{f}(k)\|^2$.
Consecuentemente, usando el resultado sobre polinomios, tenemos

$$0 \leq \|g\|_2 = \|f\|^2 - \sum_{k=-N}^{M} \|\hat{f}(k)\|^2.$$

Tomando supremos sobre N, M se obtiene $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\hat{f}(n)\|^2 \leq \|f\|^2$.

PASO 2: $\mathcal{F}$ es suprayectivo. Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión en $\ell^2(\mathbb{Z})$. Consideremos $h_{N,M} = \sum_{k=-N}^{M} \alpha_k\phi_k \in \Pi(\mathbb{T})$ para $N, M \in \mathbb{N}$ fijados. Veamos que $(h_{N.M})_{N,M}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{T})$.

En efecto, si $N' \geq N, M' \geq M$,

$$\|h_{N,M} - h_{N',M'}\|_2^2 = \sum_{k=-N}^{N'-1} |\alpha_k|^2 + \sum_{k=M+1}^{M'} |\alpha_k|^2$$

y usando que (α_n) belongs to $\ell^2(\mathbb{Z})$ se tiene que es Cauchy.

Usando la completitud de $L^2(\mathbb{T})$ existe $f \in L^2(\mathbb{T})$ de modo que $\lim_{M\to\infty,N\to\infty} h_{N,M} = f$ en $L^2(\mathbb{T})$.

Por tanto $\|f|_2^2 = \lim_{M\to\infty,N\to\infty} \|h_{N,M}\|_2^2$. Consecuentemente

$$\|f\|_2^2 = \lim_{M\to\infty,N\to\infty} \sum_{k=-N}^{M} |\alpha_k|^2 = \|(\alpha_n)\|_2^2.$$

Veamos que $\hat{f}(n) = \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Esto se sigue de

$$\hat{f}(n) = \langle f, \phi_n \rangle = \langle \lim_{M\to\infty, N\to\infty} h_{N,M}, \phi_n \rangle.$$

Por la continuidad del funcional $\langle f, \phi_n \rangle$ en $L^2(\mathbb{T})$ y del hecho $\hat{h}_{N,M}(n) = \alpha_n$ para $|n| \leq \min\{N, M\}$ se concluye el resultado.

PASO 3: $\mathcal{F}$ es obviamente inyectivo por ser una isometria.

PASO 4: Preserva el producto escalar, es decir $\langle f, g \rangle = \langle (\hat{f}(n)), (\hat{g}(n)) \rangle$.

Es claro que el resultado es cierto para f, g en $\Pi(\mathbb{T})$ (por la ortogonalidad del sistema). Ahora podemos extender a todas las funciones usando la densidad de $\Pi(\mathbb{T})$ en $L^2(\mathbb{T})$ y la continuidad del producto escalar en ambos espacios.

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \langle \lim_{N\to\infty} P_N, \lim_{M\to\infty} Q_M \rangle \\
&= \lim_{N\to\infty} \langle P_N, \lim_{M\to\infty} Q_M \rangle \\
&= \lim_{N\to\infty} \lim_{M\to\infty} \langle P_N, Q_M \rangle \\
&= \lim_{N\to\infty} \lim_{M\to\infty} \langle (\hat{P}_N(n)), (\hat{Q}_M(n)) \rangle
\end{aligned}$$

El mismo proceso aplicado al producto escalar de sucesiones implica

$$\langle f, g \rangle = \langle \lim_{N\to\infty} (\hat{P}_N(n)), \lim_{M\to\infty} (\hat{Q}_M(n)) \rangle = \langle (\hat{f}(n)), (\hat{g}(n)) \rangle$$

∎

Corolario 2.3.3 *$E = \{\phi_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal y completo en $L^2(\mathbb{T})$.*

Corolario 2.3.4 *Si $f \in L^2(\mathbb{T})$ entonces $S_N f = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\phi_n$ converge a f en $L^2(\mathbb{T})$.*

Corolario 2.3.5 *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $g \in L^2(\mathbb{T})$ entonces $f * g \in L^2(\mathbb{T})$. Además*

$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2.$$

Definición 2.3.6 $A(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}) : \{\hat{f}(n)\} \in l^1(\mathbb{Z})\}$

Pongamos $||f||_{A(\mathbb{T})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|$.

Nota 2.3.1 *Recordemos que una serie doble $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$ (con $x_n \in X$) se dice convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=-\infty}^{0} x_n$ son convergentes. Además $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=-\infty}^{0} x_n$.*

Teorema 2.3.7 *(i) $A(\mathbb{T})$ es un algebra de Banach con la multiplicación puntual y $\Pi(\mathbb{T})$ es denso en $A(\mathbb{T})$.*
(ii) $A(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T})$.
Además $||f||_\infty \leq ||f||_{A(\mathbb{T})}$.
(iii) Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, $g \in A(\mathbb{T})$ entonces $f * g \in A(\mathbb{T})$.
Además $||f * g||_{A(\mathbb{T})} \leq ||f||_1 ||g||_{A(\mathbb{T})}$.
(iv) Si $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ entonces $f * g \in A(\mathbb{T})$.
Además $||f * g||_{A(\mathbb{T})} \leq ||f||_2 ||g||_2$.

DEM:
(i) Sean $f, g \in A(\mathbb{T})$ entonces

$$f(t)g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\hat{g}(n-k)e^{int} \in A(\mathbb{T}).$$

En efecto

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\hat{g}(n-k)| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)||\hat{g}(n-k)| = ||f||_{A(\mathbb{T})}||g||_{A(\mathbb{T})}.$$

La densidad de los polinomios es consecuencia de hecho siguiente:
Si $f \in A(\mathbb{T})$ y $\varepsilon > 0$ existe n_0 de modo que entonces

$$\sum_{n<-M} |\hat{f}(n)| + \sum_{n>N} |\hat{f}(n)| < \varepsilon, \qquad N, M \geq n_0,$$

Es decir $||f - h_{M,N}||_{A(\mathbb{T})} < \varepsilon$ donde $h_{M,N}(t) = \sum_{k=-M}^{N} \hat{f}(n)\phi_n$.

(ii) Es una consecuencia de la completitud de $C(\mathbb{T})$ junto con el hecho de que si $f \in A(\mathbb{T})$ entonces la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\phi_n$ converge absolutamente en $L^1(\mathbb{T})$ (y por tanto en $C(\mathbb{T})$).

(iii) Como $\widehat{(f * g)}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$ se tiene que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{(f * g)}(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)||\hat{g}(n)| \leq ||f||_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(n)|.$$

(iv) Usar Cauchy-Schwarz y Plancherel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{(f * g)}(n)| \leq (\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2)^{1/2}(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(n)|^2)^{1/2} = ||f||_2 \|g\|_2.$$

∎

2.4 Teoremas de Young

Estudiaremos ahora las convolución y los coeficientes de Fourier de funciones en $L^p(\mathbb{T})$ para $1 < p < \infty$.

Teorema 2.4.1 *Sea* $1 \leq p \leq \infty$. *Si* $f \in L^1(\mathbb{T})$ *y* $g \in L^p(\mathbb{T})$ *entonces* $f * g \in L^p(\mathbb{T})$.

Además $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

DEM: Podemos suponer $1 < p < \infty$, pues los otros casos ya están resueltos. Tomar $1 < q < \infty$ tal que $1/q + 1/p = 1$.

Como $f * g(s) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(s-t)\frac{dt}{2\pi}$ tenemos

$$
\begin{aligned}
|f * g(s)| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||g(s-t)|\frac{dt}{2\pi} \\
&\leq (\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||g(s-t)|^p \frac{dt}{2\pi})^{1/p} (\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\frac{dt}{2\pi})^{1/q} \\
&\leq (\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||g(s-t)|^p \frac{dt}{2\pi})^{1/p} \|f\|_1^{1/q}
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
\|f * g\|_p^p &= \int_{-\pi}^{\pi} |f * g(s)|^p \frac{ds}{2\pi} \\
&\leq \|f\|_1^{p/q} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||g(s-t)|^p \frac{dt}{2\pi}\frac{ds}{2\pi} \\
&\leq \|g\|_p^p \|f\|_1^p
\end{aligned}
$$

■

Teorema 2.4.2 *Sea* $1 \leq p, q \leq \infty$ *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Si* $f \in L^p(\mathbb{T})$ *y* $g \in L^q(\mathbb{T})$ *entonces* $f * g \in C(\mathbb{T})$.

Además $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

DEM: Suponer $1 \leq p < \infty$. Usando la expresión $f * g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g(s)\frac{ds}{2\pi}$ tenemos

$$
\begin{aligned}
f * g(t) - f * g(t') &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(t-s) - f(t'-s)]g(s)\frac{ds}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (f_t - f_{t'})(s)g(-s)\frac{ds}{2\pi}
\end{aligned}
$$

$$|f*g(t)-f*g(t')|\leq \|g\|_q\|f_t-f_{t'}\|_p.$$

Y el resultado de continuidad de la traslación se obtiene el resultado.

El caso $p=\infty$ se obtiene ya que $f*g=g*f$. ■

Teorema 2.4.3 *Sea* $1\leq p_1,p_2\leq\infty$ *con* $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\geq 1$. *Si* $f\in L^{p_1}(\mathbb{T})$ *y* $g\in L^{p_2}(\mathbb{T})$ *entonces* $f*g\in L^{p_3}(\mathbb{T})$*, donde* $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-1=\frac{1}{p_3}$.

Además $\|f*g\|_{p_3}\leq\|f\|_{p_1}\|g\|_{p_2}$.

Dem: Los casos $p_1=1$ y $p_1=\infty$ están resueltos en los resultados anteriores. Supongamos $1<p_1<\infty$. Sean $1<\mu,\eta,\alpha<\infty$ with $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\alpha}=1$ que se elegirán convenientemente.

$$\begin{aligned}
|f*g(s)| &\leq \int_{-\pi}^{\pi}|f(t)||g(s-t)|\frac{dt}{2\pi}\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^{p_1/\mu}|g(s-t)|^{p_2/\eta}|f(t)|^{1-p_1/\mu}|g(s-t)|^{1-p_2/\eta}\frac{dt}{2\pi}\\
&\leq (\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^{p_1}\frac{dt}{2\pi})^{1/\mu}(\int_{-\pi}^{\pi}|g(s-t)|^{p_2}\frac{dt}{2\pi})^{1/\eta}\\
&\times (\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^{\alpha(1-p_1/\mu)}|g(s-t)|^{\alpha(1-p_2/\eta)}\frac{dt}{2\pi})^{1/\alpha}\\
&= \|f\|_{p_1}^{p_1/\mu}\|g\|_{p_2}^{p_2/\eta}(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^{\alpha(1-p_1/\mu)}|g(s-t)|^{\alpha(1-p_2/\eta)}\frac{dt}{2\pi})^{1/\alpha}
\end{aligned}$$

Elegir $\alpha=p_3$, μ y η tales que $\alpha(1-p_1/\mu)=p_1$ y $\alpha(1-p_2/\eta)=p_2$. Es decir, $\frac{1}{\mu}=\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_3}$, $\frac{1}{\eta}=\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_3}$ y $\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{p_3}$.

Entonces, $p_3-p_1=p_3p_1/\mu$ y $p_3-p_2=p_3p_2/\eta$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}|f*g(s)|^{p_3}\frac{ds}{2\pi} &\leq \|f\|_{p_1}^{p_3p_1/\mu}\|g\|_{p_3p_2}^{p_2/\eta}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^{\alpha(1-p_1/\mu)}|g(s-t)|^{\alpha(1-p_2/\eta)}\frac{dt}{2\pi}\frac{ds}{2\pi}\\
&= \|f\|_{p_1}^{p_3p_1/\mu}\|g\|_{p_2}^{p_3p_2/\eta}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^{p_1}|g(s-t)|^{p_2}\frac{dt}{2\pi}\frac{ds}{2\pi}\\
&= \|f\|_{p_1}^{p_3}\|g\|_{p_2}^{p_3}
\end{aligned}$$

De donde se concluye $\|f*g\|_{p_3}\leq\|f\|_{p_1}\|g\|_{p_2}$. ■

2.5 Ejercicios propuestos

Definición 2.5.1 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ y sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$; se define*

$$V(P, f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

La variación total de f en $[a, b]$ viene dada por:

$$V_a^b(f) = \sup\{V(P, f) : P \quad \textit{es partición de } [a, b]\}$$

Si $V_a^b(f) < \infty$, se dice que f es de variación acotada en $[a, b]$ (brevemente $f \in VA(a, b)$).

Se dice que f es absolutamente continua en $[a, b]$ (brevemente $f \in AC(a, b)$) si:

$$\forall \epsilon \quad \exists \delta \; : \; \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \epsilon \quad \text{si} \quad \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta,$$

para toda familia finita $\{]a_j, b_j[\}_{j=1}^{n}$ de subintervalos de $[a, b]$ disjuntos dos a dos.

Sea $0 < \alpha < 1$ Se dice que $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ satisface una condición de Lipschitz de orden α (brevemente $f \in Lip_\alpha(a, b)$, $f \in Lip(a, b)$ en el caso $\alpha = 1$,) si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha \qquad \forall x, y \in [a, b].$$

Ejercicio 2.5.1 *Dada $f \in \mathcal{L}^1(a, b)$ defininimos la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.*

(i) Probar que F es absolutamente continua y además $F' = f$ c.p.p.

(ii) Dada $f \in \mathcal{L}^p(a, b)$, $1 < p < \infty$ entonces $F \in Lip_{1/p}(a, b)$.

(iii) Dada $f \in \mathcal{L}^\infty(a, b)$, entonces $F \in Lip(a, b)$.

Ejercicio 2.5.2 *(i) Demuestra que $Lip_{\alpha_2}(a, b) \subsetneq Lip_{\alpha_1}(a, b)$ si $\alpha_1 \leq \alpha_2$.*

(ii) Probar que $Lip(a, b) \subseteq AC(a, b) \subseteq VA(a, b)$.

Ejercicio 2.5.3 *(i) Prueba que si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f \in Lip_{1/2} \setminus Lip(0, 1)$ pero $f \in AC(0, 1)$.*

(ii) Dada $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n}$ y f es lineal en cada intervalo $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, probar que f es continua pero no absolutamente continua.

(iii) Demuestra que una función de variación acotada es acotada. Dar un ejemplo de una función acotada pero no de variación acotada.

Ejercicio 2.5.4 *Sean* $f,\ g \in VA(a,b)$. *Prueba que* $f \cdot g \in VA(a,b)$.

Ejercicio 2.5.5 *Prueba que, dadas* $F \in Lip[c,d],\ \phi : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ *absolutamente continua, entonces* $F \circ \phi \in AC(a,b)$.

Chapter 3

Series de Fourier

Definición 3.0.2 *Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$. Llamamos serie de Fourier de f a la siguente serie formal $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$ denotada por $S(f)$.*

Se llama $S_N(f)(t) = \sum_{n=_N}^{N} \hat{f}(n)e^{-int}$.

Nota 3.0.1 *La pregunta natural es intentar describir la función en términos de su serie de Fourier, es decir estudiar posibles convergencias de la serie anterior.*

Hay varias situaciones completamente obvias:

(i) Si $f \in \Pi(\mathbb{T})$ entonces $S(f)(t) = f(t)$ para todo $t \in [-\pi, \pi)$ (pues es una suma finita).

(ii) Si $f \in A(\mathbb{T})$ entonces $S(f) = f$ en $A(\mathbb{T})$, es decir $\lim_{N,M\to\infty} s_{M,N} = f$ donde $s_{M,N} = \sum_{k=-M}^{N} \hat{f}(n)e^{-int}$, pues la serie converge absolutamente.

En particular $\lim_{N,M\to\infty} s_{M,N}(t) = f(t)$ uniformemente en $t \in [-\pi, \pi)$.

(iii) Si $f \in L^2(\mathbb{T})$ entonces $s_{M,N} = \sum_{k=-M}^{N} \hat{f}(n)e^{-int}$ converge a f en $L^2(\mathbb{T})$.

Daremos algunas convergencias más débiles, pues en general no puede afirmarse demasiado sobre la convergencia de la serie en el sentido anterior.

Definición 3.0.3 *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de elementos de un espacio de Banach X. Diremos que la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$ es sumable Abel si existe*

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n r^{|n|}.$$

Denotaremos $(A) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$ a dicho valor en caso de existir.

Diremos valor principal de Cauchy de la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$*, si existe,al límite*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} x_k.$$

Denotaremos $(PV) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$ *a dicho valor.*

Diremos que la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$ *es sumable Cèsaro si existe* $\lim_{N\to\infty} \sigma_N$*, donde* σ_N *son los promedios de las sumas parciales* $s_n = \sum_{k=-N}^{N} x_k$*, es decir*

$$\sigma_N = \frac{s_0 + s_1 + ... + s_N}{N+1}.$$

Denotaremos $(C) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$ *a dicho valor en caso de existir.*

Ejercicio 3.0.6 *(i) Probar que la sumabilidad implica la sumabilidad Abel y la existencia del valor principal.*

(ii) Probar que la existencia del valor principal implica la sumabilidad Césaro.

¿ Son ciertos los reciprocos?.

Definición 3.0.4 *(Núcleo de Dirichlet) Se conoce con el nombre de Núcleo de Dirichlet a la sucesión*

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{-int}.$$

Se cumple que si $f \in L^1(\mathbb{T})$*, y* $N \in \mathbb{N}$ *entonces*

$$S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{-int} = D_N * f(t).$$

Teorema 3.0.5 *(Propiedades del núcleo de Dirichlet.)*

(1) $D_N(t) = \frac{sen(N+\frac{1}{2})t}{sen(t/2)}$.

(2) $D_N(t) = D_N(-t)$ *para todo* $t \in [-\pi, \pi), N \in \mathbb{N}$.

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\frac{dt}{2\pi} = 1$, $N \in \mathbb{N}$,.

(4) $||D_N||_1 \approx log(N)$, $N \in \mathbb{N}$,*i. e. existen* $C_1, C_2 > 0$ *tales que* $C_1 log(N) \leq \|D_N\|_1 \leq C_2 log(N)$.

(5) $\|D_N\|_\infty = 2N + 1$.

DEM:

(1) Por inducción sobre N. Para $N = 0$, $D_0(t) = 1$.

Supongámoslo para N.

$$\begin{aligned} D_{N+1}(t) &= D_N(t) + e^{-i(N+1)t} + e^{i(N+1)t} \\ &= \frac{sen(N+\frac{1}{2})t}{sen(t/2)} + 2cos(N+1)t \\ &= \frac{sen(N+\frac{3}{2})t}{sen(t/2)}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $sen(p) - sen(q) = 2cos\frac{p+q}{2}sen\frac{p-q}{2}$.

(2) Obvio.

(3) Obvio.

(4) Teniendo en cuenta que $\frac{2t}{\pi} \leq sen(t) \leq t$ para $0 < t < \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{sen(N+\frac{1}{2})t}{sen(t/2)} \right| \frac{dt}{2\pi} &= 2\int_0^{\pi} \frac{|sen(N+\frac{1}{2})t|}{sen(t/2)} \frac{dt}{2\pi} \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|sen(2N+1)t|}{sen(t)} \frac{dt}{2\pi} \\ &\approx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|sen(2N+1)t|}{t} \frac{dt}{2\pi} \\ &\approx \int_0^{\frac{(2N+1)\pi}{2}} \frac{|sent|}{t} \frac{dt}{2\pi} \\ &= \sum_{k=0}^{2N+1} \int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}} \frac{|sent|}{t} \frac{dt}{2\pi} \\ &\approx \sum_{k=0}^{2N+1} \frac{1}{k} \int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}} |sent| \frac{dt}{2\pi} \approx \sum_{k=0}^{2N+1} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Es bien sabido que $H_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k} \approx log(n)$ de donde se sigue el resultado.

(5) Usar que $D_N(0) = 2N + 1$ y la estimación trivial $|D_N(t)| \leq 2N + 1$.

∎

Estudiaremos ahora la situación de la no convergencia de la serie $S_N(f)$ en $C(\mathbb{T})$.

Lema 3.0.6 *Son equivalentes:*
(1) $S_N(f) \to f$ en $C(\mathbb{T})$ para toda $f \in C(\mathbb{T})$.
(2) Existe $C > 0$ con $||S_N(f)||_\infty \leq C||f||_\infty$ para todo $N \in \mathbb{N}$.

DEM:
(1) $\Rightarrow$(2) Como $\{S_N(f)\}$ es acotada para toda $f \in C(\mathbb{T})$ entonces por el teorema de la acotación uniforme existe $C > 0$ con $||S_N(f)||_\infty \leq C||f||_\infty$ para todo $N \in \mathbb{N}$.
(2) $\Rightarrow$(1) Sea $\|S_N\| = \sup\{\|S_N(f)\|_\infty : \|f\|_\infty = 1\}$. Dada $f \in C(\mathbb{T})$ y $\varepsilon > 0$ tomar $P \in \Pi(\mathbb{T})$ tal que $||f - P||_\infty < \varepsilon sup_N||S_N|| + 1$. Entonces, para $N \geq grado(P)$

$$||S_N(f) - f||_\infty \leq ||S_N(f - P)||_\infty + ||P - f||_\infty < (||S_N|| + 1)||f - P|| < \varepsilon.$$

∎

Ejercicio 3.0.7 *Sea $1 \leq p < \infty$. $S_N(f) \to f$ en $L^p(\mathbb{T})$ para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$ si y sólo si existe $C > 0$ con $||S_N(f)||_p \leq C||f||_p$ para todo $N \in \mathbb{N}$.*

Teorema 3.0.7 *Existe una $f \in C(\mathbb{T})$ de modo que $S_N(f)(t)$ no converge uniformemente a f.*

DEM: Usando el Lema es suficiente probar que $||S_n||$ no está acotada.
Basta encontrar una sucesión $\phi_n \in C(\mathbb{T})$ tal que $sup||\phi_n||_\infty < \infty$ pero con $S_n(\phi_n)$ divergiendo a ∞.
Sea $D_n(t) = \frac{sen(n+\frac{1}{2})t}{sen\frac{t}{2}}$. Tomamos $t_k = \frac{k\pi}{n+\frac{1}{2}}$, $|k| \leq n$, que son los ceros de D_n y consideramos intervalos centrados en los mismos $I_k = (t_k - \delta_k, t_k + \delta_k)$ de modo que su unión es A_n y la suma de sus longitudes sea $m(A_n) = L_n \leq \frac{1}{2(2n+1)}$. Definimos $\phi_n(t) = sign(D_n(t))$ salvo en los intervalos prefijados y allí se unen los extremos por linealidad.
Obviamente $||\phi_n||_\infty = 1$. Además

$$\begin{aligned}
||S_n|| &\geq ||S_n(\phi_n)||_\infty \\
&\geq |S_n(\phi_n(0)| \\
&= |\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\phi_n(t)\frac{dt}{2\pi}| \\
&\geq \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\frac{dt}{2\pi} - \int_{A_n} (|D_n(t)| - \phi_n(t)D_n(t))\frac{dt}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Nótese que $\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)\frac{dt}{2\pi}| \geq Clog(n)$ y que

$$|\int_{A_n} (|D_n(t)| - \phi_n(t)D_n(t))\frac{dt}{2\pi}| \leq 2(2n+1)m(A_n) < 1.$$

Por consiguiente $||S_n|| \geq Clon(n) - 1$ y se concluye el resultado. ∎

3.1 Núcleos de sumabilidad: Poisson y Fèjer

Definición 3.1.1 *(Núcleo de Poisson) Se conoce con el nombre de Núcleo de Poisson a la familia de funciones $\{P_r\}_{0<r<1}$,*

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{-int}$$

Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$, y $0 < r < 1$ se tiene que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)r^{|n|}e^{-int} = P_r * f(t).$$

Por tanto la sumabilidad Abel de f se describe como $\lim_{r\to 1} P_r * f(t)$.

Teorema 3.1.2 *(Propiedades del núcleo de Poisson.)*
(1) $P_r \in A(\mathbb{T})$ y $||P_r||_{A(\mathbb{T})} = \frac{1+r}{1-r}$, $0 < r < 1$.
(2) $P_r(t) = \frac{1-r^2}{(1-r)^2+4rsen^2(t/2)} = \frac{1-r^2}{|1-re^{it}|^2}$, $0 < r < 1$.
(3) $P_r(t)$ es no negativa, par y monótona no creciente en $[0, \pi]$, $0 < r < 1$.
(4) $\frac{1-r}{1+r} \leq P_r(t) \leq \frac{1+r}{1-r}$, $0 < r < 1$.
(5) $P : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ dada por $re^{it} \to P_r(t)$ es una función armónica.
(6) $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\frac{dt}{2\pi} = 1$, $0 < r < 1$.
(7) Sea $\alpha > 0$ entonces $\lim_{r\to 1^-} \sup_{|t|>\alpha} P_r(t) = 0$.
(8) Sea $0 < \alpha < \pi$ entonces $\lim_{r\to 1^-} \int_{|t|>\alpha} P_r(t)\frac{dt}{2\pi} = 0$.

DEM:
(1) Se sigue de que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} = 1 + \frac{2r}{1-r} = \frac{1+r}{1-r}$.
(2) Basta observar que

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-int} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-int} = 1 + \frac{re^{it}}{1-re^{it}} + \frac{re^{-it}}{1-re^{-it}} = \frac{1-r^2}{|1-re^{it}|^2}.$$

Usar la expresión $|1-re^{it}|^2 = 1+r^2-2rcos(t) = (1-r)^2+4rsen^2(t/2)$ para la otra fórmula.

(3) De comprobación inmediata (usar $|1-re^{it_1}| \geq |1-re^{it_2}|$ para $t_2 \geq t_1 \geq 0$).

(4) Se sigue de (2) pues $(1-r)^2 \leq 1+r^2-2rcos(t) \leq (1+r)^2$.

(5) Observar que $P(z) = Re(\frac{1+z}{1-z})$ para $z = re^{it}$.

(6) Como $\sum_{n=-N}^{N} r^{|n|}e^{-int}$ converge a $P_r(t)$ uniformemente en $[-\pi,\pi)$, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\frac{dt}{2\pi} = \lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-N}^{N} r^{|n|}e^{-int}\frac{dt}{2\pi} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} r^{|n|}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\frac{dt}{2\pi} = 1.$$

(7) Nótese que

$$\sup_{|t|>\alpha} P_r(t) = \sup_{\pi\geq t>\alpha} P_r(t) \leq P_r(\alpha) = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\alpha}|^2}$$

y por tanto se tiene el resultado.

(8) Se sigue de (7). ∎

Definición 3.1.3 *(Núcleo de Fèjer) Se conoce con el nombre de Núcleo de Fèjer a la sucesión* $\{K_N\}$ *dada por*

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N}(1-\frac{|n|}{N+1})e^{-int}.$$

Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$, *y* $N \in \mathbb{N}$ *se tiene*

$$\sigma_N(f)(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_N(f)(t) = K_N * f(t).$$

Por tanto la sumabilidad Cèsaro de f *se corresponde a* $\lim_{N\to\infty}\sigma_N(f)(t) = \lim_{N\to\infty} K_N * f(t)$

Nota 3.1.1

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_N(t) \quad = \quad \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$$

$$= \frac{1}{N+1}\sum_{k=-N}^{N}(\sum_{N=|k|}^{N}1)e^{ikt}$$

$$= \sum_{k=-N}^{N}(1-\frac{|k|}{N+1})e^{ikt}.$$

Teorema 3.1.4 *(Propiedades del núcleo de Fèjer.)*

(1) $K_N(t) = \frac{1}{N+1}\frac{sen^2(\frac{N+1}{2}t)}{sen^2(t/2)}$.
(2) $K_N(t) \geq 0$ *y* $K_N(t) = K_N(-t)$ *para todo* $t \in [-\pi,\pi), N \in \mathbb{N}$.
(3) $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\frac{dt}{2\pi} = 1$, $N \in \mathbb{N}$.
(4) $K_N(t) \leq min\{N+1, \frac{\pi^2}{(N+1)t^2}\}$.
(5) Sea $\alpha > 0$ *entonces* $\lim_{N\to\infty}\sup_{|t|>\alpha} K_N(t) = 0$.
(6) Sea $0 < \alpha < \pi$ *entonces* $\lim_{N\to\infty}\int_{|t|>\alpha} K_N(t)\frac{dt}{2\pi} = 0$.

DEM: (1)

$$\begin{aligned}
K_N(t) &= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}D_n(t)\\
&= \frac{1}{(N+1)sen(t/2)}\sum_{n=0}^{N}Im(e^{i(n+\frac{1}{2})t})\\
&= \frac{1}{(N+1)sen(t/2)}Im(e^{i\frac{t}{2}}\sum_{n=0}^{N}e^{int})\\
&= \frac{1}{(N+1)sen(t/2)}Im(\frac{e^{i(N+1)t}-1}{e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}})\\
&= \frac{1}{(N+1)sen^2\frac{t}{2}}Im(\frac{e^{i(N+1)t}-1}{2i})\\
&= \frac{1-cos(N+1)t}{2(N+1)sen^2\frac{t}{2}} = \frac{sen^2(\frac{N+1}{2}t)}{(N+1)sen^2\frac{t}{2}}.
\end{aligned}$$

(2) Obvio.
(3) $\int_{\pi}^{\pi} K_n(t)\frac{dt}{2\pi} = \hat{K_N}(0) = 1$.
(4) Es claro que $\frac{t}{\pi} \leq sen\frac{t}{2} \leq \frac{t}{2}$ si $0 \leq t \leq \pi$. Entonces

$$K_N(t) \leq \frac{1}{(N+1)sen^2\frac{t}{2}} \leq \frac{\pi^2}{(N+1)t^2}.$$

Por otro lado

$$|K_N(t)| \leq \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}|D_n(t)| \leq \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(2n+1) = \frac{1}{N+1}(2\frac{N(N+1)}{2}+N+1)) \leq N+1.$$

(5) Se sigue de que

$$\sup_{|t|>\alpha} K_N(t) = \sup_{\pi\geq t>\alpha} K_N(t) \leq \frac{1}{(N+1)sen^2\frac{\alpha}{2}}.$$

(6) Es inmediato de (5). ∎

Definición 3.1.5 *(Núcleo de sumabilidad) Una familia de funciones* $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *se dice un núcleo de sumabilidad sobre* $\mathbb{T}$ *si verifican*

(i) $\sup_{\varepsilon>0}\int_{-\pi}^{\pi}|K_\varepsilon(t)|\frac{dt}{2\pi} < \infty$.

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi}K_\varepsilon(t)\frac{dt}{2\pi} = 1$ *para todo* $\varepsilon > 0$.

(iii) Para todo $\alpha > 0$ $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\alpha<|t|<\pi}|K_\varepsilon(t)|\frac{dt}{2\pi} = 0$.

Ejemplo 3.1.1 *Los núcleos de Poisson* $K_\varepsilon = P_{r(\varepsilon)}(r(\varepsilon) = 1-\varepsilon)$, *o de Fèjer* $K_N = K_{\varepsilon_N}, (\varepsilon_N = \frac{1}{N})$ *son de sumabilidad.*

Teorema 3.1.6 *Sea* K_ε *un núcleo de sumabilidad. Si* $f \in C(\mathbb{T})$ *entonces* $K_\varepsilon * f$ *converge a* f *en* $C(\mathbb{T})$.

Dem:

$$\begin{aligned} f(t) - K_\varepsilon * f(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_\varepsilon(s)\frac{ds}{2\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)K_\varepsilon(s)\frac{ds}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-f(t-s))K_\varepsilon(s)\frac{ds}{2\pi}. \end{aligned}$$

Dado $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que si $|s| < \delta$ entonces

$$|f(t) - f(t-s)| < \frac{\eta}{2sup_{\varepsilon>0}||K_\varepsilon||_1}.$$

Por otro lado dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon_0 > 0$ de modo que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\int_{|s|>\delta}|K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi} < \frac{\eta}{4||f||_\infty}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}|f(t)-K_\varepsilon * f(t)| &\leq \int_{|s|<\delta} |f(t)-f(t-s)|K_\varepsilon(s)\frac{ds}{2\pi} \\ &+ \int_{|s|>\delta} |f(t)-f(t-s)|K_\varepsilon(s)\frac{ds}{2\pi} \\ &\leq \frac{\eta}{2sup_{\varepsilon>0}||K_\varepsilon||_1}\int_{|s|<\delta}|K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi} \\ &+ 2||f||_\infty \int_{|s|>\delta}|K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi} < \eta\end{aligned}$$

∎

Corolario 3.1.7 *Sea $f \in C(\mathbb{T})$.*

(i) $$\lim_{r\to 1^-} P_r * f(t) = f(t) \text{ uniformemente en } [-\pi,\pi).$$

(En particular $A - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{-int} = f(t)\ \forall t \in [-\pi,\pi)$.)

(ii) $$\lim_{N\to\infty} K_N * f(t) = f(t) \text{ uniformemente en } [-\pi,\pi).$$

(En particular $C - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{-int} = f(t)\ \forall t \in [-\pi,\pi)$.)

Nota 3.1.2 *La densidad de $\Pi(\mathbb{T})$ en $C(\mathbb{T})$ se sigue de (ii), siendo éste un método constructivo a diferencia del uso del teorema de Stone-Weierstrass.*

Teorema 3.1.8 *Sea $1 \leq p < \infty$ y sea K_ε un núcleo de sumabilidad. Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ entonces $K_\varepsilon * f$ converge a f en $L^p(\mathbb{T})$.*

Dem: Como en el resultado anterior para funciones continuas. Sea $\delta > 0$, escribimos

$$|f(t)-K_\varepsilon * f(t)| \leq \int_{|s|<\delta} |f(t)-f(t-s)||K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi} + \int_{|s|>\delta} |f(t)-f(t-s)||K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder y el hecho $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$ se obtiene

Entonces

$$|f(t) - K_\varepsilon * f(t)|^p \leq 2^{p-1}((\int_{|s|<\delta} |f(t) - f(t-s)||K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi})^p$$
$$+(\int_{|s|>\delta} |f(t) - f(t-s)||K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi})^p)$$
$$\leq 2^{p-1}\Big((\int_{|s|<\delta} |f(t) - f(t-s)|^p|K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi})(\int_{|s|<\delta} |K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi})^{p/q}$$
$$+(\int_{|s|>\delta} 2^{p-1}(|f(t-s)|^p + |f(t)|^p|K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi})(\int_{|s|>\delta} |K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi})^{p/q}\Big)$$

Integrando en la variable t se tiene

$$\begin{aligned}\|f - K_\varepsilon * f\|_p^p \quad &\leq \quad 2^{p-1}\Big((\int_{|s|<\delta} \|f - f_{-s}\|_p^p K_\varepsilon(s)\frac{ds}{2\pi}) \sup_{\varepsilon>0} \|K_\varepsilon\|_1^{p/q} \\ &+ \quad 2^p\|f\|_p^p(\int_{|s|>\delta} |K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi})^{p/q+1}\Big)\end{aligned}$$

Por un lado, dado $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que $\|f - f_{-s}\|_p < \eta$ si $|s| < \delta$.

Por otro lado dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon_0 > 0$ de modo que $\int_{|s|>\delta} |K_\varepsilon(s)|\frac{ds}{2\pi} < \eta$ para $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Por tanto, para el δ anterior

$$\|f - K_\varepsilon * f\|_p^p \leq 2^{p-1}\Big(\eta^p sup_{\varepsilon>0}\|K_\varepsilon\|_1^{p/q+1} + 2^p\|f\|_p^p\eta^{p/q+1}\Big).$$

Por tanto $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|f - K_\varepsilon * f\|_p = 0$. ∎

Corolario 3.1.9 *Sea $f \in L^p(\mathbb{T})$ para $1 \leq p < \infty$.*

(i) $\lim_{r\to 1^-} P_r * f = f$ en $L^p(\mathbb{T})$, (es decir, $A - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\varphi_n = f$.)

(ii) $\lim_{N\to\infty} K_N * f = f$ en $L^p(\mathbb{T})$, (es decir, $C - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\varphi_n = f$.)

Nota 3.1.3 *La densidad de $\Pi(\mathbb{T})$ en $L^p(\mathbb{T})$ se sigue de (ii). ¿Es cierto el resultado en $L^\infty(\mathbb{T})$?*

3.2 Convergencia puntual de la serie de Fourier

Intentaremos ahora atacar la convergencia puntual de la serie de Fourier para funciones integrables.

Teorema 3.2.1 *Sea K_ε un núcleo de sumabilidad con $K_\varepsilon(t) = K_\varepsilon(-t)$ y de modo que para todo $\alpha > 0$ se tiene*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{\alpha<|t|\leq\pi} |K_\varepsilon(t)| = 0.$$

Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $s \in [-\pi, \pi)$ de modo que existe $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(s+t)+f(s-t)}{2} = A$ entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} K_\varepsilon * f(s) = A.$$

DEM:

$$\begin{aligned} K_\varepsilon * f(s) - A \quad &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(s-t) - A)K_\varepsilon(t)\frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_{|t|\geq\alpha} (f(s-t) - A)K_\varepsilon(t)\frac{dt}{2\pi} \\ &+ \int_0^\alpha (f(s-t) + f(s+t) - 2A)K_\varepsilon(t)\frac{dt}{2\pi}. \end{aligned}$$

Elegimos entonces $\alpha > 0$ de modo que si $0 < t < \alpha$

$$|\frac{f(s-t) + f(s+t)}{2} - A| < \eta.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} |K_\varepsilon * f(s) - A| \quad &\leq \sup_{\alpha<|t|} |K_\varepsilon(t)| \int_{|t|\geq\alpha} |f(s-t) - A|\frac{dt}{2\pi} \\ &+2\int_0^\alpha |\frac{f(s-t) + f(s+t)}{2} - A||K_\varepsilon(t)|\frac{dt}{2\pi} \\ &\leq \sup_{\alpha<|t|} |K_\varepsilon(t)|(\|f\|_1 + A) + \eta \sup_{\varepsilon>0} \|K_\varepsilon\|_1 \end{aligned}$$

Usando ahora $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{\alpha<|t|\leq\pi} |K_\varepsilon(t)| = 0$ se termina la demostración.

∎

Corolario 3.2.2 *Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y supongamos que existen*

$$f(s^+) = \lim_{t\to 0^+} f(s+t), \quad f(s^-) = \lim_{t\to 0^+} f(s-t).$$

Entonces

$$\lim_{r\to 1^-} P_r(f)(s) = \frac{f(s^+)+f(s^-)}{2}.$$

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N(f)(s) = \frac{f(s^+)+f(s^-)}{2}.$$

Corolario 3.2.3 *Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y f es continua en t. Entonces*

$$(A) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{-int} = f(t).$$

$$(C) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{-int} = f(t).$$

Teorema 3.2.4 *(Lebesgue) Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y supongamos que existe $A \in \mathbb{C}$ tal que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h |\frac{f(s+t)+f(s-t)}{2} - A|\frac{dt}{2\pi} = 0.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(s) \to A.$$

Dem: Denotemos

$$\Phi(u) = \int_0^u |\frac{f(s+t)+f(s-t)}{2} - A|dt.$$

$$\sigma_n(f)(s) - A = 2\int_0^\pi K_n(t)(\frac{f(s+t)+f(s-t)}{2} - A)\frac{dt}{2\pi}.$$

Usando que $K_n(t) \le min\{n+1, \frac{\pi^2}{(n+1)t^2})$ y teniendo en cuenta que $n+1 = \frac{\pi^2}{(n+1)t^2} \iff t = \frac{\pi}{n+1}$ tenemos, para $\pi \ge \alpha_n \ge \frac{\pi}{n+1}$,

$$|\sigma_n(f)(s) - A| \;\; \le \;\; 2\int_0^{\alpha_n} |\frac{f(s+t)+f(s-t)}{2} - A|\frac{dt}{2\pi}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad 2\int_{\alpha_n}^{\pi} K_n(t)|\frac{f(s+t)+f(s-t)}{2} - A|\frac{dt}{2\pi} \\
&\leq \quad 2\int_{0}^{\alpha_n} K_n(t)|\frac{f(s+t)+f(s-t)}{2} - A|\frac{dt}{2\pi} \\
&+ \quad \frac{\pi^2}{(n+1)\alpha_n^2}(||f||_1 + |A|).
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\alpha_n} K_n(t)\Phi'(t)\frac{dt}{2\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{(n+1)}} K_n(t)\Phi'(t)\frac{dt}{2\pi} + \int_{\frac{\pi}{(n+1)}}^{\alpha_n} K_n(t)\Phi'(t)\frac{dt}{2\pi} \\
&\leq (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{(n+1)}} \Phi'(t)\frac{dt}{2\pi} + \frac{\pi^2}{n+1}\int_{\frac{\pi}{(n+1)}}^{\alpha_n} \frac{\Phi'(t)}{t^2}\frac{dt}{2\pi} \\
&\leq \frac{n+1}{2\pi}\Phi(\frac{\pi}{n+1}) + \frac{\pi}{2(n+1)}\left(\frac{\Phi(\alpha_n)}{\alpha_n^2} - \frac{\Phi(\frac{\pi}{n+1})}{(\frac{\pi}{n+1})^2}\right) \\
&+ \frac{\pi^2}{2(n+1)}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\alpha_n} \frac{\Phi(t)}{t^3}\frac{dt}{2\pi} \\
&\leq \frac{\pi}{2(n+1)}\frac{\Phi(\alpha_n)}{\alpha_n^2} + \frac{\pi^2}{2(n+1)}\max_{\frac{\pi}{n+1}<t<\alpha_n}\{\frac{\Phi(t)}{t}\}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{1}{t^2}\frac{dt}{2\pi} \\
&\leq \frac{\pi}{2(n+1)}\frac{\Phi(\alpha_n)}{\alpha_n^2} + \frac{\pi}{n+1}\max_{\frac{\pi}{n+1}<t<\alpha_n}\{\frac{\Phi(t)}{t}\}(\frac{n+1}{\pi} - \frac{1}{\pi}).
\end{aligned}
$$

Tomemos $\alpha_n = \frac{\pi}{(n+1)^{1/4}}$ para que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n^2(n+1) = \infty$ y usar la hipótesis para terminar la demostración. ■

Nuestro siguiente objetivo es ver que la serie de Fourier de funciones integrables converge en media Cèsaro a la función en casi todo punto.

Definición 3.2.5 *Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$ se llama función maximal de Hardy-Littlewood a*

$$
f^*(t) = \sup_{h>0}\frac{1}{m(J_h(t))}\int_{J_h(t)} |f(s)|dm = \sup_{h>0}\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |f(s)|ds
$$

donde $J_h(t) = \{e^{is} : t-h < s < t+h\}$.

Lema 3.2.6 *Sea $\Omega = \cup_{\alpha\in\mathcal{J}} I_\alpha$ un conjunto medible donde I_α son intervalos en $\mathbb{T}$. Existe una subfamilia contable de modo que*

$$m(\cup_{n=1}^\infty I_n) \geq \frac{1}{4} m(\Omega).$$

DEM: Sea $a_1 = \sup_{\alpha\in\mathcal{J}} m(I_\alpha)$. Tomemos un intervalo I_1 entre los mismos de modo que $m(I_1) > \frac{3}{4}a_1$. Sea, ahora, $\mathcal{J}_1 = \{\alpha \in \mathcal{J} : I_\alpha \cap I_1 = \varnothing\}$ y pongamos $\Omega_1 = \cup_{\alpha\in\mathcal{J}_1} I_\alpha$. Es claro que $\Omega_1 \cup I_1$ es una unión disjunta y $\Omega \subset \Omega_1 \cup \tilde{I}_1$, donde $\tilde{I}$ significa un intervalo del mismo centro que I pero de radio 4 veces el radio de I. (Nótese que si $t \in \Omega$ entonces o bien existe $\alpha \in \mathcal{J}_1$ tal que $t \in I_\alpha$ o bien siempre que $t \in I_\beta$ se tiene $I_\beta \cap I_1 \neq \varnothing$ y, como $m(I_\beta) \leq a_1$ entonces $I_\beta \subset \tilde{I}_1$.)

Reiteremos el proceso. Sea $a_2 = \sup_{\alpha\in\mathcal{J}_1} m(I_\alpha)$. Tomemos un intervalo I_2 entre los anteriores de modo que $m(I_2) > \frac{3}{4}a_2$. Sea, ahora, $\mathcal{J}_2 = \{\alpha \in \mathcal{J}_1 : I_\alpha \cap I_2 = \varnothing\}$ y pongamos $\Omega_2 = \cup_{\alpha\in\mathcal{J}_2} I_\alpha$. Es claro que $\Omega_2 \cup I_1 \cup I_2$ es una unión disjunta y $\Omega \subset \Omega_2 \cup \tilde{I}_1 \cup \tilde{I}_2$.

Reiterando el proceso n-veces tendremos $a_n = \sup_{\alpha\in\mathcal{J}_{n-1}} m(I_\alpha)$. Tomemos un intervalo I_n entre los anteriores de modo que $m(I_n) > \frac{3}{4}a_n$. Sea, ahora, $\mathcal{J}_n = \{\alpha \in \mathcal{J}_{n-1} : I_\alpha \cap I_n = \varnothing\}$ y pongamos $\Omega_n = \cup_{\alpha\in J_n} I_\alpha$.

Es claro que $\Omega_n \cup I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n$ es una unión disjunta y $\Omega \subset \Omega_n \cup \tilde{I}_1 \cup \tilde{I}_2 \cup ... \cup \tilde{I}_n$.

Si el proceso se acaba en un número finito de pasos, digamos N, tendremos $\Omega = \Omega' \cup (\cup_{n=1}^N I_n)$ con $\Omega' = \cup_{\alpha\in J_N} I_\alpha$, $I_\alpha \cap I_N \neq \varnothing$ para todo $\alpha \in \mathcal{J}_N$ (y por tanto $\Omega' \subset \tilde{I}_N$). Además $\Omega \subset \cup_{n=1}^N \tilde{I}_n$ y asi

$$m(\Omega) \leq \sum_{n=1}^N m(\tilde{I}_n) = 4\sum_{n=1}^N m(I_n).$$

En el caso de un número infinito de pasos, tenemos a_n decreciente a 0 ya que $a_n \leq \frac{4}{3}m(I_n)$ y $\sum_{n=1}^\infty m(I_n) < \infty$ y $\cap_{n=1}^\infty \Omega_k = \varnothing$ de donde se sigue que para cada I_α existe k_0 de modo que $I_\alpha \cap I_{k_0} \neq \varnothing$ e $I_\alpha \cap I_k = \varnothing$ para $k < k_0$, y por consiguiente $I_\alpha \subset \tilde{I}_{k_0}$.

Esto garantiza que $\Omega \subset \cup_{n=1}^\infty \tilde{I}_n$ y de ahí

$$m(\cup_{n=1}^\infty I_n) \geq \frac{1}{4} m(\Omega).$$

■

Teorema 3.2.7 *(Desigualdad $1-1$-débil) Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces*

$$m(\{t \in \mathbb{T} : f^*(t) > \lambda\}) \leq \frac{4||f||_1}{\lambda}.$$

Dem: Dado $\lambda > 0$ tomemos un intervalo I_t de modo que

$$\frac{1}{m(I_t)} \int_{I_t} |f(s)| \frac{ds}{2\pi} > \lambda.$$

Pongamos, ahora, $\Omega = \{t \in \mathbb{T} : f^*(t) > \lambda\} = \cup_{t \in \Omega} I_t$.

Entonces, aplicando el lema previo,

$$\begin{aligned} m(\{t \in \mathbb{T} : f^*(t) > \lambda\}) \quad & \leq 4m(\cup_{n\in\mathbb{N}} I_n) \\ & \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) \leq \frac{4}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} |f(s)| \frac{ds}{2\pi} \\ & \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) \leq \frac{4}{\lambda} \int_{\cup_{n\in\mathbb{N}} I_n} |f(s)| \frac{ds}{2\pi} \\ & \leq \frac{4}{\lambda} ||f||_1. \end{aligned}$$

■

Teorema 3.2.8 *(Diferenciación de Lebesgue) Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |f(s) - f(t)| ds = 0 \qquad a.e.\ t \in \mathbb{T}.$$

Dem: Supongamos que f es continua. Veamos que para todo $t \in \mathbb{T}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |f(s) - f(t)| ds = 0.$$

En efecto, definimos para $t \in \mathbb{T}$,

$$F_t(x) = \int_0^x |f(s) - f(t)| \frac{ds}{2\pi},\ x \geq 0$$

$$F_t(x) = \int_x^0 |f(s) - f(t)| \frac{ds}{2\pi},\ x < 0.$$

Es claro que F_t es derivable para todo $x \in \mathbb{T}$ y $F_t'(t) = 0$.

Dada, ahora, $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $\varepsilon > 0$ existe $g \in C(\mathbb{T})$ con $||f - g||_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Veamos que

$$m(\{t : \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |f(s) - f(t)|ds \neq 0\}) = 0.$$

Como

$$\{t : \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |f(s) - f(t)|ds \neq 0\} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \{t : \limsup_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |f(s) - f(t)|ds > \frac{1}{n}\}.$$

Es suficiente probar que

$$m(\{t : \limsup_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |f(s) - f(t)|ds > \lambda\}) = 0$$

para cada $\lambda > 0$.

Como

$$|f(s) - f(t)| \leq |f(s) - g(s)| + |g(s) - g(t)| + |g(t) - f(t)|,$$

entonces

$$\limsup_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |f(s) - f(t)|ds \leq \limsup_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |f(s) - g(s)|ds + |g(t) - f(t)|.$$

$$\begin{aligned} m(\{t : \limsup_{h\to 0} & \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |f(s) - f(t)|ds > \lambda\}) \leq \\ & \leq m(\{t : \limsup_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |f(s) - g(s)|ds > \frac{\lambda}{2}\}) \\ & + m(\{t : |g(t) - f(t)| > \frac{\lambda}{2}\}) \\ & \leq m(\{t : (f - g)^*(t) > \frac{\lambda}{2}\}) \\ & + m(\{t : |g(t) - f(t)| > \frac{\lambda}{2}\}) \leq \frac{C}{\lambda}||f - g||_1. \end{aligned}$$

■

Corolario 3.2.9 *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces*

$$(C) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{-int} = f(t), \qquad m - a.e.$$

DEM: Llamaremos un punto de Lebesgue de la función f al valor t tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |f(s) - f(t)|ds = 0.$$

Usando el teorema de diferenciación de Lebesgue se tiene que casi todo punto es un punto de Lebesgue. Tomando $A_0 = f(t)$ en el teorema de Lebesgue de convergencia Césaro se tiene

$$m(\{t : \limsup_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |\frac{f(t+s) - f(t-s)}{2} - f(t)|ds > 0\}) = 0$$

y $\sigma_n(f)(t) \to f(t)$ en todo punto de Lebesgue, y por consiguiente a.e. ∎

Para estudiar el comportamiento de la convergencia Abel necesitaremos los siguientes lemas.

Lema 3.2.10 *Sea s una función simple, par, monótona decreciente y no negativa en $[0, \pi)$ y sea $f \in L^1(\mathbb{T})$. Entonces para todo $t \in [-\pi, \pi)$*

$$|s * f(t)| \leq ||s||_1 f^*(t).$$

DEM: Escribimos

$$s = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{[a_k, a_{k+1}]} + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{[-a_{k+1}, -a_k]}$$

donde $\alpha_{k+1} \geq \alpha_k$ y $a_k \leq a_{k+1}$.

Es claro que $||s||_1 = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N} \alpha_k(a_{k+1} - a_k)$. También puede ponerse

$$s = \sum_{j=1}^{N} \beta_j \chi_{[-a_j, a_j]}$$

donde $\beta_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$. Entonces $||s||_1 = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{N}(\alpha_j - \alpha_{j-1})a_j$.

Notemos que si $f \geq 0$ entonces

$$s * f(t) = \sum_{j=1}^{N} \beta_j \frac{a_j}{\pi}(f * \frac{\pi}{a_j}\chi_{[-a_j,a_j]})(t) \leq \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{N} \beta_j a_j f^*(t) = ||s||_1 f^*(t).$$

El caso de f arbitaria se sigue usando $|s * f| \leq s * |f|$. ∎

Lema 3.2.11 *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces*

$$P^*(f)(t) = \sup_{0<r<1} |P_r * f(t)| \leq f^*(t).$$

DEM: Como $P_r = \lim_{n\to\infty} s_n$ donde s_n es una sucesión monótona creciente de funciones simples como en el Lema 1, se tiene que $s_n * f(t)$ converge de manera creciente a $P_r * f(t)$.

Supongamos $f \geq 0$. Aplicando del teorema de la convergencia monótona de Lebesgue y el Lema 1 se tiene el resultado, puesto que $\|s_n\|_1$ converge a $\|P_r\|_1$.

Caso general se sigue del anterior por la estimación $|P_r * f|(t) \leq P_r * |f|(t)$. ∎

Corolario 3.2.12 *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces*

$$(A) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{-int} = f(t), \qquad m - a.e.$$

DEM: Es sabido que que $P_r * f(t) \to f(t)$ para todo $t \in [-\pi, \pi)$ si f es continua y además $m(\{t : P^*(f)(t) > \lambda\}) \leq \frac{4}{\lambda}||f||_1$. Es suficiente ver que

$$m(\{t : \limsup_{r\to 1} |P_r * f(t) - f(t)| > \lambda\}) = 0$$

para todo $\lambda > 0$.

En efecto, dado $\varepsilon > 0$ existe $g \in C(\mathbb{T})$ tal que $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Ahora

$$|P_r * f(t) - f(t)| \leq |P_r * f(t) - P_r * g(t)| + |P_r * g(t) - g(t)| + |g(t) - f(t)|,$$

entonces

$$\limsup_{r\to 0} |P_r * f(t) - f(t)| \leq \sup_{0<r<1} |P_r * (f - g)(t)| + |g(t) - f(t)|.$$

$$\begin{aligned} m(\{t : \limsup_{r\to 0} |P_r * f(t) - f(t)| > \lambda\}) &\leq m(\{t : P^*(f-g)(t) > \frac{\lambda}{2}\}) \\ &+ m(\{t : |g(t) - f(t)| > \frac{\lambda}{2}\}) \\ &\leq \frac{C}{\lambda}||f-g||_1 < \frac{C}{\lambda}\varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando el límite en ε se tiene el resultado. ∎

Estudiaremos a continuación la situación la convergencia de la serie de Fourier para funciones continuas y veremos que nada puede esperarse en este caso.

Teorema 3.2.13 *Existe una función $f \in C(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier diverge en $t = 0$.*

DEM: Recordemos (ver demostración de la no convergencia de la serie de Fourier en $C(\mathbb{T})$) que existen $C > 0$, y funciones $\phi_n \in C(\mathbb{T})$ con $||\phi_n||_\infty \leq 1$ y $|S_n\phi_n(0)| \geq Clog(n)$.

Ahora tomar $\xi_n(t) = \sigma_{n^2}(\phi_n)(t)$. Nótese que

$$\begin{aligned} ||S_n(\xi_n) - S_n(\phi_n)||_\infty &= ||\sigma_{n^2} S_n(\phi_n) - S_n(\phi_n)||_\infty \\ &= sup\{|\sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n^2+1}\hat{\phi}_n(k)e^{ikt}|\} \\ &\leq \frac{1}{n^2+1}\sum_{k=-n}^{n}|k| \leq 2. \end{aligned}$$

De aqui

$$\begin{aligned} |S_n\xi_n(0)| &\geq |S_n\phi_n(0) + S_n\xi_n(0) - S_n\phi_n(0)| \\ &\geq |S_n\phi_n(0)| - ||S_n(\xi_n) - S_n(\phi_n)||_\infty \\ &\geq Clog(n) - 2. \end{aligned}$$

Ahora tomamos una subsucesón (λ_n) creciente tal que $\lambda_n > n$ (que fijaremos después) y definimos

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\xi_{\lambda_n}(\lambda_n t).$$

Nótese que

$$\xi_{\lambda_n}(\lambda_n t) = \sum_{k=-\lambda_n^2}^{\lambda_n^2} \hat{\phi}_{\lambda_n}(k)(1 - \frac{|k|}{\lambda_n^2+1})e^{i\lambda_n kt}$$

es un polinomio de grado λ_n^3.

Para $k \in \mathbb{N}$ escribiremos la descomposición

$$f(t) = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^2}\xi_{\lambda_n}(\lambda_n t) + \frac{1}{k^2}\xi_{\lambda_k}(\lambda_k t) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\xi_{\lambda_n}(\lambda_n t).$$

Eligamos λ_n de modo que $\lambda_k^2 \geq \lambda_n^3$ si $n < k$, entonces

$$S_{\lambda_k^2}(\xi_{\lambda_n})(\lambda_n t) = (\xi_{\lambda_n})(\lambda_n t), \quad n < k$$

y tomando también $\lambda_k^2 < \lambda_{k+1}$ se tendrá para $n > k$

$$S_{\lambda_k^2}(\xi_{\lambda_n})(\lambda_n t) = S_{\lambda_k^2}(\hat{\xi}_{\lambda_n}(0) + \hat{\xi}_{\lambda_n}(1)e^{i\lambda_n t} + ...) = \hat{\xi}_{\lambda_n}(0).$$

Como, además $S_{\lambda_k^2}(\xi_{\lambda_k})(0) = S_{\lambda_k}(\xi_{\lambda_k})(0)$, se tendrá entonces

$$S_{\lambda_k^2}f(0) = \frac{1}{k^2}S_{\lambda_k}(\xi_{\lambda_k})(0) + \sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{n^2}\xi_{\lambda_n}(0) + \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\hat{\xi}_{\lambda_n}(0).$$

Por consiguiente

$$|S_{\lambda_k^2}f(0)| \geq \frac{C}{k^2}log(\lambda_k) - 2 - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j^2}|\xi_{\lambda_j}(0)| - \sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{j^2}|\hat{\xi}_{\lambda_j}(0)| \geq Clog(\lambda_k)k^2 - C'.$$

Y eligiendo λ_k de modo que $\frac{log(\lambda_k)}{k^2} \to \infty$ cuando $k \to \infty$ se tendrá que $f \in C(\mathbb{T})$ y el $\lim_{n\to\infty} S_{\lambda_n^2}(f)(0) = \infty$. Finalmente mencionar que $\lambda_n = 2^{3^n}$ es un ejemplo verificando todas las condiciones.

■

Algunas condiciones simples que implican la convergencia puntual de la serie de Fourier.

Teorema 3.2.14 *(Test de Dini) Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que*

$$\int_{-1}^{1} |\frac{f(t+t_0) - f(t_0)}{t}|dt < \infty.$$

Entonces

$$lim_{n\to\infty}S_n(f)(t_0) = f(t_0).$$

DEM: Haremos previamente el siguiente caso:

Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\int_{-1}^{1} |\frac{f(t)}{t}|dt < \infty$. Veamos que $lim_{n\to\infty} S_n(f)(0) = 0$.

$$\begin{aligned} S_n(f)(0) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{sen(n+\frac{1}{2})t}{sen\frac{t}{2}}\frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)cos(nt)\frac{dt}{2\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{cos\frac{t}{2}sen(nt)}{sen\frac{t}{2}}\frac{dt}{2\pi}. \end{aligned}$$

La hipótesis garantiza que $g(t) = f(t)\frac{cos\frac{t}{2}}{sen\frac{t}{2}} \in L^1(\mathbb{T})$ y por tanto, usando el lema de Riemann-Lebesgue,

$$S_n(f)(0) = \frac{\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)}{2} + \frac{\hat{g}(-n) - \hat{g}(n)}{2i} \to 0, (n \to \infty).$$

Sea ahora $g(t) = f(t+t_0) - (t_0)$. Entonces $\hat{g}(n) = e^{int_0}\hat{f}(n) - f(t_0)\delta_{n,0}$, de donde se sigue que $S_n(g)(0) = S_n(f)(t_0) - f(t_0)$ y basta aplicar el caso anterior. ■

Teorema 3.2.15 *Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y existe $C > 0$ tal que $|\hat{f}(n)| \le \frac{C}{|n|}, (n \ne 0)$. Entonces $S_n(f)(t)$ converge a A si y sólo si $\sigma_n(f)(t)$ converge a A.*

DEM: Sólo hay que probar que si $\sigma_n(f)(t)$ converge a A entonces $S_n(f)(t)$ converge a A.

Paso 1.- Sea $m > n$ entonces

$$S_n(f)(t) = \frac{m+1}{m-n}\sigma_m(f)(t) - \frac{n+1}{m-n}\sigma_n(f)(t) - \frac{m+1}{m-n}\sum_{n<|j|\le m}(1-\frac{|j|}{m+1})\hat{f}(j)e^{ijt}.$$

En efecto, si $|j| > n$,

$$\hat{S}_n(f)(j) = 0 = \frac{m+1}{m-n}\hat{\sigma}_m(f)(j) - \frac{m+1}{m-n}(1-\frac{|j|}{m+1})\hat{f}(j).$$

Si $|j| \le n$,

$$\hat{S}_n(f)(j) \quad = \hat{f}(j)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{m+1}{m-n}\hat{\sigma}_m(f)(j) - \frac{n+1}{m-n}\hat{\sigma}_n(f)(j) \\
&= (\frac{m+1}{m-n}(1-\frac{|j|}{m+1}) - \frac{n+1}{m-n}(1-\frac{|j|}{n+1}))\hat{f}(j) \\
&= (\frac{m+1-|j|}{m-n} - \frac{n+1-|j|}{m-n})\hat{f}(j).
\end{aligned}
$$

Paso 2.- Pongamos $A = \sigma(f)(t)$. Descomponiendo $1 = \frac{[\lambda n]+2}{[\lambda n]+1-n} - \frac{n+1}{[\lambda n]+1-n}$ se puede poner

$$
\begin{aligned}
|S_n(f)(t) - \sigma(f)(t)| \quad &\leq |S_n(f)(t) - \frac{[\lambda n]+2}{[\lambda n]+1-n}\sigma_{[\lambda n]+1}(f)(t) \\
&+ \frac{n+1}{[\lambda n]+1-n}\sigma_n(f)(t)| \\
&+ |\frac{[\lambda n]+2}{[\lambda n]+1-n}(\sigma_{[\lambda n]+1}(f)(t) - \sigma(f)(t))| \\
&+ |\frac{n+1}{[\lambda n]+1-n}(\sigma(f)(t) - \sigma_n(f)(t))| \\
&\leq \frac{[\lambda n]+2}{[\lambda n]+1-n}\sum_{n<|j|\leq[\lambda n]+1}(1-\frac{|j|}{[\lambda n]+2})|\hat{f}(j)| \\
&+ \frac{\lambda n+2}{(\lambda-1)n}|\sigma_{[\lambda n]+1}(f)(t) - \sigma(f)(t)| \\
&+ \frac{n+1}{(\lambda-1)n}|\sigma_n(f)(t) - \sigma(f)(t)|.
\end{aligned}
$$

Obsérvese que

$$
\frac{[\lambda n]+2}{[\lambda n]+1-n}\sum_{n<|j|\leq[\lambda n]+1}(1-\frac{|j|}{[\lambda n]+2})|\hat{f}(j)| \leq
$$

$$
\leq \frac{[\lambda n]+1-n}{[\lambda n]+1-n}\sum_{n<|j|\leq[\lambda n]+1}|\hat{f}(j)| \leq C\sum_{n<|j|\leq[\lambda n]+1}\frac{1}{|j|}.
$$

Por consiguiente

$$
\begin{aligned}
|S_n(f)(t) - \sigma(f)(t)| \quad &\leq C\sum_{n<|j|<[\lambda n]+1}\frac{1}{|j|} \\
&+ \frac{\lambda+2}{\lambda-1}|\sigma_{[\lambda n]+1}(f)(t) - \sigma(f)(t)|
\end{aligned}
$$

$$+\frac{2}{\lambda-1}|\sigma_n(f)(t)-\sigma(f)(t)|.$$

Paso 3.- Sea $\lambda > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces$\sum_{n<|j|\leq[\lambda n]} \frac{1}{|j|} \leq 2log(\lambda + \frac{1}{n})$.
En efecto

$$\sum_{n<|j|\leq[\lambda n]} \frac{1}{|j|} \leq 2\int_n^{[\lambda n]} \frac{dx}{x} \leq 2log(\lambda+\frac{1}{n}).$$

Dado $\varepsilon > 0$ existen $2 > \lambda_0 > 1$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $log(\lambda + \frac{1}{n}) < \frac{\varepsilon}{3C}$ si $\lambda_0 \leq \lambda < 1, n \geq n_0$.

Apliquemos entonces el proceso anterior a λ_0 y $n \geq n_0$ quedando entonces

$$\begin{aligned} |S_n(f)(t)-\sigma(f)(t)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{4}{\lambda_0-1}|\sigma_{[\lambda n]+1}(f)(t)-\sigma(f)(t)| \\ &+\frac{2}{\lambda_0-1}|\sigma_n(f)(t)-\sigma(f)(t)|. \end{aligned}$$

Ahora existe $n_1 \in \mathbb{N}$, con $n_1 \geq n_0$ tal que $|\sigma_n(f)(t)-\sigma(f)(t)| < \frac{\varepsilon(\lambda_0-1)}{12}$ si $n \geq n_1$ y se obtiene finalmente que para $n \geq n_1$ tenemos $|S_n(f)(t) - \sigma(f)(t)| \leq \varepsilon$. ∎

Corolario 3.2.16

(i) Sea f una función real de variación acotada.
Entonces $lim_{n\to\infty} S_n(f)(t) = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$.
(ii) Sea f una función absolutamente continua.
Entonces $lim_{n\to\infty} S_n(f)(t) = f(t)$ para todo t.

DEM: (i) Podemos escribir $f = f_1 - f_2$ donde $f_i \geq 0$ monótonas crecientes y tomemos las medidas de Borel-Stieltjes asociadas. Es inmediato comprobar que $\hat{f}(n) = O(\frac{1}{|n|})$.

(ii) Ejercicio. ∎

Veamos una prueba directa (usando sólo la definición) del la información usada en el apartado (i) anterior.

Recordemos que $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ se dice de variación acotada si existe $C > 0$ tal que para toda partición $t_0 = -\pi < t - 1 < ... < t_n = \pi$ se cumple que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq C.$$

Lema 3.2.17 *Sea $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$ periódica y de variación acotada. Entonces existe $K > 0$ $|\hat{f}(n)| \le \frac{K}{|n|}$ para $n \neq 0$.*

DEM: Escribimos para $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\frac{dt}{2\pi} &= \sum_{k=-n}^{n-1}\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(t)e^{-int}\frac{dt}{2\pi} \\ &= \sum_{k=-n}^{n-1}\int_{0}^{\frac{\pi}{n}} f(t+\frac{k\pi}{n})e^{-in(t+\frac{k\pi}{n})}\frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{n}}\Big(\sum_{k=-n}^{n-1} f(t+\frac{k\pi}{n}(-1)^k)e^{-int}\Big)\frac{dt}{2\pi}.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\frac{dt}{2\pi}| &\le \int_{0}^{\frac{\pi}{n}}|\sum_{k=-n}^{n-1} f(t+\frac{k\pi}{n}(-1)^k)e^{-int}|\frac{dt}{2\pi} \\ &\le \int_{0}^{\frac{\pi}{n}}\sum_{k=-n}^{n-1}|f(t+\frac{k\pi}{n}-f(t+\frac{(k+1)\pi}{n}|\frac{dt}{2\pi} \\ &\le C\frac{\pi}{n}.\end{aligned}$$

■

3.3 Ejercicios propuestos

Cuestiones propuestas.

Ejercicio 3.3.1 *Probar que $H^1(\mathbb{T}) = \{f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0 \quad \forall n < 0\}$ es un ideal cerrado de $\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$.*

Ejercicio 3.3.2 *Resuelve la ecuación $f * f = f$ en $\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$.*

Ejercicio 3.3.3 *(i) Sea $f \in AC(\mathbb{T})$. Prueba que $\hat{f}(n) = o(\frac{1}{n})$.*

(ii) Sea $f \in VA(\mathbb{T})$. Prueba que $|\hat{f}(n)| \le \frac{V_{-\pi}^{\pi}(f)}{2\pi|n|}$.

(iii) Sea $f \in Lip_\alpha(\mathbb{T})$ donde $0 < \alpha < 1$. Prueba que $|\hat{f}(n)| \le \frac{C}{n^\alpha}$.

Ejercicio 3.3.4 *Sea $f \in C^1(0,\pi)$ tal que $f(0)=0,\ f(\pi)=0$. Demuestra la desigualdad de Wirtinger:*

$$\int_0^\pi |f|^2 \leq \int_0^\pi |f'|^2$$

Ejercicio 3.3.5 *Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ con $\hat{f}(n) = O(|n|^{-k})$. Muestra que $f \in AC(\mathbb{T})$ con $f' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ si y sólo si $k > \frac{3}{2}$.*

Ejercicio 3.3.6 *Sean $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$. Prueba que la serie de Forier de $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$. Demuestra que*

$$\widehat{fg}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n-k)\hat{g}(k),$$

siendo la serie absolutamente convergente. Sugerencia: probarlo primero para las sumas parciales N-ésimas de Fourier $S_N(f,x)$ y $S_N(g,x)$ y probar que la sucesión $(S_N(f,x)S_N(g,x))_{N=1}^{\infty}$ es $\|.\|_1$-convergente a fg.

Ejercicio 3.3.7 *Prueba que $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ es un álgebra con la convolución. Prueba que f no es primo si y sólo si $f \in A(\mathbb{T})$.*

Ejercicio 3.3.8 *Sea $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ y sea $g = \Re f$. Demuestra que $\hat{g}(n) = \frac{\hat{f}(n)+\overline{\hat{f}(-n)}}{2}$.*

Ejercicio 3.3.9 *Sea una función $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ con serie de Fourier en forma trigonométrica*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

(1) Prueba que f es c.p.p. par si y sólo si $b_k = 0$ para todo $k = 1, 2 \ldots$.
(2) Prueba que f es c.p.p. impar si y sólo si $a_k = 0$ para todo $k = 0, 1, 2 \ldots$.

Ejercicio 3.3.10 *Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T}),\ x_0 \in \mathbb{R}$ y*

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)|}{t}dt < \infty,$$

entonces la serie de Fourier de f converge a f en x_0. (Ayuda ver Criterio de Dini)

Ejercicio 3.3.11 *Demuestra que, dado $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$:*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x+2\pi\frac{k}{n}) = \|\ \|_2 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(kn)e^{iknx}$$

Deduce que:

$$\|\ \|_2 - \lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x+2\pi\frac{k}{n}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt.$$

Ejercicio 3.3.12 *Si $f \in AC(\mathbb{T}),\ f' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$, demuestra que:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{T})} + \sqrt{2\sum_{1}^{\infty} n^{-2}\|f'\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{T})}}$$

y por lo tanto la serie de Fourier de f converge a f.

Problemas propuestos.

Ejercicio 3.3.13 *Halla la serie de Fourier de:*

1. $f(x) = e^{bx}, \qquad x \in [-\pi,\pi]$

   Solución:
   $$\frac{shb\pi}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{b-ki}e^{ikt}$$

2. $f(x) = x, \qquad x \in [-\pi,\pi]$

   Solución:
   $$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kt$$

3. $f(x) := \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

   Solución:
   $$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kt.$$

4. $f(x) = \sin(\frac{3}{2}x), \qquad x \in [-\pi, \pi)$

Solución:
$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}k}{\frac{9}{4}-n^2}\sin kt$$

5. $f(x) := \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

Solución:
$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}$$

6. $f(x) := \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

Solución:
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}$$

7. $f(x) := x(\pi - |x|), \qquad \pi \leq x \leq \pi.$

Solución:
$$\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)t}{(2k-1)^3}$$

8. $f(x) := |\cos x|, \qquad \pi \leq x \leq \pi.$

Solución:
$$\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos 2kt}{4k^2-1}$$

9. $f(x) := \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \sin x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

Solución:
$$\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kt}{4k^2-1}+\frac{1}{2}\sin t.$$

10. $f(x) = \sin^3 x$

Solución:
$$-\frac{1}{4}\sin 3t+\frac{3}{4}\sin t.$$

Ejercicio 3.3.14 *Demuestra que*

(i) $sen^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

(ii) $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \qquad x \in [-\pi, \pi]$

(iii) $sen^5 x = \frac{5}{8}\sin x - \frac{5}{16}\sin(3x) + \frac{1}{16}\sin(5x) \qquad x \in \mathbb{R}$

(iv) $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \qquad x \in [-\pi, \pi] \qquad x \in [-\pi, \pi],$

(v) $|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)} \qquad x \in [-\pi, \pi].$

Ejercicio 3.3.15 *Demuestra que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+16n(n-1)} = \frac{\pi}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+b^2} = \frac{\pi}{2b}\operatorname{csch} b\pi - \frac{1}{2b^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+b^2} = \frac{\pi}{2b}\coth b\pi - \frac{1}{2b^2}$$

Ejercicio 3.3.16 *Prueba que, dado* $z \in \mathbb{C} - \mathbf{Z}, \quad -\pi \le t \le \pi:$

$$\cos(zt) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} + \frac{2z\sin(\pi z)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nt)}{z^2-n^2},$$

$$\pi\cot(\pi z) - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2},$$

$$\log(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}) = \sum_{n=1}^{\infty}\log(1 - \frac{x^2}{n^2}),$$

Ejercicio 3.3.17 *Prueba que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

Ejercicio 3.3.18 *Demuestra que*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Sugerencia: Utilizar que:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} = (1+e^{ix})^n$$

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{i(2kx-2nx)} = 2^{2n}\cos^{2n} x$$

Chapter 4

Análisis de Fourier en $\mathbb{R}^n$

4.1 Espacios de funciones continuas e integrables en $\mathbb{R}^n$

Consideramos el espacio de medida de Lebesgue $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue m_n. No es un grupo compacto, sino localmente compacto. En $\mathbb{R}^n$ tenemos la ley $+$ como estructura de grupo y denotamos $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ la norma que da lugar a la topología euclídea sobre el mismo.

Definición 4.1.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una función continua. Se llama soporte de la función al conjunto $sop(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$. Utilizamos las notaciones*

$$C_{00}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C};\ \textit{funciones continuas con soporte compacto}\ \}.$$

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C};\ \textit{funciones continuas con}\ \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}.$$

$C_0(\mathbb{R}^n)$ con el producto puntual $f.g(t) = f(t).g(t)$ y la norma $||f||_\infty = sup_{t\in\mathbb{R}^n}|f(t)|$ es un álgebra de Banach conmutativa sin unidad pero con unidad aproximada acotada.

Basta tomar $\phi_k(x_1, ..., x_n) = e_k(x_1)e_k(x_2)...e_k(x_n)$ donde $e_k(t) = 1$ para todo $t \in [-k, k]$, $e_k(t) = t - (k + 1)$ si $t \in [k, k + 1]$ y $e_k(t) = k + 1 - t$ si $t \in [-k - 1, -k]$.

Proposición 4.1.2 *$C_{00}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $C_0(\mathbb{R}^n)$.*

DEM: Ejercicio. ∎

Definición 4.1.3 *Sea $1 \leq p < \infty$. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ se dice p-integrable Lebesgue si es medible Lebesgue y $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dm_n(x) < \infty$.*

Nótese que si $f = 0$ en cAsí todo punto entonces f es medible Lebesgue y $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dm_n(x) = 0$.

Entre las funciones p-integrables consideramos la siguiente relación de equivalencia: Sean f, g medibles Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$, $f \approx g$ si $f = g$ en cAsí todo punto, i.e $m_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Definimos las clases de equivalencia

$$[f] = \{g \text{ medibles Lebesgue en } \mathbb{R}^n \text{ con } g = f a.e\}.$$

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ clases de funciones p-integrables Lebesgue}\}.$$

Una colección de funciones p-integrables son las funciones simples:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f(x) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{A_k}(t) : N \in \mathbb{N}, \alpha_k \in \mathbb{C}, A_k \text{ medibles con } m_n(A_k) < \infty\}.$$

Proposición 4.1.4 *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces $L^p(\mathbb{R}^n)$ un espacio de Banach con la norma dada por $||f||_p = (\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dm_n(x))^{1/p}$.*

DEM: Análoga al caso del toro $\mathbb{T}$. ∎

Proposición 4.1.5 *Sea $1 \leq p < \infty$. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

DEM:

Supongamos que $f \geq 0$. Definimos, para $k \in \mathbb{N}, j \in \{0, 1, ..., k2^k - 1\}$,

$$E_{j,k} = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{j}{2^k} \leq f(x) < \frac{j+1}{2^k}\}$$

y escribimos $s_k = \sum_{j=0}^{k2^k-1} \frac{j}{2^k} \chi_{E_{j,k}} + k\chi_{\{x:f(x)>k\}}$.

Es sencillo ver que $\lim_{k\to\infty} s_k(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ de manera creciente. Debido a la estimación

$$|s_k(x) - f(x)|^p \leq f^p(x)$$

podemos usar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para obtener que $\lim_{k\to\infty} s_k = f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Veamos que $s_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, es decir que $m_n(E_{j,k}) < \infty$ y que $m_n(\{x : f(x) > k\}) < \infty$.

Se sigue de la desigualdad de Tchebichev,

$$m_n(E_{j,k}) \leq m_n(\{x : f(x) > \frac{j}{2^k}\}) \leq \frac{2^{pk}}{j^p}\|f\|_p^p < \infty.$$

Análogamente el otro conjunto.

El caso general se sigue de descomponer $f = (Ref)^+ - (Ref)^- + i(Imf)^+ - i(Imf)^-$. ∎

Proposición 4.1.6 *Sea $1 \leq p < \infty$. $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

DEM: Observar en primer lugar que $C_{00}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.

Sea $f \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ y sea $K = sop(f)$. Obviamente

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dm_n(x) \leq (\max\{|f(x)| : x \in K\})^p m_n(K) < \infty.$$

Supongamos $f = \chi_E$ con E medible de medida finita. Dado $\varepsilon > 0$ y cada E con $m_n(E) < \infty$ existen un compacto K y un abierto G con $K \subset E \subset G$ y de modo que $m(G \setminus K) < \frac{\varepsilon^p}{2^p}$.

Ahora, usando el Lema de Uryshon (para $\mathbb{R}^n$), tomar $\phi \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ de modo que $0 \leq \phi(x) \leq 1$, $\phi(x) = 1$ si $x \in K$ y $\phi(x) = 0$ si $x \notin G$.

Es claro que

$$\begin{aligned} ||f - \phi||_p^p &= \int_G |\chi_E(x) - \phi(x)|^p dm_n(x) \\ &= \int_{G\setminus K} |\chi_E(x) - \phi(x)|^p dm_n(x) \\ &\leq 2^p m_n(G \setminus K) < \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ el resultado se sigue por el caso anterior. Para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, usando la densidad de la simples se deduce el resultado. ∎

Definición 4.1.7 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una función medible. Diremos que está esencialmente acotada si existe $M \geq 0$ tal que $|f| \leq M$ a.e. es decir*

$$m_n(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > M) = 0$$

o bien $m_f(M) = 0$ para algún valor $M \geq 0$. Al valor M se le dice cota esencial de $|f|$.

Denotamos $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ el espacio de la clases de equivalencia de funciones esencialmente acotadas y ponemos

$$\|f\|_\infty = \inf\{M : |f| \leq M a.e.\}.$$

Los siguientes resultados tienen la misma demostración que en el caso $\mathbb{T}$, y por tanto no la incluimos.

Proposición 4.1.8 *Sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$\|f\|_\infty = \min\{\sup_{x \notin N} |f(x)| : m_n(N) = 0\}.$$

Proposición 4.1.9 *$L^\infty(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach.*

Proposición 4.1.10 *$C_0(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio cerrado de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y la clausura de $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ coincide con $C_0(\mathbb{R}^n)$.*

Ejercicio 4.1.1 *Demostrar que no existe relación de contenidos entre los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ para diferentes valores de p y que $C_0(\mathbb{R}^n)$ no está incluido en $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

4.2 Transformada de Fourier.

Definición 4.2.1 *(Operador traslación) Sea $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$, definimos $f_x(y) = f(x+y)$. Denotamos $\tau_x : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ la aplicación $\tau_x(f) = f_x$.*

Esta operación genera un representación del grupo $\mathbb{R}^n$ en los operadores sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$, pues $\tau_0 = id$, $\tau_x\tau_y = \tau_{x+y}$ y $(\tau_x)^{-1} = \tau_{-x}$.

Proposición 4.2.2 *(i) Sea $x \in \mathbb{R}^n$. τ_x es una isometria sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ y sobre $C_0(\mathbb{R}^n)$.*

(ii) Sea $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ entonces la aplicación $x \to f_x$ es uniformemente continua de $\mathbb{R}^n$ en $C_0(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ entonces la aplicación $x \to f_x$ es uniformemente continua de $\mathbb{R}^n$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

DEM:

(i) Obviamente es lineal. Es claro que la invariaza por traslaciones de la medida de Lebesgue implica que $||\tau_x(f)||_p = ||f||_p$.

(ii) Sea $f \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$. Entonces f es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que si $|y - y'| < \delta$ entonces $|f(y) - f(y')| < \varepsilon$. Luego dados $x, x' \in \mathbb{R}^n$ con $|x - x| < \delta$ se tiene

$$||f_x - f_{x'}||_\infty = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x'+y)| < \varepsilon.$$

Dadas $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ y $g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ estimamos

$$||f_x - f_{x'}||_\infty \leq ||f_x - g_x||_\infty + ||g_x - g_{x'}||_\infty + ||f_{x'} - g_{x'}||_\infty = 2||f-g||_\infty + ||g_x - g_{x'}||_\infty.$$

Por tanto, si $\varepsilon > 0$, encontramos $g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon/3$ y $\delta > 0$ tal que si $|x - x'| < \delta$ entonces $||g_x - g_{x'}||_\infty < \varepsilon/3$. Esto concluye que $||f_x - f_{x'}||_\infty < \varepsilon$ para $|x - x'| < \delta$.

(iii) Dado $f \in L^p(\mathbb{T})$ y $\varepsilon > 0$ tomar $g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ con $||f - g||_p < \varepsilon$.

Ahora, como antes,

$$||f_x - f_{x'}||_p \leq ||f_x - g_x||_p + ||g_x - g_{x'}||_p + ||g_{x'} - f_{x'}||_p \leq 2||f-g||_p + ||g_x - g_{x'}||_p.$$

Teniendo en cuenta que $||g_x - g_{x'}||_p \leq ||g_x - g_{x'}||_\infty m_n(K)^{1/p}$ donde $sop(g) = K$ se concluye la demostración. ∎

Definición 4.2.3 *(Operador Dilatación) Sea $\delta > 0$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, definimos $f_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} f(\frac{x}{\delta})$. Denotamos $D_\delta : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ la aplicación $D_\delta(f) = f_\delta$.*

Esta operación genera un representación del grupo multiplicativo $\mathbb{R}^+$ en los operadores sobre $L^1(\mathbb{R}^n)$, pues $D_1 f = f$, $D_\delta D_{\delta'} = D_{\delta\delta'}$ y $(D_\delta)^{-1} = D_{\delta^{-1}}$.

Proposición 4.2.4 *Sea $\delta > 0$. Entonces*

(i) $\|f_\delta\|_1 = \|f\|_1$ para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\|f_\delta\|_p = \delta^{-n(1-1/p)}\|f\|_p$ para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(iii) $\|f_\delta\|_\infty = \delta^{-n}\|f\|_1$ para todo $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$

DEM: Inmediata. ∎

Definición 4.2.5 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$. Definimos la transformada de Fourier de f en el punto ξ como*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dm_n(x)$$

siendo $\langle x, \xi \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$.

Nota 4.2.1 *Dada $f \in L^1(\mathbb{R})$ con soporte contenido en $[-\pi, \pi)$, podemos considerar g su periodificación en $\mathbb{R}$. Entonces el coeficiente de Fourier $\hat{g}(n)$ para $n \in \mathbb{Z}$ coindide con el valor de la transformada de Fourier $\hat{f}(\xi)$ para $\xi = n$.*

Proposición 4.2.6 *Sea* $f(x_1,...,x_n) = f_1(x_1)...f_n(x_n)$ *donde* $f_i \in L^1(\mathbb{R})$ *para* $i = 1,...,n$. *Entonces* $\hat{f}(\xi_1,...,\xi_n) = \hat{f}_1(\xi_1)...\hat{f}_n(\xi_n)$.

DEM: Ejercicio ∎

Proposición 4.2.7 *(Lema de Riemann-Lebesgue) Si* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $\lim_{|\xi|\to\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$.

DEM: Escribimos

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dm_n(x) = -\int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}e^{i\pi\langle \xi,\frac{\xi}{|\xi|^2}\rangle}dm_n(x)$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= -\int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f(x)e^{-i\langle \xi,x-\frac{\pi\xi}{|\xi|^2}\rangle}dm_n(x)\\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} f(x+\frac{\pi\xi}{|\xi|^2})e^{-i\langle x,\xi\rangle}dm_n(x)\\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} f_{\frac{\pi\xi}{|\xi|^2}}(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dm_n(x)\end{aligned}$$

Consecuentemente, sumando ambas expresiones para $\hat{f}(\xi)$, se obtiene

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(f(x) - f_{\frac{\pi\xi}{|\xi|^2}}(x))e^{-i\langle x,\xi\rangle}dm_n(x).$$

Ahora

$$|\hat{f}(\xi)| \le \frac{1}{2}\|f - f_{\frac{\pi\xi}{|\xi|^2}}\|_1,$$

y, usando $y = \frac{\pi\xi}{|\xi|^2}$ que tiene $|y| = \frac{\pi}{|\xi|}$ junto con la continuidad de la traslación en $L^1(\mathbb{R}^n)$ se concluye el resultado. ∎

Teorema 4.2.8 *La transformada de Fourier* $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$ *define un operador lineal continuo de norma* 1.

DEM:

Probemos primero la continuidad de la función $\hat{f}(\xi)$. Sea (ξ_k) una sucesión convergiendo a ξ, probemos que $\lim_{k\to\infty} \hat{f}(\xi_k) = \hat{f}(\xi)$. Como

$$\hat{f}(\xi_k) - \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(e^{-i\langle x,\xi_k\rangle} - e^{-i\langle x,\xi\rangle})dm_n(x),$$

si llamamos $\phi_k(x) = f(x)(e^{-i\langle x,\xi_k\rangle} - e^{-i\langle x,\xi\rangle})$ se tiene que $\phi_k(x)$ converge a cero para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y además $|\phi_k(x)| \leq 2|f(x)|$. Luego por el teorema de la convegencia dominada de Lebesgue se tiene $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(x) dm_n(x) = 0$, es decir $\lim_{k\to\infty} \hat{f}(\xi_k) = \hat{f}(\xi)$.

Combinando con el Lema de Riemann-Lebesgue se obtiene que $\mathcal{F}$ está bien definido. Obviamente es lineal:

$$(f+g)\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi) + \hat{g}(\xi), \quad (\lambda f)\hat{}(\xi) = \lambda \hat{f}(\xi).$$

Se tiene $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Luego $\|\mathcal{F}\| \leq 1$.

Demostremos que $\|\mathcal{F}\| = 1$. Es suficiente encontrar $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f\| = 1$ y $\|\hat{f}\|_\infty = 1$.

Observemos que si $f \geq 0$ entonces $\hat{f}(0) = \|f\|_1$ Luego para funciones integrables no negativas, se tiene $\|f\|_1 = \|\hat{f}\|_\infty$. Basta, ahora, elegir una con norma 1 (como por ejemplo $f = \frac{\chi_A}{m_n(A)}$ para cualquier medible de medida positiva) para terminar la demostración. ∎

Definición 4.2.9 *Sea $x \in \mathbb{R}^n$ denotamos $M_x f(y) = e^{i\langle x,y\rangle} f(y)$. Obviamente $M_x : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ es una isometria para $1 \leq p \leq \infty$.*

Nótese que es una representación del grupo $\mathbb{R}^n$ en los operadores, donde $M_0 = Id$, $M_x M_{x'} = M_{x+x'}$ y $(M_x)^{-1} = M_{-x}$.

Definición 4.2.10 *Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, denotamos por $\bar{f}(x) = f(-x)$ y $Rf = \bar{f}$ la rotación anterior.*

En general, si A es la matriz inversible $n \times n$ se escribe $f_A(x) = f(Ax)$ y denotamos $T_A(f) = f_A$.

Proposición 4.2.11 *Sea $1 \leq p < \infty$, y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*

(i) $\|\bar{f}\|_p = \|f\|_p$.

(ii) $\|f_A\|_p^p = |det(A)|^{-1/p} \|f\|_p$.

DEM:

$$\|f_A\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(Ax)|^p dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |det(A^{-1})| dm_n(y) = |det(A)|^{-1} \|f\|_p^p$$

∎

Proposición 4.2.12 *Sea $x \in \mathbb{R}^n$, A matriz inversible y $\delta > 0$.*
(i) $\mathcal{F}\tau_x(f) = M_x\mathcal{F}(f)$ para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
(ii) $\mathcal{F}M_x(f) = \tau_{-x}\mathcal{F}(f)$ para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
(iii) $\mathcal{F}D_\delta(f) = \frac{1}{\delta^n}D_{\frac{1}{\delta}}\mathcal{F}(f)$ para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
(iv) $\mathcal{F}T_A(f) = |det(A)|^{-1}T_{(A^*)^{-1}}\mathcal{F}(f)$ para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
(v) $\mathcal{F}R(f) = R\mathcal{F}(f)$ para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

DEM: (i)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\tau_x(f)(\xi) &= \hat{f}_x(\xi)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)e^{-i\langle y,\xi\rangle}dm_n(y)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle y+x,\xi\rangle}dm_n(y)\\
&= e^{-i\langle x,\xi\rangle}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle y,\xi\rangle}dm_n(y)\\
&= e^{-i\langle x,\xi\rangle}\hat{f}(\xi) = M_x\mathcal{F}(f)(\xi)
\end{aligned}$$

(ii) Aplicar el caso anterior reemplazando f por $M_x f$ y usar el inverso del operador.

(iii)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}D_\delta(f)(\xi) &= \hat{f}_\delta(\xi)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\delta^n}f(\frac{y}{\delta})e^{-i\langle y,\xi\rangle}dm_n(y)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle \delta y,\xi\rangle}dm_n(y)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle y,\delta\xi\rangle}dm_n(y)\\
&= \hat{f}(\delta\xi) = \frac{1}{\delta^n}D_{\frac{1}{\delta}}\mathcal{F}(f)(\xi)
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(T_A f)(\xi) &= \hat{f}_A(\xi)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(Ay)e^{-i\langle y,\xi\rangle}dm_n(y)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle A^{-1}x,\xi\rangle}|det(A)|^{-1}dm_n(y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x,(A^*)^{-1}\xi\rangle}|det(A)|^{-1}dm_n(y) \\
&= |det(A)|^{-1}\hat{f}((A^*)^{-1}\xi) = |det(A)|^{-1}T_{(A^*)^{-1}}\mathcal{F}(f)(\xi)
\end{aligned}
$$

(v) Se sigue de (iv), usando $A = -I$. ■

Proposición 4.2.13 *(Derivación)*
(i) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es tal que existe $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ a.e. y $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$(\frac{\partial f}{\partial x_k})\hat{}(\xi) = i\xi_k\hat{f}(\xi).$$

(ii) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $|x_k|f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces existen la derivada pacial k-ésima de $\hat{f}$ y

$$(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_k})\hat{}(\xi) = -i(\xi_k f)\hat{}(\xi).$$

Dem: (i) Supongamos que f es de clase C^1 y de soporte compacto, y supongamos $k = 1$. Aplicando integración por partes en la variable x_1 y usando el soporte compacto,

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial f}{\partial x_1})\hat{}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}(\frac{\partial f}{\partial x_1})(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dm_n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}}...(\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,...,x_n)e^{-ix_1\xi_1}dm_1(x_1))e^{-i\sum_{j=2}^n x_j\xi_j}dm_{n-1}(x_2,...,x_n) \\
&= \int_{\mathbb{R}}...(\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2,...,x_n)i\xi_1e^{-ix_1\xi_1}dm_1(x_1))e^{-i\sum_{j=2}^n x_j\xi_j}dm_{n-1}(x_2,...,x_n) \\
&= i\xi_1\int_{\mathbb{R}}...\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2,...,x_n)e^{-i\sum_{j=1}^n x_j\xi_j}dm_n(x_1,x_2,...,x_n) = i\xi_1\hat{f}(\xi).
\end{aligned}
$$

(ii) Como $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dm_n(x)$. Aplicando la fórmula de derivación bajo el signo integral se obtiene

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_k})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial \xi_k}(f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle})dm_n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(-ix_k)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dm_n(x) = -i(\xi_k f)\hat{}(\xi).
\end{aligned}
$$

■

4.3 Convolución en $\mathbb{R}^n$

Lema 4.3.1 *Sea $F(x,y) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y sea $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo con $det(D\Phi(x,y)) = 1$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, dado por $u = \phi_1(x,y), v = \phi_2(x,y)$. Entonces $G(x,y) = F(\phi_1(x,y), \phi_2(x,y)) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Además $\|G\|_{L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)} = \|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)}$.*

Proposición 4.3.2 *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dm_n(y)$$

está definido a.e. y es integrable en $\mathbb{R}^n$. Además $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$.

DEM: Usar $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dada por $u = x - y$ y $v = y$, y usar $F(u,v) = f(u)g(v)$ en el lema anterior. Esto permite demostrar que $(x,y) \to f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ es integrable, y por tanto $\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dm_n(y)dm_n(x) < \infty$. Luego $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dm_n(y) < \infty$ a.e. y por tanto tambien $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dm_n(y)$ está definida a.e. El resto es inmediato del teorema de Fubini. ∎

Proposición 4.3.3 *$L^1(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de Banach conmutativa con la convolución.*

DEM: Consecuencia de la proposición anterior. ∎

Teorema 4.3.4 *$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$ es un homomorfismo de álgebras.*

DEM: Sólo hay que ver que $(f * g)\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$. En efecto

$$\begin{aligned}
(f * g)\hat{}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f * g(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dm_n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dm_n(y)\Big) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dm_n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle y,\xi\rangle} g(x-y) e^{-i\langle x-y,\xi\rangle} dm_n(y)dm_n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle y,\xi\rangle}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)e^{-i\langle x-y,\xi\rangle} dm_n(x)\Big)dm_n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle y,\xi\rangle}\hat{g}(\xi)dm_n(y) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

∎

Teorema 4.3.5

(i) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces $f*g$ es uniformemente continua y acotada.

(ii) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Si $f, g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$.

Además $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

Dem: Como $y \to f(y)g(x-y)$ es medible y $|f(y)g(x-y)| \leq \|g\|_\infty |f(y)|$ entonces $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dm_n(y)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Además $|f * g(x)| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(i) Por otro lado

$$\begin{aligned} f * g(x) - f * g(x') &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x'-y))g(y)dm_n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f_x(-y) - f_{x'}(-y))g(y)dm_n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f_x(y) - f_{x'}(y))g(-y)dm_n(y). \end{aligned}$$

Así se tiene $|f * g(x) - f * g(x')| \leq \|g\|_\infty \|f_x - f_{x'}\|_1$. Ahora utilizar que la traslación es uniformemente continua en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Suponer que *sop*$(g) \subset B(0, R)$.

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dm_n(y) = \int_{B(0,R)} f(x-y)g(y)dm_n(y).$$

Luego, si $|x| > R$,

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &\leq \int_{B(0,R)} |f(x-y)||g(y)|dm_n(y) \\ &\leq \|g\|_\infty \int_{|y| \leq R} |f(x-y)|dm_n(y) \\ &\leq \|g\|_\infty \int_{|y'| \geq |x| - R} |f(y')|dm_n(y') \end{aligned}$$

Por tanto $\lim_{|x| \to \infty} |f * g(x)| = 0$.

(iii) Suponer que *sop*$(f) \subset B(0, R_1)$ y *sop*$(g) \subset B(0, R_2)$. Veamos que *sop*$(f * g) \subset B(0, R_1 + R_2)$. En efecto, si $|x| > R_1 + R_2$ y $|y| \leq R_2$ entonces $|x - y| > R_1$ entonces

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dm_n(y) = \int_{B(0,R_2)} f(x-y)g(y)dm_n(y) = 0.$$

■

Teorema 4.3.6 *Sea* $1 < p, q \leq \infty$ *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *y* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Además $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

DEM: Como $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g_x(-y) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ entonces por la desigualdad de Hölder $|f(y)g(x-y)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Luego $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dm_n(y)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Además $|f * g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Como antes

$$\begin{aligned} f * g(x) - f * g(x') &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x'-y))g(y)dm_n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f_x(y) - f_{x'}(-y))g(y)dm_n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f_x(y) - f_{x'}(y))g(-y)dm_n(y). \end{aligned}$$

Así se tiene $|f * g(x) - f * g(x')| \leq \|g\|_q \|f_x - f_{x'}\|_p$. Ahora utilizar que la traslación es uniformemente continua para demostrar que $f * g$ es continua.

El hecho de que $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ se sigue de la densidad de $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $L^q(\mathbb{R}^n)$. En efecto, si $(f_n) \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ converge a f en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $(g_n) \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ converge a g en $L^q(\mathbb{R}^n)$ entonces $f_n * g_n \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ y además

$$\|f * g - f_n * g_n\|_\infty \leq \|f - f_n\|_p \|g\| + \|f_n\|_p \|g - g_n\|_q$$

. De aquí se concluye que $f * g = \lim_{n\to\infty} f_n * g_n$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por tanto $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$. ■

Teorema 4.3.7 *Sea* $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$ *con* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \geq 1$. *Si* $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ *y* $g \in L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $f * g \in L^{p_3}(\mathbb{R}^n)$, *donde* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1 = \frac{1}{p_3}$.

Además $\|f * g\|_{p_3} \leq \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2}$.

DEM: La misma prueba que en $\mathbb{T}$. ■

4.4 Núcleos de sumabilidad en $\mathbb{R}^n$: Poisson y Gauss-Weierstrass

Definición 4.4.1 *(Núcleo de sumabilidad en $\mathbb{R}^n$) Una familia de funciones $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ se dice un núcleo de sumabilidad sobre $\mathbb{R}^n$ si verifican*

(i) $\sup_{\varepsilon>0}\int_{\mathbb{R}^n}|K_\varepsilon(x)|dm_n(x)<\infty$.

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n}K_\varepsilon(x)dm_n(x)=1$ *para todo* $\varepsilon>0$.

(iii) Para todo $\delta>0$ $\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{|x|>\delta}|K_\varepsilon(x)|dm_n(x)=0$.

Existe una manera muy sencilla de generar núcleos de sumabilidad en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 4.4.2 *Sea $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n}f(x)dm_n(x)=1$. Definimos $K_\varepsilon(x)=D_\varepsilon f(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}f(\frac{x}{\varepsilon})$. Entonces $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es un núcleo de sumabilidad.*

Dem: Las propiedades (i) y (ii) se tienen pues $\|K_\varepsilon\|_1=\|f\|_1$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n}K_\varepsilon(x)dm_n(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)dm_n(x)=1$$

para todo $\varepsilon>0$.

La propiedad (iii) es también consecuencia de la integrabilidad, ya que

$$\int_{|x|>\delta}|K_\varepsilon(x)|dm_n(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{|x|>\delta}|f(\frac{x}{\varepsilon})|dm_n(x)=\int_{|y|>\frac{\delta}{\varepsilon}}|f(y)|dm_n(y).$$

Ahora usar que $\lim_{M\to\infty}\int_{|x|>M}|f(x)|dm_n(x)=0$. ■

Ejemplo 4.4.1 *(Núcleo de Poisson) Sea $P_t(x)=C_n\frac{t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ donde $t>0$, y $C_n=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$.*

Dem: Notar que $P_t=D_tP$ donde $P(x)=C_n\frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$. Comprobemos que $\int_{\mathbb{R}^n}P(x)dm_n(x)=1$. Usamos que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\phi(|x|)dm_n(x)=nv_n\int_0^\infty r^{n-1}\phi(r)dr,$$

con $v_n=m_n(B(0,1))$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n}P(x)dm_n(x)=nv_nC_n\int_0^\infty\frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}}dr.$$

$$
\begin{aligned}
nv_nC_n\int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}}dr &= nv_nC_n\int_0^{\pi/2}\frac{(tag\theta)^{n-1}}{(1+(tag\theta)^2)^{\frac{n+1}{2}}}(1+(tag\theta)^2)d\theta \\
&= nv_nC_n\int_0^{\pi/2}\frac{(tag\theta)^{n-1}(cos\theta)^{n+1}}{(cos\theta)^2}d\theta \\
&= nv_nC_n\int_0^{\pi/2}(sen\theta)^{n-1}d\theta \\
&= nv_nC_n\int_0^1(1-t^2)^{\frac{n}{2}-1}dt \\
&= \frac{n}{2}v_nC_n\int_0^1(1-s)^{\frac{n}{2}-1}s^{\frac{1}{2}-1}ds \\
&= \frac{n}{2}v_nC_nB(\frac{n}{2},\frac{1}{2})
\end{aligned}
$$

Otro método más rápido de obtener lo mismo es hacer el cambio $s = \frac{1}{1+r^2}$

Ahora recordemos que $B(\frac{n}{2},\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$ y que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{1/2}$ y $v_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$, de donde se sigue el resultado, para $C_n = \frac{2\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{n\pi^{\frac{n}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$. ∎

Ejemplo 4.4.2 *(Núcleo de Gauss-Weierstrass) Sea* $W_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ *para* $t > 0$.

DEM: Notar que $W_t = D_{2\sqrt{t}}W$ donde $W(x) = \pi^{-\frac{n}{2}}e^{-|x|^2}$. Comprobemos que $\int_{\mathbb{R}^n} W(x)dm_n(x) = 1$.

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}dm_n(x) &= \int_{\mathbb{R}}...\int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2}...e^{-x_n^2}dm_1(x_1)...dm_n(x_n) \\
&= (\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dm_1(x))^n \\
&= (\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dm_2(x,y))^{n/2} \\
&= (\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta)^{n/2} \\
&= (\pi\int_0^\infty e^{-\rho}d\rho)^{n/2} = \pi^{n/2}.
\end{aligned}
$$

∎

Ejemplo 4.4.3 *(Núcleo en C_{00}^∞, es decir $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y de soporte compacto) Sea $\phi(x) = A_n e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} \chi_{B(0,1)}(x)$ donde $A_n^{-1} = \int_{B(0,1)} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} dm_n(x)$.*

Dem: Es fácil probar que $\varphi(t) = e^{-\frac{1}{1-t^2}} \chi_{(-1,1)}(t)$ es una función par acotada y de clase $C^\infty(\mathbb{R})$. En efecto,

$$\varphi'(t) = \frac{-2te^{-\frac{1}{1-t^2}}}{(1-t^2)^2}$$

para $t \in (-1,1)$ Luego φ es continua en $t=1$ pues

$$\lim_{t \to 1^-} e^{-\frac{1}{1-t^2}} = \lim_{s \to \infty} e^{-s} = 0.$$

Lo mismo ocurre con φ', pues

$$\lim_{t \to 1^-} \frac{e^{-\frac{1}{1-t^2}}}{(1-t^2)^2} = \lim_{s \to \infty} s^2 e^{-s} = 0,$$

y φ' también es continua en $t=1$. Repitiendo el argumento se prueba que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $\varphi^{(k}(1) = \varphi^{(k}(-1) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ahora llamamos

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t)dt = 2\int_0^1 e^{-\frac{1}{1-t^2}} dt = A^{-1}.$$

y por tanto se tiene que $K_\varepsilon(t) = A\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{t}{\varepsilon})$ es un núcleo de sumabilidad en $\mathbb{R}$

Ahora si consideramos $\phi(x) = \varphi(|x|)$ y teniendo en cuenta que $x \to |x|^2$ es un polinomio se obtiene el resultado eligiendo A_n para que la integral sea 1. ∎

Proposición 4.4.3 *Si $f(x) = e^{-|x|^2}$ entonces $\hat{f}(\xi) = \pi^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}}$.*

Dem:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} e^{-i\langle x,\xi\rangle} dm_n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{j=1}^n x_j^2 + ix_j\xi_j} dm_n(x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{j=1}^n (x_j+\frac{i\xi_j}{2})^2} e^{-\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j^2}{4}} dm_n(x) \\
&= e^{-\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j^2}{4}} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n e^{-(x_j+\frac{i\xi_j}{2})^2} dm_n(x) \\
&= e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} (\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dm_1(x))^n \\
&= \pi^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}}.
\end{aligned}
$$

El último paso se consigue aplicando el teorema de Cauchy a la función e^{z^2} en el recinto conveniente. ∎

Lema 4.4.4 *Sea $\beta > 0$. Entonces*

$$
e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u} e^{-\frac{\beta^2}{4u}}}{\sqrt{u}} du.
$$

Dem: Se sigue de la fórmula (que se obtiene aplicando el teorema de los residuos)

$$
e^{-\beta} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{cos(\beta x)}{1+x^2} dx
$$

junto con $\frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-(1+x^2)u} du$. ∎

Proposición 4.4.5 *Si $f(x) = e^{-|x|}$ entonces $\hat{f}(\xi) = \frac{(2\pi)^n C_n}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$, siendo $c_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$.*

Dem: Aplicando el lema anterior

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|} e^{-i\langle x,\xi\rangle} dm_n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u} e^{-\frac{|x|^2}{4u}}}{\sqrt{u}} du) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dm_n(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4u}} e^{-i\langle x,\xi\rangle} dm_n(x)) \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} e^{i\langle \xi, 2\sqrt{u}y\rangle} (2\sqrt{u})^n dm_n(y)) \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\sqrt{\pi})^{n-1}\int_0^\infty e^{-u|\xi|^2} 2^n(\sqrt{u})^{n-1}e^{-u}du \\
&= 2^n(\sqrt{\pi})^{n-1}\int_0^\infty e^{-u(|\xi|^2+1)}u^{\frac{n-1}{2}}du \\
&= \frac{2^n(\sqrt{\pi})^{n-1}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^\infty e^{-v}v^{\frac{n-1}{2}}du \\
&= \frac{2^n(\sqrt{\pi})^{n-1}\Gamma(\frac{n+1}{2})}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(2\pi)^n C_n}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Definición 4.4.6 *Sea $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ se dice que g es integrable en sentido Abel si existe*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-\varepsilon|x|}dx = (A)\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dm_n(x).$$

Definición 4.4.7 *Sea $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ se dice que g es integrable en sentido Gauss-Weierstrass si existe*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-\varepsilon|x|^2}dx = (G)\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dm_n(x).$$

Proposición 4.4.8 *Si $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\cap L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces g es integrable en sentido Abel y en sentido Gauss-Wierstrass. Además*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dm_n(x) = (A)\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dm_n(x) = (G)\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dm_n(x).$$

DEM: Es consecuencia directa del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. ∎

4.5 Aproximación en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$

Veamos los teoremas de aproximación de las convoluciones.

Teorema 4.5.1 *Sea (K_ε) un núcleo de sumabilidad y sea $1 \le p < \infty$.*
(i) Si $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ entonces $\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon * f = f$ in $C_0(\mathbb{R}^n)$.
(ii) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces $\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon * f = f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Dem: (i) Escribamos

$$f(x)-K_\varepsilon*f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}(f(x)-f(x-y))K_\varepsilon(y)dm_n(y)=\int_{\mathbb{R}^n}(f(x)-f_{-y}(x))K_\varepsilon(y)dm_n(y).$$

Por tanto

$$\|f-K_\varepsilon*f\|_\infty\leq\int_{\mathbb{R}^n}\|f-f_y\|_\infty|K_\varepsilon(y)|dm_n(y).$$

Ahora para $\delta>0$ se tiene

$$\begin{aligned}\|f-K_\varepsilon*f\|_\infty &\leq \int_{|y|\leq\delta}\|f-f_y\|_\infty|K_\varepsilon(y)|dm_n(y)+\int_{|y|>\delta}\|f-f_y\|_\infty|K_\varepsilon(y)|dm_n(y)\\ &\leq \sup_{|y|\leq\delta}\|f-f_y\|_\infty\sup_{\varepsilon>0}\|K_\varepsilon\|_1+2\|f\|_\infty\int_{|y|>\delta}|K_\varepsilon(y)|dm_n(y)\end{aligned}$$

Usando la continuidad del operador traslación y la propiedad de los núcleos se concluye el resultado.

(ii) Puede repetirse la demostración de $\mathbb{T}$, pero damos una prueba para $1<p<\infty$ usando (i) y la densidad de $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$, junto con el teorema de Young.

Dado $\nu>0$ existe $g\in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ con $sop(g)=K$ y tal que $\|f-g\|_p<\nu$. Ahora

$$\begin{aligned}\|f-K_\varepsilon*f\|_p &\leq \|f-g\|_p+\|g-K_\varepsilon*g\|_p+\|K_\varepsilon(g-f)\|_p\\ &\leq \|f-g\|_p+\|g-K_\varepsilon*g\|_p+\|K_\varepsilon\|_1\|g-f\|_p\\ &\leq (1+\sup_{\varepsilon>0}\|K_\varepsilon\|_1)\|g-f\|_p+\|g-K_\varepsilon*g\|_p\\ &\leq (1+\sup_{\varepsilon>0}\|K_\varepsilon\|_1)\nu+\|g-K_\varepsilon*g\|_p.\end{aligned}$$

Ahora usemos que

$$\begin{aligned}\|g-K_\varepsilon*g\|_p &= (\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)-K_\varepsilon*g(x)|^p dm_n(x))^{1/p}\\ &\leq \|g-K_\varepsilon*g\|_\infty^{1/p'}(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)-K_\varepsilon*g(x)|dm_n(x))^{1/p}\\ &\leq \|g-K_\varepsilon*g\|_\infty^{1/p'}(2\|g\|_1)^{1/p}.\end{aligned}$$

Por tanto $\lim_{\varepsilon\to0}\|f-K_\varepsilon*f\|_p\leq(1+\sup_{\varepsilon>0}\|K_\varepsilon\|_1)\nu$, lo que permite concluir $\lim_{\varepsilon\to0}\|f-K_\varepsilon*f\|_p=0$. ∎

Proposición 4.5.2 *Sean* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$*. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)g(y)dm_n(y).$$

DEM:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dm_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-i\langle x,y\rangle}dm_n(y))dm_n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x,y\rangle}dm_n(x))dm_n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\hat{f}(y)dm_n(y)
\end{aligned}$$

■

Proposición 4.5.3 *(Fórmula de inversión) Sea* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$*. Entonces*

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}dm_n(\xi) \qquad a.e.$$

DEM: Supongamos que además $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Tengamos en cuenta que la transformada de Fourier de $e^{-t|x|^2}$ es $\pi^{n/2}t^{-n/2}e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} = (2\pi)^n W_t(\xi)$. Aplicamos la proposición anterior y obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)e^{-t|x|^2}dm_n(x) = (2\pi)^n\int_{\mathbb{R}^n} f(y)W_t(y)dm_n(y) = (2\pi)^n W_t * f(0).$$

Ahora pasamos al limite cuando $t \to 0$ y usamos el teorema anterior para conseguir $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)dm_n(x) = (2\pi)^n f(0)$. Aplicando el paso previo a $\tau_x f$ se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)e^{i\langle x,y\rangle}dm_n(y) = (2\pi)^n f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Para hacer el caso general, sea $f_m \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - f_m\|_1$ converge a cero. Tenemos

$$f_m(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_m(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}dm_n(\xi).$$

Teniendo en cuenta que para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_m(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} dm_n(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} dm_n(\xi)$$

y que existe una subsucesión m_k tal que $\lim_{k\to\infty} f_{m_k} = f$ a.e. se obtiene el resultado. ∎

Corolario 4.5.4 *Sean $f, g, \hat{f}, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$(2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(-x) dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) dm_n(\xi).$$

DEM: Aplicar la fórmula de inversión a $f * g$.

$$(2\pi)^n f * g(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) dm_n(\xi).$$

∎

Corolario 4.5.5 *Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ entonces $f = g$ a.e.*

DEM: Aplicar la fórmula de inversión a $f - g$. ∎

Proposición 4.5.6 *(i) $L^1(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra sin unidad pero con unidad aproximada acotada.*

(ii) $\mathcal{F}$ es un homomorfismo de álgebras inyectivo.

DEM: (i) Supongamos que existiera $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $f * g = g$ para toda $g \in L^1(\mathbb{R})$. Luego $\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = \hat{g}(\xi)$ para toda $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Tomar $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dm_n(x) = \hat{g}(0) = 1$. Ahora aplicar el resultado para $M_\xi g$, y se obtiene $\hat{M_\xi g}(\xi) = 1$ luego $\hat{f}(\xi) = 1$ para todo ξ, y por tanto $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

Cualquier núcleo de sumabilidad proporciona una unidad aproximada acotada, $(K_{1/k})_{k\in\mathbb{N}}$.

(ii) Se sigue del Corolario 4.5.5 ∎

Corolario 4.5.7 *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ entonces*

$$(2\pi)^n f(x) = (A) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\langle \xi,x\rangle} dm_n(\xi) = (G) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\langle \xi,x\rangle} dm_n(\xi).$$

DEM: Observar que $\hat{f}(\xi)e^{i\langle \xi,x\rangle}$ es integrable en sentido Abel y Gauss-Weierstrass a $(2\pi)^n f$, puesto que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{i\langle \xi,x\rangle}e^{-t|\xi|}dm_n(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_x(\xi)e^{-t|\xi|}dm_n(\xi) = (2\pi)^n f_x * P_t(0)\\ &= (2\pi)^n f * P_t(x)\end{aligned}$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_x(\xi)e^{-t|\xi|^2}dm_n(\xi) = (2\pi)^n f_x * W_t(0) = (2\pi)^n f * W_t(x).$$

Usar ahora los resultados de aproximación. ∎

Definición 4.5.8 *Definimos*

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = 0\},$$

$$C_{00}^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), sop(f) \text{ compacto } \}.$$

Lema 4.5.9 *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*
(i) $sop(f * g) \subset \overline{sop(f) + sop(g)}$.
(ii) si $sop(f)$ ó $sop(g)$ es compacto entonces $sop(f * g) \subset sop(f) + sop(g)$.
(iii) $f, g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$.

DEM: (i) Es suficiente ver que $\{x : f * g(x) \neq 0\} \subset sop(f) + sop(g)$. Téngase en cuenta que

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dm_n(y) = \int_{sop(f)\cap(x-sop(g))} f(y)g(x-y)dm_n(y).$$

Por tanto, si $x \notin sop(f) + sop(g)$ entonces $sop(f) \cap (x - sop(g)) = \varnothing$ y $f * g(x) = 0$.

(ii) Recordar que si C es cerrado y K es compacto entonces $C + K$ es cerrado.

(iii) Inmediato. ∎

Lema 4.5.10 *Si $f \in \cup_{p\geq 1} L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in C_{00}^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

DEM: Existe $p_0 \geq 1$ tal que $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$, y como $g \in L^{q_0}(\mathbb{R}^n)$ con $1/p_0 + 1/q_0 = 1$ entonces $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Por otro lado $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dm_n(y)$, y para aplicar los resultados de derivación bajo el signo integral en el punto x_0 necesitamos que

(i) exista $\frac{\partial g}{\partial x_k}$ en un entorno de $|x - x_0| < r$,

(ii) $|f(y)\frac{\partial g}{\partial x_k}(x-y)| \leq h(y)$ siempre que $|x - x_0| < r$, para cierta $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Supongamos que $sop(g) \subset B(0,R)$. Dado $x_0 \in sop(g)$ tomemos $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset B(0,R)$.

Si $|y| > R + |x_0| + r$ y $|x - x_0| < r$ entonces

$$|x-y| \geq |y| - |x| > R + |x_0| + r - |x| > R$$

y por tanto $g(x-y) = 0$ y $\frac{\partial g}{\partial x_k}(x-y) = 0$.

Para $|y| \leq R + |x_0| + r$ y $|x - x_0| < r$ se tiene

$$|f(y)\frac{\partial g}{\partial x_k}(x-y)| \leq |f(y)| \max_{|z|\leq R} |\frac{\partial g}{\partial x_k}(z)|$$

Definiendo $h(y) = |f(y)| \max_{|z|\leq R} |\frac{\partial g}{\partial x_k}(z)| \chi_{B(0,R+|x_0|+r)}(y)$ se tiene que $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ por ser de soporte compacto y $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$.

Se concluye que existe $\frac{\partial f*g}{\partial x_k}(x_0)$ para todo $x_0 \in sop(g)$. Además, derivando bajo el signo integral,

$$\frac{\partial f * g}{\partial x_k}(x_0) = f * \frac{\partial g}{\partial x_k}(x_0).$$

Repitiendo el argumento para las derivadas de orden superior se completa la demostración. ∎

Teorema 4.5.11 *Sea* $1 \leq p < \infty$. $C_{00}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *es denso en* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *y* $C_0(\mathbb{R}^n)$.

DEM: Sea $\eta > 0$. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ existe $g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - g\|_p < \eta$. Sea K_ε un núcleo de sumabilidad en $C_{00}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Se tiene que $\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon * g = g$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y por tanto existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\|g - K_\varepsilon * g\|_p < \eta$ para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Observar que por los lemas anteriores $K_\varepsilon * g \in C_{00}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y verifica que

$$\|f - K_\varepsilon * g\|_p \leq \eta + \|g - K_\varepsilon * g\|_p < 2\eta.$$

La misma demostración vale para $C_0(\mathbb{R}^n)$. ∎

Ahora vamos a considerar la noción de partición de la unidad. El objetivo es poder escribir $1 = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x)$ donde $\phi_j \in C_{00}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Veamos primero una extensión del Lema de Uryshon.

Lema 4.5.12 *Sea K compacto, V abierto, $K \subset V$. Existe $\phi \in C_{00}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que $sop(\phi) \subset V$, $0 \leq \phi \leq 1$ y $\phi(x) = 1$ para $x \in K$.*

DEM: Paso 1: Dados $K_1 \subset V_1$, K_1 compacto, V_1 abierto existe $\phi_1 \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ tal que $sop(\phi_1) \in V_1$, $0 \leq \phi_1 \leq 1$ y $\phi_1(x) = 1$ para $x \in K_1$.

Basta definir

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{d(x, K_1)}{d(x, K_1) + d(x, \mathbb{R}^n \setminus V_1)}.$$

Las propiedades son de comprobación elemental.

Paso 2: Observar que puede suponerse que V es acotado (pues $K \subset \cup_{k=1}^{\infty} V \cap B(0, k)$).

Sean K_1 compacto, V_1 abierto tales que

$$K \subset int(K_1) \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset V.$$

Podemos considerar $0 < d_1 < d_1' < d$ donde $d = d(K, \mathbb{R}^n \setminus V) > 0$ y tomar

$$K_1 = \{x \in V : d(x, K) \leq d_1\}, V_1 = \{x \in V : d(x, K) < d_1'\}.$$

Ahora usando el paso anterior existe $\phi_1 \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ tal que $sop(\phi_1) \in V_1$, $0 \leq \phi_1 \leq 1$ y $\phi_1(x) = 1$ para $x \in K_1$.

Sea K_ε un núcleo de sumabilidad de $C_{00}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ con $K_\varepsilon \geq 0$ y $sop(K_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$. Consideremos $\phi_1 * K_\varepsilon$ para ε suficientemente pequeo.

En primer lugar es claro que $\phi_1 * K_\varepsilon \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$.

Sabemos que

$$sop(\phi_1 * K_\varepsilon) \subset sop(\phi_1) + B(0, \varepsilon) \subset V_1 + B(0, \varepsilon)$$

luego existe ε_0 tal que $V_1 + B(0, \varepsilon) \subset \{x : d(x, V_1) < d_1' + \varepsilon\} \subset V$ para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Por otro lado

$$0 \leq \phi_1 * K_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_1(x - y) K_\varepsilon(y) dm_n(y) \leq \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y) dm_n(y) = 1.$$

Existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que si $x \in K$ e $|y| < \varepsilon_1$ entonces $x - y \in K_1$ luego $\phi_1(x-y) = 1$ para $|y| < \varepsilon$ si $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Por consiguiente

$$\phi_1 * K_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_1(x-y)K_\varepsilon(y)dm_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y)dm_n(y) = 1.$$

Tomando entonces $\phi = \phi_1 * K_\delta$ para $\delta = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ se completa la demostración. ∎

Teorema 4.5.13 *Sea K compacto, Ω_j abiertos tales que $K \subset \cup_{j=1}^m \Omega_j$. Entonces existen $\phi_j \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ tal que sop$(\phi_j) \in \Omega_j$, $0 \leq \phi_j \leq 1$ y $\sum_{j=1}^m \phi_j(x) = 1$ para $x \in K$.*

DEM: Paso 1: Existen compactos K_j tales que $K_j \subset \Omega_j$ y $K \subset \cup_{j=1}^m int(K_j)$.

En efecto, para cada $x \in K$ se tiene $x \in \Omega_{j(x)}$ y por tanto en una bola $\overline{B(x, r_x)} \subset \Omega_{j(x)}$.

Como $K \subset \cup_{x\in K} B(x, r_x)$ se puede extraer una subfamilia finita $K \subset \cup_{i=1}^p B(x_i, r_{x_i})$. Denotamos $F_j = \{i : B(x_i, r_{x_i}) \subset \Omega_j\} = \{i : j(x_i) = j\}$ y definimos $K_j = \cup_{i\in F_j} \overline{B}(x_i, r_{x_i})$. Es un compacto y $K_j \subset \Omega_j$.

Paso 2: Usando el Lema 4.5.12 para $K_j \subset \Omega_j$ se tiene que existe $\phi_j \in C_{00}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que *sop*$(\phi_j) \in \Omega_j$, $0 \leq \phi_j \leq 1$ y $\phi_j(x) = 1$ para $x \in K_j$.

Definimos

$$\varphi_1(x) = \phi_1(x),$$

$$\varphi_2(x) = \phi_2(x)(1 - \phi_1(x)),$$

$$\ldots$$

$$\varphi_m(x) = \phi_k(x) \prod_{i=1}^{m-1} (1 - \phi_i(x)).$$

Es claro que $\varphi_j \in C_{00}^\infty(\mathbb{R}^n)$ por ser producto de funciones de ese tipo, $0 \leq \varphi_j \leq 1$ y *sop*$(\varphi_j) \subset$ *sop*$(\phi_j) \in \Omega_j$.

Comprobemos que si $x \in K$ entonces $\sum_{j=1}^m \varphi_j(x) = 1$. Veamos por inducción que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\sum_{j=1}^m \varphi_j(x) = 1 - \prod_{j=1}^m (1 - \phi_j(x)).$$

En efecto, $\varphi_1(x) = 1 - (1 - \phi_1(x))$. Supuesto para k, veamoslo para $k+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k+1} \varphi_j(x) &= \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x) + \varphi_{k+1}(x) \\
&= 1 - \prod_{j=1}^{k} (1 - \phi_j(x)) + \varphi_{k+1}(x) \\
&= 1 - \prod_{j=1}^{k} (1 - \phi_j(x)) + \phi_{k+1}(x) \prod_{j=1}^{k} (1 - \phi_j(x)) \\
&= 1 - (1 - \phi_{k+1}(x)) \prod_{j=1}^{k} (1 - \phi_j(x)) \\
&= 1 - \prod_{j=1}^{k+1} (1 - \phi_j(x))
\end{aligned}$$

Ahora para $x \in K$ se tiene $x \in K_j$ para algún j, y por tanto $\phi_j(x) = 1$. De ahí se deduce que $\prod_{j=1}^{m} (1 - \phi_j(x)) = 0$ y $\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) = 1$. ■

4.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.6.1 *Sean dos reales $a < b$. Probar que la función $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ tiene como transformada de Fourier*

$$f(\xi) = \begin{cases} 2\frac{\sin(\frac{b-a}{2}\xi)}{\xi} e^{-i\frac{b+a}{2}\xi} & \text{if } \xi \neq 0 \\ b - a & \text{if } \xi = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 4.6.2 *Probar que si $a > 0$, la transformada de Fourier de $f(x) = e^{-ax^2}$ es*

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

Ejercicio 4.6.3 *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-\|x\|^2}$ es*

$$\hat{f}(\xi) = \pi^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4}}.$$

Ejercicio 4.6.4 *Probar que si $a > 0$, la transformada de Fourier de $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ es*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}.$$

Ejercicio 4.6.5 *Obtener, para $a > 0$, la transformada de Fourier de $f(x) = \frac{1}{(a^2+x^2)^2}$ y de $g(x) = \frac{1}{1+(x-b)^2}$, $b \in \mathbb{C}$.*

Ejercicio 4.6.6 *Probar que las siguientes relaciones son ciertas cuando Re $a > 0$:*

(i)	$f(x) = e^{-ax}\chi_{(0,+\infty)}(x)$	$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{a+i\xi}$
(ii)	$f(x) = e^{ax}\chi_{(-\infty,0)}(x)$	$\hat{f}(\xi) = \frac{-1}{-a+i\xi}$
(iii)	$f(x) = \frac{x^k}{k!}e^{-ax}\chi_{(0,+\infty)}(x)$	$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(a+i\xi)^{k+1}}$
(iv)	$f(x) = \frac{x^k}{k!}e^{ax}\chi_{(-\infty,0)}(x)$	$\hat{f}(\xi) = \frac{-1}{(-a+i\xi)^{k+1}}$
(v)	$f(x) = e^{-a\|x\|}$	$\hat{f}(\xi) = \frac{2a}{a^2+\xi^2}$
(vi)	$f(x) = sign(x)e^{-a\|x\|}$	$\hat{f}(\xi) = \frac{-2i\xi}{a^2+\xi^2}.$

Ejercicio 4.6.7 *Dada $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \backslash\{0\}$ y $\mu \in \mathbb{R}$ se define $g(x) := f(\lambda x - \mu)$. Mostrar que*

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{|\lambda|} e^{-\frac{\lambda}{\mu}\xi} \hat{f}(\frac{\xi}{\lambda}).$$

Ejercicio 4.6.8 *Sea $f(x) = (1-x^2)\chi_{[-1,1]}(x)$, probar que su transformada de Fourier es*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{4}{\xi^2}(\frac{\sin\xi}{\xi} - \cos\xi).$$

Ejercicio 4.6.9 *Si $x^k f(x)$ pertenecen a $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, para $k = 0, 1, ldots, p$, se llama momento de orden k a la cantidad*

$$M_k = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx.$$

Mostrar que $M_k = i^k \hat{f}^{(k)}(0)$.

Ejercicio 4.6.10 *Dada* $f(x) = \int_0^1 e^{-(x-y)^2} dy$, *probar que su transformada de Fourier existe y vale:*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \begin{cases} \pi & if \ \xi = 0 \\ i\pi e^{\frac{-\xi^2}{4}} \frac{(e^{i\xi}-1)}{\xi} & if \ \xi \neq 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4.6.11 *Calcular*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^\delta \frac{\sin \alpha y}{y} dy = \frac{\pi}{2}.$$

Sug. Usar el teorema de localización de para la transformada de Fourier.

Ejercicio 4.6.12 *Calcular para Re* $a > 0$*:*

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x}}{a + i\xi} d\xi.$$

Ejercicio 4.6.13 *Dado* $a > 0$, *sea* $f_a(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$. *Usar la transformada de Fourier para demostrar que* $f_a * f_b = f_{a+b}$.

Ejercicio 4.6.14 *Dadas*

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$\beta(p, q) := \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$$

demuestra que:

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Ejercicio 4.6.15 *Calcula la transformada de Fourier de la función característica de un intervalo. Dado* $n \in \mathbb{N}$, *sea* $g_n = \chi_{[-n,n]}$, *calcula* $g_n * g_1$ *y prueba que es la transformada de Fourier de* $A \frac{\sin x \sin(nx)}{x^2}$. *Concluye que la transformada de Fourier no es una aplicación sobreyectiva de* $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ *en* $C_0(\mathbb{R})$.

Ejercicio 4.6.16 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *se define* $h_n(t) = \frac{1-\cos(nt)}{\pi n t^2}$. *demuestra que dada* $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R})$, *la sucesión* $h_n * f$ *converge a* f *en* $\mathcal{L}_p(\mathbb{R})$.

Ejercicio 4.6.17 *Probar que las dos siguientes familias* $(W_\lambda)_{\lambda>0}$ *y* $(P_\lambda)_{\lambda>0}$ *son núcleos de sumabilidad:*

(i) Núcleo de Gauss-Weierstrass,

$$W_\lambda(x) = (\frac{\lambda}{4\pi})^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4}\lambda}$$

.

(ii) Núcleo de Poisson en $\mathbb{R}^n$,

$$P_\lambda(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{\lambda^{-1}}{(\lambda^{-1} + \|x\|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Ejercicio 4.6.18 *Sabiendo que* $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi$ *y definiendo, para* $f \in \mathcal{L}^p$:

$$F_n(x) = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x-y)}{\sqrt{ny(1-ny)}} dy$$

demuestra que

$$\lim nF_n = \pi f \quad \text{en} \mathcal{L}_p.$$

Podemos también trabajar con las transformadas seno y coseno de Fourier en el caso $n = 1$:

$$\hat{f}_c(\xi) = \int_0^\infty f(x) \cos(\xi x) dx$$

$$\hat{f}_s(\xi) = \int_0^\infty f(x) \sin(\xi x) dx.$$

Ejercicio 4.6.19 *Sea* $f \in LI(0, \infty) \cap \mathcal{L}^1(0, \infty)$. *Prueba que:*

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda x \int_0^\infty f(t) \cos(\lambda t) dt d\lambda$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(\lambda x) \int_0^\infty f(t) \sin(\lambda t) dt d\lambda.$$

Ejercicio 4.6.20 *Prueba que*

$$\lim_{M\to\infty} \int_0^M \frac{\sin t \cos(tx)}{t} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |x| < 1 \\ 0 & |x| 1 \\ \frac{\pi}{4} & |x| = 1. \end{cases}$$

Ejercicio 4.6.21 *Demuestra que:*

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{b^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2b}e^{-|a|b} \qquad \forall b > 0.$$

Ejercicio 4.6.22 *Halla la transformada de Fourier en seno y coseno de* $e^{-x}\cos x$.

Ejercicio 4.6.23 *Halla la transformada en coseno de* e^{-x^2}.

Ejercicio 4.6.24 *Halla transformada seno de* $\frac{x}{1+x^2+x^4}$ *y transformada coseno de* $\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$.

Ejercicio 4.6.25 *Sea f una función medible integrable Lebesgue en cada intervalo acotado de $\mathbb{R}$. Probar que si*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx = 0$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, entonces f es cero casi por todas partes.

Ejercicio 4.6.26 *Calcular la transformada de Fourier de la función $f(x) = xe^{-|x|}$, y usarla para demostrar que:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^4}dx = \frac{\pi}{16}.$$

Ejercicio 4.6.27 *Comprobar*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{2} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \pi.$$

Ejercicio 4.6.28 *Sean dos reales $a < b$. Probar que la función*

$$f(\xi) = 2\frac{\sin(\frac{b-a}{2}\xi)}{\xi}e^{-i\frac{b+a}{2}\xi}$$

está en $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Calcular la transformada de Fourier en el caso en que $a < 0$ y $b = -a$.

4.7 Aplicaciones.

Separación de variables.

La ecuación

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0$$

regula las vibraciones transversales de una cuerda elástica con extremos fijos, donde u es la deflexión de la cuerda y $c^2 = \frac{T}{p}$, donde p es la masa de la cuerda y T la tensión.

El flujo de calor en un cuerpo está determinado por la ecuación

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_t = 0,$$

donde u es la temperatura y $c^2 = \frac{K}{p\gamma}$, donde K es la conductividad, γ es el calor específico y p la densidad.

En problemas de flujo de calor en estado estacionario, la función de temperatura satisface la ecuación de Laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Problemas propuestos

Ejercicio 4.7.1 *Demuestra que:*

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & 0 < x < \pi \\ u(0,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ u(x,0) = \pi - x & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

tiene por solución

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin((2n-1)x)) e^{-c^2(2n-1)^2 t}$$

Ejercicio 4.7.2 *Demuestra que, dada $f \in \mathcal{L}^1(0,1)$:*

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2}u_{xx} + f & 0 \leq x \leq 1 \quad t \geq 0 \\ u(0,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(1,t) = 0 & t \geq 0 \\ \lim_{t\to 0} u(x,t) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

tiene por solucion:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-e^{-\frac{\pi^2n^2t}{2}}}{\frac{\pi^2n^2}{2}}\int_0^1\sqrt{2}f(y)\sin n\pi y dy\sqrt{2}\sin n\pi x$$

Ejercicio 4.7.3 *Demuestra que*

$$\begin{cases} u_{xx}=u_{tt} \quad 0<x<\pi, \quad t\geq 0\\ u(0,t)=0 \quad t\geq 0\\ u(\pi,t)=0 \quad t\geq 0\\ u(x,0)=2x \quad 0<x<\frac{\pi}{2}\\ u(x,0)=2(\pi-x) \quad \frac{\pi}{2}<x<\pi\\ u_t(x,0)=0 \quad 0<x<\pi\end{cases}$$

tiene por solución:

$$u(x,t)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)x\cos(2n+1)t$$

Ejercicio 4.7.4 *Demuestra que:*

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \quad 0<x<\pi,\ 0<y<\pi\\ u(0,y)=0 \quad 0<y<\pi\\ u(x,0)=0 \quad 0<x<\pi\\ u(x,\pi)=0 \quad 0<x<\pi\\ u(\pi,y)=1 \quad 0<y<\pi\end{cases}$$

tiene por solución:

$$u(x,y)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{\sinh((2n+1)x)}{\sinh((2n+1)\pi)}\sin((2n+1)y)$$

Ejercicio 4.7.5 *Demuestra que, dada* $f\in\mathcal{L}^1(0,1):$

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+f \quad 0<x<1, \quad t\geq 0\\ u(0,t)=0 \quad t\geq 0\\ u(\pi,t)=0 \quad t\geq 0\\ u(x,0)=0 \quad 0<x<1\\ u_t(x,0)=0 \quad 0<x<1\end{cases}$$

tiene por solución:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi t}{n^2\pi^2}\int_0^1 f(y)\sqrt{2}\sin(n\pi y)dy\sqrt{2}\sin(n\pi x)$$

Aplicaciones de la transformada de Fourier

Ejercicio 4.7.6 *Demuestra que*

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} & -\infty < x < \infty,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \quad f \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \\ u_t(x,0) = 0 & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

tiene como solución:

$$u(x,t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$$

Ejercicio 4.7.7 *Demuestra que*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & -\infty < x < \infty, t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \quad f \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

tiene como solución

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

Ejercicio 4.7.8 *Demuestra que*

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t = f(x,t) & -\infty < x < \infty,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

tiene como solución:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-s)^2}{4(t-r)}}}{\sqrt{t-r}} H(t-r) f(s,r) ds dr,$$

donde:

$$H(s) = \begin{cases} 1 & s \geq 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4.7.9 *Demuestra que*

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & x \geq 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = 0 & x \geq 0 \\ u(0,t) = g(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

tiene por solución:

$$u(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(s)}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} ds$$

Ejercicio 4.7.10 *Sea f una función arbitraria y sea F su transformada de Fourier. Prueba que:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{\imath n 2\pi t}{T}} F(\frac{2n\pi}{T})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\frac{2\pi n}{T}).$$

Ejercicio 4.7.11 *Prueba que*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-a|n|} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2+(2n\pi)^2}$$

$$\frac{a}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-a(t+n)^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{a}} \cos 2\pi n t.$$

Chapter 5

Algunos teoremas clave

5.1 Teorema de Plancherel

Recordemos que $\mathcal{F}$ transforma $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $C_0(\mathbb{R}^n)$ de manera inyectiva. Veremos que para funciones de $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ puede decirse algo más.

Veamos los espacios que análogos a $A(\mathbb{T})$ y $\Pi(\mathbb{T})$.

Definición 5.1.1 *Denotamos*

$$\Pi(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \hat{f} \in C_{00}(\mathbb{R}^n)\},$$
$$A(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$$

y definimos la norma $\|f\|_{A(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{f}\|_1$.

Por supuesto $\Pi(\mathbb{R}^n) \subset A(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 5.1.2
(i) $A(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$. *Además* $\|f\|_\infty \leq (2\pi)^{-n}\|f\|_{A(\mathbb{R}^n)}$ *para* $f \in A(\mathbb{R}^n)$.
(ii) $\Pi(\mathbb{R}^n)$ *y* $A(\mathbb{R}^n)$ *son ideales de* $L^1(\mathbb{R}^n)$.

DEM: (i) Recordar que si $f \in A(\mathbb{R}^n)$ entonces $(2\pi)^n f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}dm_n(\xi)$. De donde se sigue que $(2\pi)^n f(x) = (\hat{f})\hat{\ }(-x)$ y por tanto en $C_0(\mathbb{R}^n)$. Además $\|f\|_\infty \leq (2\pi)^{-n}\|f\|_{A(\mathbb{R}^n)}$.

(ii) Usar que $(f*g)\hat{\ } = \hat{f}\hat{g}$. Por tanto si $\hat{f} \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ o $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ también $(f * g)\hat{\ } \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ o $(f * g)\hat{\ } \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

$\blacksquare$

Proposición 5.1.3 *(Núcleo de Fèjer en $\mathbb{R}$) Sea* $K(x) = \frac{1}{2\pi}(\frac{sen(x/2)}{x/2})^2$, $x \in \mathbb{R}$ *y* $x \neq 0$. *Entonces*

(i) $\int_{\mathbb{R}} K(x)dm_1(x) = 1$.

(ii) $\widehat{K}(\xi) = (1 - |\xi|)\chi_{[-1,1]}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$.

DEM: (i) Es claro que $K \in L^1(\mathbb{R})$ (pues K es continua en $|x| \leq 1$ y acotada por $\frac{C}{|x|^2}$ en $|x| \geq 1$). Por tanto $\int_{\mathbb{R}} K(x)dx = A$.

Recordemos que el núcleo de Fèjer de $\mathbb{T}$ es $K_n(t) = \frac{1}{n+1}(\frac{sen((n+1)x/2)}{sen(x/2)})^2$ y se cumple

$$2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 2\int_0^{(n+1)\pi} \frac{sen^2(x/2)}{(n+1)^2 sen^2(\frac{x}{2(n+1)})}dx.$$

Tenemos, entonces

$$\begin{aligned}\int_0^{(n+1)\pi} \frac{sen^2(x/2)}{(x/2)^2}dx &= \int_0^{(n+1)\pi} \frac{sen^2(\frac{x}{2(n+1)})}{\frac{x^2}{4(n+1)^2}} \frac{sen^2(x/2)}{(n+1)^2 sen^2(\frac{x}{2(n+1)})}dx \\ &\leq \int_0^{(n+1)\pi} \frac{sen^2(x/2)}{(n+1)^2 sen^2(\frac{x}{2(n+1)})}dx = \pi.\end{aligned}$$

Por tanto $A = \int_{\mathbb{R}} K(x)dx = 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{(n+1)\pi} \frac{sen^2(x/2)}{(x/2)^2}dx \leq 1$.

Recordemos que $K_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}K(\frac{x}{\varepsilon})$ y para $\delta > 0$ se tiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|<\delta} K_\varepsilon(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|<\delta\varepsilon} K(x)dx = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} K(x) = A.$$

Por tanto, usando $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, y que $\frac{sen(x)}{x}$ es monótona decreciente en $(0, \frac{\pi}{2})$ obtenemos

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{sen^2((n+1)x/2)}{(n+1)(x/2)^2}\frac{dx}{2\pi} \\ &\geq \frac{sen^2(\delta/2)}{(\delta/2)^2}\lim_{n\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{sen^2((n+1)x/2)}{(n+1)sen^2(x/2)}\frac{dx}{2\pi} \\ &\geq \frac{sen^2(\delta/2)}{(\delta/2)^2}\end{aligned}$$

donde hemos usado que el núcleo de Fèjer de $\mathbb{T}$ es un núcleo de sumabilidad en el último paso. Finalmente pasado al límite cuando δ tiende a 0 se obtiene $A = 1$.

(ii) Es sufiente probar que $K(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(1-|\xi|)\chi_{[-1,1]}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$. Sea $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-|\xi|)e^{ix\xi}d\xi &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}e^{ix\xi}d\xi - \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}|\xi|e^{ix\xi}d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}cos(x\xi)d\xi - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\xi cos(x\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{sen(x\xi)}{x}\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{\pi}\frac{\xi sen(x\xi)}{x}\Big|_{0}^{1} - \frac{1}{x\pi}\int_{0}^{1}sen(x\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{x^2\pi}cos(x\xi)\Big|_{0}^{1} \\
&= \frac{1-cosx}{x^2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}(\frac{sen(x/2)}{x/2})^2
\end{aligned}$$

Observar que usando (ii) se obtiene (i) de manera directa, pues $\int_{\mathbb{R}}K(x)dx = \hat{K}(0)$. ∎

Corolario 5.1.4 *Sea $1 \leq p < \infty$. $\Pi(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y en $C_0(\mathbb{R}^n)$.*

Dem: Consideremos $K(x_1,..,x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n}\prod_{i=1}^{n}(\frac{sen(x_i/2)}{x_i/2})^2$. Es inmediato comprobar que $K \in \Pi(\mathbb{R}^n)$. Entonces si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ o $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $K_\varepsilon * f \in \Pi(\mathbb{R}^n)$ y converge a f en $L^p(\mathbb{R}^n)$ o $C_0(\mathbb{R}^n)$ respectivamente. ∎

Corolario 5.1.5
(i) Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R})$ entonces

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}(1-\frac{|\xi|}{\lambda})\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi = f(\text{ en } L^p(\mathbb{R})).$$

(ii) Si $f \in C_0(\mathbb{R})$ entonces

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}(1-\frac{|\xi|}{\lambda})\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi = f(x)$$

uniformemente en $x \in \mathbb{R}$.

Vamos a intentar extender la transformada de Fourier a funciones de $L^2(\mathbb{R})$. Necesitaremos pasar por subespacios densos.

Teorema 5.1.6 *Sea $f \in C_{00}(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx.$$

DEM: Paso 1: Suponer $sop(f) \subset (-\pi, \pi)$. Podemos periodificar la función. Usando, para $n \in \mathbb{Z}$, que $\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \frac{dt}{2\pi} = \frac{\mathcal{F}(f)(n)}{2\pi}$ y el Teorema de Plancherel de $\mathbb{T}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi}.$$

Apliquemos este proceso a las funciones $M_{-\alpha} f(x) = e^{-i\alpha x} f(x)$. Es sabido que $\mathcal{F}(M_{-\alpha} f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi + \alpha)$. Luego para $0 < \alpha < 1$,

$$\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\mathcal{F}(f)(n+\alpha)|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi}.$$

Integrando en $\alpha \in (0,1)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 |\mathcal{F}(f)(n+\alpha)|^2 d\alpha \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

Paso 2: Soporte compacto cualquiera. Suponer $sop(f) \subset (-M, M)$. Tomar $F_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} f(\frac{x}{t})$ cuyo soporte está en $(-tM, tM)$. Tomar $0 < t < \frac{\pi}{M}$ y aplicar el caso anterior, obteniendo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dm_1(x) &= \int_{\mathbb{R}} |F_t(x)|^2 dm_1(x) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(F_t)(\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} t |\mathcal{F}(f)(t\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

■

Teorema 5.1.7 *Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ entonces $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Además $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$.*

DEM: Dada $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Tomar $f_k = f\chi_{[-k,k]} * K_{\varepsilon_k}$ siendo K_ε un núcleo de sumabilidad en $C_{00}(\mathbb{R})$. Luego, si $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \|f - f\chi_{[-k,k]} * K_{\varepsilon_k}\|_i &\leq \|(f - f\chi_{[-k,k]}) * K_{\varepsilon_k}\|_i + \|f - f * K_{\varepsilon_k}\|_i \\ &\leq \|f - f\chi_{[-k,k]}\|_i \|K_{\varepsilon_k}\|_1 + \|f - f * K_{\varepsilon_k}\|_i. \end{aligned}$$

Luego existe $f_n \in C_{00}(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 + \|f - f_n\|_2 = 0$. Ahora, por el teorema anterior,

$$\frac{1}{2\pi}\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2^2 = \|f_n - f_m\|^2,$$

luego existe $g \in L^2(\mathbb{R})$ con $\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n = g$ in $L^2(\mathbb{R})$. Por tanto $\|g\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|\hat{f}_n\|_2$.

Además $\|f\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2$. De donde se deduce que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|g\|_2 = \|f\|_2$.

Finalmente observar que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $L^1(\mathbb{R})$ y por tanto $\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(\xi) = \hat{f}(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$. De donde se deduce que $g = \hat{f}$ a.e. y se concluye que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. ∎

Teorema 5.1.8 *(Teorema de Plancherel) Existe una extensión $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ que es una biyección continua con $\|\mathcal{F}\| = \sqrt{2\pi}$ que verifica $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ para $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.*

DEM: Usando la densidad de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ se puede extender el operador conservando la norma.

Veamos que es suprayectivo. Dada $g \in L^2(\mathbb{R})$ existe $g_n \in \Pi(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|g - g_n\|_2 = 0$.

Sea entonces $f_n(x) = \hat{g}_n(-x)$. Usando que $\|f_n - f_m\|_2 = \sqrt{2\pi}\|g_n - g_m\|_2$ se concluye que existe $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\lim f_n = f$ in $L^2(\mathbb{R})$. Como es obvio que $\mathcal{F}(f_n) = 2\pi g_n$ entonces, por unicidad de la extensión $\mathcal{F}(f) = 2\pi g$. ∎

5.2 Teoremas de Paley-Wiener

El objetivo es estudiar la relación entre la propiedades de analiticidad y el crecimiento de una función en $\mathbb{R}$ y el crecimiento de su transformada de

Fourier. Considerando $\mathbb{R}$ como el eje del plano complejo, es claro que una función es analítica en $\mathbb{R}$ si y sólo si es la restricción a $\mathbb{R}$ de una función F holomorfa en cierto dominio que contenga $\mathbb{R}$. En general dicho dominio no tiene por que contener una banda $\Omega_a = \{z \in \mathbb{C} : |Im(z)| < a\}$ para $a > 0$.

Lema 5.2.1 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que existe $a > 0$ con $|\hat{f}(y)| \leq Ce^{-a|y|}$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{i\xi z}d\xi \in \mathcal{H}(\Omega_a).$$

Además F es acotada en Ω_{a_1} para $a_1 < a$ y $F|_{\mathbb{R}} = f$.

Dem: Nótese que si $z \in \Omega_a$ entonces

$$|\hat{f}(\xi)e^{i\xi z}| = |\hat{f}(\xi)|e^{-\xi Im(z)} \leq Ce^{-a|\xi|-\xi Im(z)} \leq Ce^{-|\xi|(a-|Im(z)|)}.$$

Luego $\hat{f}(\xi)e^{i\xi z}$ es continua e integrable y $F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{i\xi z}d\xi$ está bien definida.

Veamos que es holomorfa en Ω_a. Sea $(z_n), z \in \Omega_a$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Probemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(z_n) - F(z)}{z_n - z} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} i\xi\hat{f}(\xi)e^{i\xi z}d\xi.$$

En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)(\frac{e^{i\xi z_n} - e^{i\xi z}}{z_n - z} - i\xi e^{i\xi z})d\xi = 0.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \hat{f}(\xi)(\frac{e^{i\xi z_n}-e^{i\xi z}}{z_n-z} - i\xi e^{i\xi z}) = 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y además

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)(\frac{e^{i\xi z_n} - e^{i\xi z}}{z_n - z} - i\xi e^{i\xi z})| &\leq |\hat{f}(\xi)|(\sup_{z'\in[z_n,z]} |\xi e^{i\xi z'}| + |\xi e^{i\xi z}|) \\ &\leq 2C|\xi| \sup_{z'\in[z_n,z]} e^{-|\xi|(a-|Im(z')|)} \\ &\leq 2C|\xi|e^{-|\xi|\delta}, \end{aligned}$$

para $0 < \delta < a$, donde $|Im(z')| < a - \delta$ para todo $z' \in [z_n, z]$ y $n \in \mathbb{N}$.

Usando el teorema de la convergencia dominada se obtiene la derivabilidad de la función en z.

Para la acotación es suficiente usar que si $z \in \Omega_{a_1}$

$$|F(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)e^{i\xi z}|d\xi \leq \frac{C}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-|\xi|(a-a_1)}d\xi.$$

■

Lema 5.2.2 *Sea $a > 0$ y $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $e^{a|\xi|}\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{i\xi z}d\xi \in \mathcal{H}(\Omega_a).$$

Se tiene $F|_{\mathbb{R}} = f$ a.e. y $\hat{F}_y(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-y\xi}$ donde $Fy(x) = F(x+iy)$.

Dem: Nótese que si $z \in \Omega_a$ entonces

$$|\hat{f}(\xi)e^{i\xi z}| = e^{-a|\xi|}|e^{a|\xi|}\hat{f}(\xi)|e^{-\xi Im(z)} \leq |e^{a|\xi|}\hat{f}(\xi)|e^{-|\xi|(a-|Im(z)|)}.$$

Luego, usando Cauchy-Schwarz, $\hat{f}(\xi)e^{i\xi z}$ es integrable y $F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{i\xi z}d\xi$ está bien definida.

Veamos que es holomorfa en Ω_a. Sea $(z_n), z \in \Omega_a$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Probemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(z_n) - F(z)}{z_n - z} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} i\xi\hat{f}(\xi)e^{i\xi z}d\xi.$$

Es el mismo argumento que en el lema anterior, reemplazando la estimación final como sigue:

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)(\frac{e^{i\xi z_n} - e^{i\xi z}}{z_n - z} - i\xi e^{i\xi z})| &\leq |\hat{f}(\xi)|(\sup_{z' \in [z_n, z]} |\xi e^{i\xi z'}| + |\xi e^{i\xi z}|) \\
&\leq 2|\xi||e^{a|\xi|}\hat{f}(\xi)| \sup_{z' \in [z_n, z]} e^{-|\xi|(a-|Im(z')|)} \\
&\leq 2e^{a|\xi|}|\hat{f}(\xi)||\xi|e^{-|\xi|\delta},
\end{aligned}$$

para $0 < \delta < a$, donde $|Im(z')| < a - \delta$ para todo $z' \in [z_n, z]$ y $n \in \mathbb{N}$.

Usando, que $|\xi|e^{-|\xi|\delta} \in L^2(\mathbb{R})$ y Cauchy-Schwarz de nuevo, se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada.

Observar que la hipótesis garantiza que $\hat{f}(\xi)e^{-\xi y} \in L^1(\mathbb{R})$ para $|y| < a$. Luego

$$F_y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{-\xi y}e^{i\xi x}d\xi \in C_0(\mathbb{R})$$

para cada $|y| < a$. En particular, debido a la fórmula de inversión se tiene $F_0(x) = f(x) a.e.$ y también que $\hat{F}_y(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-y\xi}$ donde $Fy(x) = F(x+iy)$. ■

Teorema 5.2.3 *(Paley-Wiener) Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y sea $a > 0$. Son equivalentes:*

(i) f es la restricción a $\mathbb{R}$ de una función $F \in \mathcal{H}(\Omega_a)$ tal que

$$\sup_{|y|<a} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 dx < \infty.$$

(ii) $e^{a|\xi|}\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$.

DEM:

(ii)$\Longrightarrow$ (i) Usando el Lema 5.2.2 se tiene que $F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{i\xi z}d\xi$ es la función que buscamos. Además, usando el Teorema de Plancherel

$$\sup_{|y|<a} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 e^{2\xi y} d\xi = \|\hat{f}e^{a|\xi|}\|_2^2.$$

(i)$\Longrightarrow$ (ii) Sea $F_y(x) = F(x+iy)$. Veamos que $\hat{F}_y(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-y\xi}$ para todo $|y| < a$.

Considerar $z \in \Omega_a$, entonces

$$G_\lambda(z) = \int_{\mathbb{R}} F(z-u)K_\lambda(u)du$$

donde K_λ es el núcleo de Fèjer en $\mathbb{R}$.

Observar $G_\lambda \in \mathcal{H}(\Omega_a)$, puesto que si $F = U + iV$ tenemos $Re(G_\lambda)(z) = \int_{\mathbb{R}} U(z-u)K_\lambda(u)du$ e $Im(G_\lambda)(z) = \int_{\mathbb{R}} V(z-u)K_\lambda(u)du$ verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann (debido a la derivación bajo el signo integral).

Obsérvese que $G_\lambda(x) = f * K_\lambda(x)$, y denotemos $g_{\lambda,y}(x) = G_\lambda(x+iy)$. Es claro que $g_{\lambda,y} = F_y * K_\lambda$ y por tanto

$$\hat{g}_{\lambda,y}(\xi) = \hat{F}_y(\xi)\hat{K}_\lambda(\xi).$$

Como $\hat{g}_{\lambda,y}$ tiene soporte compacto se tiene $\hat{g}_{\lambda,y}(\xi) = \hat{g}_{\lambda,0}(\xi)e^{-\xi y}$ para todo $y > 0$. Consecuentemente $\hat{F}_y(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-\xi y}$ para todo $y > 0$ y $|\xi| < \lambda$.

Como $\lambda > 0$ es arbitrario se tiene $\hat{F}_y(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-\xi y}$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y $y > 0$. Ahora usando Plancherel y la hipótesis tenemos

$$\sup_{|y|<a} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 e^{2\xi y} d\xi < \infty.$$

Por tanto, por el teorema de la convergencia dominada $e^{a|\xi|}\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$.

■

Denotemos $H = \{z : Im(z) > 0\}$.

Teorema 5.2.4 *(Paley-Wiener) Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Son equivalentes*

(i) Existe una función $F \in \mathcal{H}(H)$ tal que

$$\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 dx < \infty$$

y

$$\lim_{y\to 0} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy) - f(x)|^2 dx = 0$$

(ii) $\hat{f}(\xi) = 0$ para todo $\xi < 0$.

DEM:

(ii)$\Longrightarrow$ (i) Definimos $F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{i\xi z}d\xi$ para $Im(z) > 0$. Es fácil comprobar que $F \in \mathcal{H}(H)$, $F(x+iy)$ es la transformada de Fourier inversa de $e^{-\xi y}\hat{f}$, y, por Plancherel

$$\|F(. + iy)\|_2 = \|\hat{f}e^{-\xi y}\|_2 \leq \|\hat{f}\|_2$$

Además

$$\lim_{y\to 0} \|F(. + iy) - f\|_2 = \lim_{y\to 0} \|\hat{f}(e^{-\xi y} - 1)\|_2 = 0.$$

(i)$\Longrightarrow$ (ii) Escribimos $f_1(x) = F(x+i)$. Por tanto

$$\|F(. + i(1+y))\|_2 = \|\hat{f}_1 e^{-\xi y}\|_2$$

para $-1 < y < \infty$. En particular, tomando límites cuando $y \to \infty$ en $\|\hat{f}_1 e^{-\xi y}\|_2 \leq C$ se obtiene $\hat{f}_1(\xi) = 0$ para $\xi < 0$. Por otro lado la transformada de Fourier de $F(\cdot + y)$ es $\hat{f}_1(\xi)e^{\xi(1-y)}$ y por la hipótesis

$$\lim_{y\to 0} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy) - f(x)|^2 dx = \lim_{y\to 0} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_1(\xi)e^{\xi(1-y)} - \hat{f}(\xi)|^2 d\xi = 0.$$

Esto implica $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi)e^{\xi} = 0$ para $\xi < 0$. ■