ANÁLISIS FUNCIONAL

Oscar Blasco

Contents

Chapter 1

Introducción a los espacios de Hilbert

1.1 Producto escalar: Propiedades y ejemplos

Definición 1.1.1 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ se llama producto escalar si cumple las siguientes propiedades:*
(i) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \quad x, y, z \in X.$
(ii)$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \quad x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}.$
(iii) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}, \quad x, y \in X.$
(iv) $\langle x, x \rangle > 0, \quad x \in X, x \neq 0.$

Nota 1.1.1 *Se obtiene de manera inmediata que*
(v) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle, \quad x, y, z \in X.$
(vi) $\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle, \quad x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}.$

Definición 1.1.2 *Un espacio $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dotado de un producto escalar se dice espacio prehilbertiano. Definimos $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.*

Ejemplo 1.1.1 $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ *con*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Ejemplo 1.1.2 $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, ..., z_n) : z_i \in \mathbb{C}\}$ *con*

$$\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i.$$

Ejemplo 1.1.3 $\ell^2 = \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} : z_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty\}$ *con*

$$\langle (z_n), (w_n)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \bar{w}_n.$$

Ejemplo 1.1.4 $C([a, b])$ *espacio de funciones continuas (con valores en* $\mathbb{K}$*) con*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Ejemplo 1.1.5 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *medible Lebesgue. Considerar*

$$\mathcal{L}^2(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ medibles } : \int_\Omega |f(x)|^2 dm(x) < \infty\}.$$

Diremos que $f \approx g$ *si* $m(\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}) = 0$*, i.e.* $f = g$ *en casi todo punto y definimos* $L^2(\Omega)$ *el espacio cociente* $\mathcal{L}^2(\Omega)/\approx$ *. Definimos el producto escalar sobre este espacio*

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dm(x).$$

Proposición 1.1.3 *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Sea* $(X, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ *un espacio prehilbertiano. Entonces*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|, \quad x, y \in X \tag{1.1}$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $x \neq 0$ y que $y \neq 0$ pues caso contrario $\langle x, y\rangle = 0$ y la desigualdad es trivial.

Consideremos $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in X$.

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \beta x + \lambda y, \beta x + \lambda y\rangle &= |\beta|^2\langle x, x\rangle + \beta\bar{\lambda}\langle x, y\rangle + \bar{\beta}\lambda\langle y, x\rangle + |\lambda|^2\langle y, y\rangle \\ &= |\beta|^2\|x\|^2 + 2\Re(\beta\bar{\lambda}\langle x, y\rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Como $x \neq 0$ se puede elegir $\beta = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}$ y $\lambda = -1$ y se obtiene

$$0 \leq -\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2.$$

Y por tanto $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$. ■

Proposición 1.1.4 *(Desigualdad de Minkowski) Sea* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio prehilbertiano. Entonces*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in X \tag{1.2}$$

Demostración: Usando (1.1) se tiene

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\Re\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

■

Nota 1.1.2 *Si* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es un espacio prehilbertiano entonces* $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado.*

Proposición 1.1.5 *Sea* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio prehilbertiano. Entonces*
(i) $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ *es continua.*
(ii) $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ *es continua.*
(iii) $+ : X \times X \to \mathbb{K}$ *definida por* $(x, y) \to x + y$ *es continua.*
(iv) $. : \mathbb{K} \times X \to \mathbb{K}$ *definida por* $(\lambda, x) \to \lambda x$ *es continua.*

Demostración: (i) Como $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ y $\|y\| \leq \|x - y\| + \|x\|$ se concluye que $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ y también $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$. Es decir,

$$|\|x\| - \|y\|| \leq |x - y\|.$$

Lo que demuestra la continuidad de la norma.

(ii) Supongamos que $x_n \to x$ y $y_n \to y$. Entonces

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \\
&\leq |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \\
&\leq \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\|.
\end{aligned}$$

Ahora tomar $\lim_{n\to\infty}$.

(iii) y (iv) inmediatas. ■

Corolario 1.1.6 *Si Y es un subespacio vectorial de X entonces la clausura $\bar{Y}$ es tambien un subespacio.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\lambda, \beta \in K$ y $x, y \in \bar{Y}$ existen (x_n) e (y_n) sucesiones en Y tales que $x_n \to x$ e $y_n \to y$.

Ahora por continuidad $\lambda x_n + \beta y_n \in Y$ y $\lambda x + \beta y = \lim_n(\lambda x_n + \beta y_n) \in \bar{Y}$. ■

Proposición 1.1.7 *(Ley del paralelogramo) Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio pre-hilbertiano. Entonces*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad x, y \in X \tag{1.3}$$

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\Re(\langle x,y\rangle) + \|y\|^2 \\ &+ \|x\|^2 - 2\Re(\langle x,y\rangle) + \|y\|^2 \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

■

Proposición 1.1.8 *(Identidad de polarización) Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio pre-hilbertiano real. Entonces*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \quad x, y \in X \tag{1.4}$$

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\ &- (\|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\ &= 4\langle x,y\rangle. \end{aligned}$$

■

1.2 Completitud y ortogonalidad

Definición 1.2.1 *Un espacio prehilbertiano* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *tal que es completo respecto a la norma* $\|x\| = \sqrt{x, x}$ *se denomina espacio de Hilbert.*

Teorema 1.2.2 $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$*, donde* $\|(x_k)\|_2 = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{1/2}$*, es un espacio de Hilbert.*

Demostración: Sea $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^2. Como

$$|x_k^m - x_k^n| \le \|x^n - x^m\|_2, \quad k \in \mathbb{N}$$

se concluye que $(x_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$, y por ser $\mathbb{K}$ un espacio completo $\lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Veamos que x^m converge a $x = (x_1, x_2, ...)$ y $x \in \ell^2$.

Dado $\varepsilon > o$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^n - x_k^m|^2 = \|x^n - x^m\|_2^2 < \varepsilon^2, \quad n, m \ge n_0.$$

Fijemos $N \in \mathbb{N}$. En particular $\sum_{k=1}^{N} |x_k^n - x_k^m|^2 < \varepsilon^2$. Pasando al $\lim_{m\to\infty}$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k^n - x_k|^2 \le \varepsilon^2, \quad n \ge n_0.$$

Tomando supremos en N se concluye que $\|x^n - x\|_2 \le \varepsilon$ para $n \ge n_0$. Esto significa $x^n \to x$. La desigualdad de Minkowskyi implica que

$$(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^2)^{1/2} \le (\sum_{k=1}^{N} |x_k - x_k^{n_0}|^2)^{1/2} + (\sum_{k=1}^{N} |x_k^{n_0}|^2)^{1/2} \le \varepsilon + \|x_{n_o}\|.$$

Tomando $lim_{N\to\infty}$ se concluye que $x \in \ell^2$. ■

Proposición 1.2.3 *Sea* $C([0,1])$ *el espacio de las funciones continuas en* $[0,1]$ *con valores en* $\mathbb{R}$*. Entonces* $C([0,1])$ *no es un espacio de Hilbert respecto al producto escalar*

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Demostración: Sea

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ n(t - \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Como $0 \leq f_n \leq 1$, se tiene que para $m \geq n$

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt \leq \frac{4}{n}.$$

Por tanto $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Supongamos que existe $f \in C([0,1])$ tal que $\lim_n \|f_n - f\|_2 = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|^2 dt &= \int_0^{1/2} |f(t)|^2 dt \\ &+ \int_{1/2}^{1/2+1/n} |f_n(t) - f(t)|^2 dt \\ &+ \int_{1/2+1/n}^1 |1 - f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Tomando $\lim_{n\to\infty}$ se concluye que $\int_0^{1/2} |f(t)|^2 dt + \int_{1/2}^1 |1 - f(t)|^2 dt = 0$. Como f es continua entonces $f(t) = 0$ para $0 < t < 1/2$ y $f(t) = 1$ para $1/2 < t < 1$. Como consecuencia f no es continua en $t = 1/2$. ■

Definición 1.2.4 *Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio prehilbertiano y sean $x, y \in X$. Diremos que x e y son ortogonales , y denotaremos $x \perp y$, si $\langle x, y\rangle = 0$.*

Dado $\varnothing \neq M \subset X$ definimos el conjunto ortogonal de M por

$$M^\perp = \{x \in X : \langle x, y\rangle = 0 \text{ para todo } y \in M\}.$$

Ejemplo 1.2.1 *Sea $X = \mathbb{R}^n$ y sean $x = (1, 0, ..., 0)$ e $y = (0, 1, 0....)$. Entonces $x \perp y$.*

Sea $x_0 = (a_1, ..., a_n)$. Entonces $(x_0)^\perp = \{(x_1, ..., x_n) : \sum_{k=1}^n a_i x_i = 0\}$ es un hiperplano de vector normal x_0.

Ejemplo 1.2.2 *Sea $X = \ell^2$ y sean $e_n = (\overbrace{0, ..., 0}^{n-1}, 1, 0..., 0)$ para $n \in \mathbb{N}$.*

Entonces $e_n \perp e_m$ si $n \neq m$.

Si $x = (1, 1, 0, 0, ...)$ e $y = (0, 0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, ...)$ entonces $x \perp y$.

Si $x = (1, \sqrt{1/2}, \sqrt{1/4}, ..., \sqrt{1/2^n}, ...)$ *e* $y = (-1, \sqrt{1/2}, \sqrt{1/4}, ..., \sqrt{1/2^n}, ...)$ *entonces* $x \perp y$.

Sea $x = (1, 1/2, 1/4, ..., 1/2^n, ...)$. *Entonces*

$$x^\perp = \{(x_1, ..., x_n, ..) : \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty, \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{2^{n-1}} = 0\}.$$

Por ejemplo $y_1 = (-1, 0, ...)$ *ó* $y_2 = (0, -1/2, 1, 0, ...)$ *pertenecen a* $x^\perp$.

Ejemplo 1.2.3 *Sean* $X = L^2([0,1])$, $f(t) = sen(2\pi t)$ *y* $g(t) = cos(2\pi t)$. *Entonces* $f \perp g$, *pues*

$$\int_0^1 sen(2\pi t) cos(2\pi t) dt = \frac{1}{2}\int_0^1 sen(4\pi t) = 0.$$

En el caso complejo, sea $\phi_n(t) = e^{2\pi int}$ *para* $n \in \mathbb{Z}$. *Entonces* $\phi_n \perp \phi_m$ *si* $n \neq m$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \phi_n(t)\overline{\phi_m(t)} dt &= \int_0^1 e^{2\pi i(n-m)t} dt \\ &= \int_0^1 cos(2\pi(n-m)t) dt \\ &+ i\int_0^1 sen(2\pi(n-m)t) dt = 0, \quad n \neq m.\end{aligned}$$

Si $f_0(t) = 1$ *entonces*

$$(f_0)^\perp = \{f \in L^2([0,1]); \int_0^1 f(t) = 0\}.$$

Proposición 1.2.5 *Sea* $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espacio prehilbertiano y* $\varnothing \neq M \subset X$. *Entonces*

(i) $M^\perp$ *es un subespacio vectorial cerrado.*

(ii) $(\bar{M})^\perp = M^\perp$.

Demostración: (i) Es suficiente ver que $x^\perp$ es subespacio cerrado, pues $M^\perp = \cap_{x\in M} x^\perp$, y es claro que la intersección de subespacios es subespacio y la intersección de cerrados es cerrado. Nótese ahora que

$$x^\perp = \{y \in M : \langle x, y \rangle = 0\} = (\phi_x)^{-1}(\{0\})$$

donde $\phi_x(y) = \langle x, y \rangle$ es continua y lineal.

(ii) Se tiene que $(\bar{M})^\perp \subset M^\perp$ ya que $M \subset \bar{M}$. Dado ahora $x \in M^\perp$ y dado $y \in \bar{M}$, existe $y_n \in M$ tal que $y_n \to y$. Por tanto $\langle x, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$, y como $\langle x, y_n \rangle = 0$ entonces $x \perp y$. ■

Proposición 1.2.6 *(Teorema de Pitágoras) Sea* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *espacio prehilbertiano real y sean* $x, y \in X$*. Entonces*

$$x \perp y \text{ si y sólo si } \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\langle x, y\rangle = 0$ entonces

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ &+ \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2. \end{aligned}$$

El reciproco es cierto en el caso real pues $\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = 2\langle x, y\rangle$. ■

1.3 Proyecciones ortogonales.

Definición 1.3.1 *Sea* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio prehilbertiano,* $\varnothing \neq C \subset X$ *y* $x \in X$*. Definimos*

$$d(x, C) = \inf\{\|x-y\| : y \in C\}.$$

Nos interesa calcular la distancia mínima de un punto a un conjunto, y encontrar el valor (único si es posible) dónde se alcanza. Esto nos obliga a exigir ciertas condiciones en el conjunto C.

Nota 1.3.1 *Desde luego si* $x \in C$ *entonces* $d(x, C) = 0$*, pero puede ocurrir que* $d(x, C)) = 0$ *aunque* $x \notin C$*. Éste es el caso si* C *no es cerrado (por ejemplo* $X = \mathbb{R}$*,* $C = (0, 1)$ *y* $x = 0$*). En este caso no se garantiza existencia de mínimo en* C*.*

Nota 1.3.2 *Si* $X = \mathbb{R}^2$*,* C *la circunferencia unidad y* x *el origen entonces* $d(x, C) = 1$ *y se alcanza en todos los puntos de* C*. La no convexidad de* C *es el motivo de la no unicidad!*

Recordemos que un conjunto $\varnothing \neq C \subset X$ se dice *convexo* si dados $x, y \in C$ y $0 < t < 1$ entonces $tx + (1-t)y \in C$.

Teorema 1.3.2 *(Aproximación óptima) Sea* X *espacio de Hilbert,* $\varnothing \neq C \subset X$ *convexo y cerrado. Entonces para todo* $x \in X$ *existe un único* $u \in C$ *tal que* $d(x, C) = \|x-u\|$*.*

DEMOSTRACIÓN: Probemos primero la existencia. Si $x \in C$ tomemos $u = x$. Podemos suponer que $x \notin C$, y por ser C cerrado, $d(x, C) = d > 0$.

Sea (y_n) una sucesión de puntos de C tales que

$$d^2 = \|x - y_n\|^2 \leq d^2 + 1/n.$$

Veamos que (y_n) es de Cauchy. Usando la ley del paralelogramo (1.3)

$$\begin{aligned} \|(y_n + y_m) - 2x\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 \\ &\leq 4d^2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{m}. \end{aligned}$$

Como C es convexo se tiene que $\|(y_n + y_m) - 2x\|^2 = 4\|\frac{y_n}{2} + \frac{y_m}{2} - x\|^2 \geq 4d^2$. Es decir,

$$4d^2 + \|y_n - y_m\|^2 \leq 4d^2 + 2/n + 2/m.$$

Por tanto si $n_0 \in \mathbb{N}$ es tal que $2/n < \varepsilon^2/2$ para $n \geq n_0$ se obtiene

$$\|y_n - y_m\| < \varepsilon, \quad n, m \geq n_0.$$

Como (C, d) es un espacio métrico completo existe $u \in C$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \|y_n - u\| = 0.$$

Por tanto

$$d \leq \|x - u\| \leq \|x - y_n\| + \|y_n - u\| \leq \sqrt{d^2 + 1/n} + \|y_n - u\|.$$

Y tomando límites se obtiene $d = \|x - u\|$.

Para la unicidad suponer que $u_1 \in C$ y $u_2 \in C$ verifican que $\|x - u_1\| = \|x - u_2\| = d(x, C)$. Usando de nuevo (1.3)

$$\|u_1 - u_2\|^2 + 4\|x - (\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2})\|^2 = 2\|u_1 - x\|^2 + 2\|u_2 - x\|^2 = 4d^2.$$

Como $\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2} \in C$ se tiene $4\|x - (\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2})\|^2 \geq 4d^2$ y por tanto $\|u_1 - u_2\| = 0$. ■

Definición 1.3.3 *Si $\varnothing \neq C$ es un conjunto convexo y cerrado de un espacio de Hilbert denotamos $P_C(x)$ el único elemento en C tal que*

$$\|x - P_C x\| = d(x, C).$$

Veamos una propiedad que refleja la idea intuitiva de que el ángulo que forma $x - P_C x$ con $v - P_C x$ para todo $v \in C$ es mayor que $\pi/2$.

Proposición 1.3.4 *Sea X espacio de Hilbert real, $\varnothing \neq C \subset X$ convexo y cerrado. Entonces*
(i) $\langle x - P_C x, v - P_C x\rangle \leq 0, \quad v \in C, x \in X.$
(ii) $\|P_C x - P_C y\| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in X.$

DEMOSTRACIÓN: (i) Si $x \in C$ entonces $P_C x = x$ y $\langle v - P_C x, x - P_C x\rangle = 0$. Supongamos que $x \notin C$, $v \in C$ y $0 \leq t \leq 1$. Si $d(x, C) = \|x - P_C x\| = d$ se tiene

$$\begin{aligned} 0 < d^2 &\leq \|x - (tv + (1-t)P_C x)\|^2 \\ &= \|x - P_C x - t(v - P_C x)\|^2 \\ &\leq \|x - P_C x\|^2 + t^2\|v - P_C x\|^2 - 2t\langle x - P_C x, v - P_C x\rangle \\ &= d^2 + t^2\|v - P_C x\|^2 - 2t\langle x - P_C x, v - P_C x\rangle. \end{aligned}$$

Por tanto

$$2\langle x - P_C x, v - P_C x\rangle \leq t\|v - P_C x\|^2, \quad 0 < t < 1.$$

Pasando al $\lim_{t\to 0}$ se obtiene (i).

(ii) Usando (i) se puede poner

$$\langle x - P_C x, P_C y - P_C x\rangle \leq 0, \quad \langle P_C y - y, P_C y - P_C x\rangle \leq 0.$$

Sumando ambas desigualdades se concluye que

$$\langle x - y - (P_C x - P_C y), P_C y - P_C x\rangle \leq 0,$$

y denotando $u = x - y - (P_C x - P_C y)$ y $v = P_C y - P_C x$ tenemos $\langle u, v\rangle \leq 0$. De la ley del paralelogramo se concluye

$$\|x - y\|^2 = \|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle \geq \|v\|^2 = \|P_C y - P_C x\|^2.$$

■

Teorema 1.3.5 *Sea X un espacio de Hilbert y Y un subespacio cerrado de X. Entonces $P_Y x = u$ si y sólo si $u \in Y$ y $x - u \in Y^\perp$. En particular $X = Y \bigoplus Y^\perp$.*

DEMOSTRACIÓN: $\Longrightarrow$)Desde luego $u = P_Y x \in Y$. Además si $z \in Y$ se tiene

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x-u\|^2 &\leq \|x-(u+z)\|^2 \\ &\leq \|x-u\|^2 + \|z\|^2 - 2\Re(\langle x-u, z\rangle) \\ &= d^2 + \|z\|^2 - 2\Re(\langle x-u, z\rangle). \end{aligned}$$

Por tanto $2\Re(\langle x-u, z\rangle) \leq \|z\|^2$ para todo $z \in Y$. Si $y \in Y$ y $z = ty$ para $t \geq 0$ se tendría que $2\Re(\langle x-u, y\rangle) \leq t\|y\|^2$ para todo $y \in Y$. Tomando $\lim_{t\to 0^+}$ se concluye

$$\Re(\langle x-u, y\rangle) \leq 0, \quad y \in Y$$

y cambiando y por $-y$ se obtiene

$$\Re(\langle x-u, y\rangle) = 0, \quad y \in Y.$$

Sustituyendo ahora y por iy se llega a

$$\Im(\langle x-u, y\rangle) = 0, \quad y \in Y.$$

$\Longleftarrow$)Supongamos $u \in Y$ y $x - u \in Y^\perp$. Como $\langle x-u, u-y\rangle = 0$ para todo $y \in Y$ se tiene

$$\|x-y\|^2 = \|x-u\|^2 + \|y-u\|^2 \geq \|x-u\|^2$$

y por tanto $u = P_Y x$.

Para probar que $X = Y \bigoplus Y^\perp$ observar que $x = P_Y x + (x - P_y x)$ y la descomposición es única. En efecto, si $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$ con $y_1, y_2 \in Y$ y $z_1, z_2 \in Y^\perp$ entonces $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$. ■

Teorema 1.3.6 *Sea Y un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert X. Definimos $P_Y : X \to Y$ dada por $x \to P_Y x$. Entonces*

(i) P_Y es una aplicación lineal y continua con $\|P_Y x\| \leq \|x\|$.

(ii) $P_Y^2 = P_Y$, $Y = ImP_Y$, $Y^\perp = KerP_Y$.

DEMOSTRACIÓN: (i) Sean $x_1, x_2 \in X$, $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$. Veamos que $P_Y(\lambda x_1 + \beta x_2) = \lambda P_Y(x_1) + \beta P_Y(x_2)$. Usando el Teorema 1.3.5 es suficiente ver que

$$\langle \lambda x_1 + \beta x_2 - (\lambda P_Y(x_1) + \beta P_Y(x_2)), y\rangle = 0, \quad y \in Y.$$

Pero ésto es consecuencia de la bilinealidad del producto escalar, pues

$$\langle \lambda x_1 + \beta x_2 - \lambda P_Y(x_1) - \beta P_Y(x_2), y\rangle = \lambda\langle x_1 - P_Y(x_1), y\rangle + \beta\langle x_2 - P_Y(x_2), y\rangle = 0.$$

Usando ahora que $P_Y(0) = 0$ se tiene $\|P_Y(x)\| = \|P_Y(x) - P_Y(0)\| \leq \|y\|$.

(ii) Es claro que $P_Y(P_Y x) = P_Y x$ pues $P_Y x \in Y$. Dado $y \in Y$ se tiene que $y = P_Y y$ luego $Im P_Y = Y$. Finalmente si $x \in Ker P_Y$ significa que $P_Y x = 0$ y por tanto $x - 0 \in Y^\perp$.

Definición 1.3.7 *P_Y se conoce como la proyección ortogonal de X sobre Y.*

Proposición 1.3.8 *Sea Y subespacio de un Hilbert X.*

(i) Y es cerrado $\Longleftrightarrow Y = Y^{\perp\perp}$.

(ii) Y es denso $\Longleftrightarrow Y^\perp = \{0\}$.

DEMOSTRACIÓN: (i) Es evidente que $Y \subset Y^{\perp\perp}$ y si coinciden Y es el ortogonal de un conjunto y por tanto cerrado.

Suponiendo que Y es cerrado, usando el Teorema 1.3.5, dado $x \in Y^{\perp\perp}$ se tiene $x = y + z$ con $y \in Y$ y $z \in Y^\perp$. Ahora bien $z = x - y \in Y^{\perp\perp} \cap Y^\perp$ y por tanto $z = 0$ y $^x = y \in Y$.

(ii) Apliquemos el Teorema 1.3.5 al subespacio $\bar{Y}$. Se tiene que $X = \bar{Y} + Y^\perp$ y por tanto $X = \bar{Y} \Longleftrightarrow Y^\perp = \{0\}$. ■

Ejemplo 1.3.1 *Calcular $I = \inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi} |sen(t) - (a + bt)|^2 dt$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos $X = L^2([-\pi, \pi])$, $Y = \{a + bt : a, b \in \mathbb{R}\}$. Claramente Y es un subespacio vectorial. Veamos que es cerrado. Sea $f_n(t) = a_n + b_n t$ sucesión convergente a f en $L^2([-\pi, \pi])$.

En particular

$$2\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)dt, \quad \frac{2\pi^3}{3} b_n = \int_{-\pi}^{\pi} t f_n(t).$$

Por tanto (a_n) y (b_n) son sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$. Sean $a = \lim a_n$ y $b = \lim b_n$. La función $f(t) = a + bt \in Y$, ya que

$$\begin{aligned}(\int_{-\pi}^{\pi} t|f_n(t) - f(t)|^2 dt)^{1/2} &\leq (\int_{-\pi}^{\pi} |a_n - a|^2 dt)^{1/2} + (\int_{-\pi}^{\pi} |(b_n - b)t|^2 dt)^{1/2} \\ &= |a_n - a|(2\pi)^{1/2} + |b_n - b|(\frac{2\pi^3}{3})^{1/2}.\end{aligned}$$

Utilizando el Teorema de la proyección buscamos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $sen(t) - (a + bt) \in Y^\perp$, es decir

$$\int_{-\pi}^{\pi} (sen(t) - (a + bt))dt = 0,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} (sen(t) - (a + bt))t dt = 0.$$

La primera ecuación da $a = 0$ y la segunda $b = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi t sent dt$. ■

Ejemplo 1.3.2 *Sea $X = \ell^2$ y definimos*

$$Y = \{(x_n) \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\}.$$

Probar que Y es denso en ℓ^2.

DEMOSTRACIÓN: Es inmediato ver que Y es un subespacio. Aplicando Proposición 1.3.8 veremos que $Y^\perp = \{0\}$.

Supongamos que $(y_n) \in Y^\perp$. Consideremos $x = (1, -1, 0, ...) = e_1 - e_2 \in Y$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n = y_1 - y_2 = 0$. Por tanto $y_1 = y_2$. Considerando $e_2 - e_3 \in Y$ se obtiene $y_2 = y_3$. En general, $e_k - e_{k+1} \in Y$ y por tanto $y_k = y_{k+1}$. Ahora el vector $y \in \ell^2$ y por tanto $y_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. ■

1.4 Dualidad

Definición 1.4.1 *Sea X un espacio de Hilbert. Una aplicación lineal continua de X en $\mathbb{K}$ se conoce como forma lineal continua. Denotamos $X' = \{\phi : X \to \mathbb{K},$ lineal continua $\}$ y le llamamos espacio dual de X.*

Nota 1.4.1 *Sea $x_0 \in Y$, la aplicación $\phi_{x_0} : X \to \mathbb{K}$ dada por $\phi_{x_0}(x) = \langle x, x_0 \rangle$ pertenece a X'.*

Teorema 1.4.2 *(Teorema de Riesz-Fréchet) Sea X un espacio de Hilbert. Para toda $\phi \in X'$ existe un único x_0 tal que*

$$\phi(x) = \langle x, x_0 \rangle, \quad x \in X.$$

Es decir, $X' = X$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $Y = \phi^{-1}(\{0\}) = Ker\phi$. Es un subespacio cerrado de X. Si $Y = X$ entonces tomamos $x_0 = 0$. Supongamos que $Y \subsetneq X$. Escribimos $X = Y \bigoplus Y^\perp$. Fijemos $v \in X \setminus Y$, y denotemos $w = v - P_Y v \in Y^\perp$. Es claro que $w \neq 0$ y que $\phi(w) \neq 0$. Definimos $x_0 = \frac{\overline{\phi(w)}}{\|w\|^2} w \in Y^\perp$. Comprobemos que $\phi(x) = \langle x, x_0 \rangle$ para todo $x \in X$.

Comprobemos, ahora, que x_0 es el elemento que buscábamos. En efecto, $\phi(x - \frac{\phi(x)}{\phi(w)}w) = 0$ lo que implica que $x - \frac{\phi(x)}{\phi(w)}w \in Y$. Por tanto

$$\begin{aligned}
\langle x, x_0\rangle &= \langle x - \frac{\phi(x)}{\phi(w)}w, x_0\rangle \\
&+ \langle \frac{\phi(x)}{\phi(w)}w, x_0\rangle \\
&= \frac{\phi(x)}{\phi(w)}\langle w, \frac{\overline{\phi(w)}}{\|w\|^2}w\rangle = \phi(x).
\end{aligned}$$

Para demostrar la unicidad, suponer que existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $\langle x, x_1\rangle = \langle x, x_2\rangle = \phi(x)$ para todo $x \in X$. Por tanto $\langle x, x_1 - x_2\rangle = 0$ para todo $x \in X$, y tomando $x = x_1 - x_2$, se concluye $x_1 = x_2$. ∎

Chapter 2

Introducción a los espacios de Banach

2.1 Espacios normados: Propiedades y ejemplos

Definición 2.1.1 *Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una norma sobre X es una aplicación $\| \cdot \| : X \to [0, \infty)$ verificando*

(i) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$ y $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.

(ii)$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ para todo $x \in X$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo x e y en X.

Un espacio vectorial $(X, \| \cdot \|)$ se dice espacio normado si $\| \cdot \|$ es una norma sobre X.

Definición 2.1.2 *En $\mathbb{K}^n$ definimos las siguientes normas:*

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_i|, \tag{2.1}$$

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_2 = (\sum_{k=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}, \tag{2.2}$$

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_\infty = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_i|. \tag{2.3}$$

Nota 2.1.1 *La pruebas de (2.1) y (2.3) son elementales. El hecho de que (2.2) es una norma se vió en el Capitulo anterior.*

Definición 2.1.3 *Sea $1 < p < \infty$ en $\mathbb{K}^n$ definimos*

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_p = (\sum_{k=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}. \tag{2.4}$$

Veamos que $\| \cdot \|_p$ es una norma. Para ello usaremos los siguientes lemas.

Lema 2.1.4 *(Desigualdad de Young) Sea $1 < p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b \geq 0. \tag{2.5}$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $a > 0$, $b > 0$ y $a \geq b$. Poniendo $x = a^p$ e $y = b^q$ hemos de probar que

$$x^{1/p} y^{1-1/p} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}, \quad x \geq y > 0.$$

Equivalentemente,

$$(\frac{x}{y})^{1/p} - 1 \leq \frac{1}{p}(\frac{x}{y} - 1), \quad x \geq y > 0.$$

Ésto, denotando $\lambda = \frac{x}{y}$, se obtiene de la estimación (que es consecuencia teorema del valor medio aplicado a $\phi(t) = t^{1/p}$)

$$\lambda^{1/p} - 1 \leq \frac{1}{p}(\lambda - 1), \quad \lambda \geq 1. \tag{2.6}$$

. ■

Lema 2.1.5 *(Desigualdad de Hölder) Sea $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y sean $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$. Entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p} (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{1/q}. \tag{2.7}$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p} = (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{1/q} = 1$. Entonces de (2.5) se concluye que

$$|x_k||y_k| \leq \frac{|x_k|^p}{p} + \frac{|y_k|^q}{q}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Sumando sobre k y usando la hipótesis se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Denotemos $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$. En el caso de que $\|x\|_p = 0$ ó bien $\|y\|_q = 0$ la desigualdad es trivial. Supongamos entonces que $\|x\|_p\|y\|_q > 0$. Definiendo $x'_k = \frac{x_k}{\|x\|_p}$ e $y'_k = \frac{y_k}{\|y\|_q}$ para $1 \leq k \leq n$ se tiene que $(\sum_{k=1}^n |x'_k|^p)^{1/p} = (\sum_{k=1}^n |y'_k|^q)^{1/q} = 1$ y por tanto

$$\frac{1}{\|x\|_p\|y\|_q} \sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \leq 1.$$

■

Lema 2.1.6 *(Desigualdad de Minkowski) Sea* $1 < p < \infty$ *y sean* $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$. *Entonces*

$$(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p)^{1/p} \leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p)^{1/p}. \tag{2.8}$$

Demostración: Primero estimamos del siguiente modo

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k||x_k+y_k|^{p-1} \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k+y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k+y_k|^{p-1}.$$

Usando (2.7) y el hecho $(p-1)q = p$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p &\leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p}(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q})^{1/q} \\
&+ (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p)^{1/p}(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q})^{1/q} \\
&= (\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p)^{1/q}\Big((\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p)^{1/p}\Big).
\end{aligned}$$

La desigualdad es trivial si $\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p = 0$ así que podemos suponer $\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p > 0$. Ésto nos permite despejar y se obtiene

$$(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p)^{1-1/q} \leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p)^{1/p}.$$

■

Teorema 2.1.7 $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ *es un espacio normado para* $1 < p < \infty$.

Demostración: Las propiedades (i) y (ii) son inmediatas. La desigualdad triangular corresponde a (2.8) ■

Definición 2.1.8 *Sea* $1 \leq p < \infty$ *definimos*

$$\ell^p = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

y denotamos

$$\|(x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}.$$

En el caso $p = \infty$ *definimos*

$$\ell^\infty = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{K}, \|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\},$$

$$c = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{K}, \text{ existe } \lim_{n\to\infty} x_n\}$$

y

$$c_0 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{K}, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}.$$

La misma demostración que en el caso finito dimensional permite probar el siguiente resultado:

Teorema 2.1.9 $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ *es un espacio normado para* $1 < p < \infty$.

Teorema 2.1.10 *Sea* $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$. *Entonces*

$$\ell^1 \subset \ell^{p_1} \subset \ell^{p_2} \subset c_o \subset c \subset \ell^\infty.$$

Además, si $(x_n) \in \ell^1$ *entonces*

$$\|(x_n)\|_\infty \leq \|(x_n)\|_{p_2} \leq \|(x_n)\|_{p_1} \leq \|(x_n)\|_1.$$

Demostración: Supongamos que $(x_n) \in \ell^{p_1}$ con $\|(x_n)\|_{p_1} = 1$. Entonces $|x_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $|x_n|^{p_2} \leq |x_n|^{p_1}$. Esto garantiza que $\|(x_n)\|_{p_2} \leq 1$.

El caso general (siempre que no sea la sucesión nula) se concluye considerando $x'_n = \frac{x_n}{\|(x_n)\|_{p_1}}$ y aplicando lo anterior.

Queda como ejercicio el resto de contenidos y desigualdades de normas. ■

2.2 Completitud y separabilidad

Definición 2.2.1 *Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice espacio de Banach si es completo para la norma, i.e toda sucesión de Cauchy es convergente en X.*

Nota 2.2.1 *Los espacios de Hilbert son obviamente espacios de Banach.*

Si Y es un subespacio de un espacio de Banach X entonces $(Y; \|\cdot\|)$ es Banach si, y sólo si, Y es cerrado en X.

Teorema 2.2.2 *(i) $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p < \infty$.*

(ii) $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, $(c, \|\cdot\|_\infty)$ y $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ son espacios de Banach.

DEMOSTRACIÓN: (i) se prueba con la demostración similar a la vista para ℓ^2 y se deja al lector.

(ii) Sea $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^∞. Entonces $(x_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Existe $\lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k$. Definimos $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Usando que $\sup_n \|x^n\|_\infty < \infty$ se tiene que $x \in \ell^\infty$. Por otro lado como $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k^n - x_k^m| < \varepsilon/2, \quad n, m \geq n_0.$$

Pasando al limite cuando $m \to \infty$ se tiene

$$|x_k^n - x_k| \leq \varepsilon/2, \quad k \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Lo que demuestra que $\|x^n - x\|_\infty < \varepsilon, \quad n \geq n_0$.

Es claro que c y c_0 son subespacios vectoriales de ℓ^∞. Demostremos que c es cerrado en ℓ^∞.

Sea (x^n) una sucesión de elementos de c convergente en ℓ^∞. Sea $x = \lim_n x^n$. Por tanto existe n_0 tal que

$$\|x^n - x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k^n - x_k| < \varepsilon/3, \quad n \geq n_0.$$

Hay que probar que $x \in c$. Por tanto veamos que existe $\lim_{k\to\infty} x_k$. Es suficiente ver que (x_k) es de Cauchy. Por hipótesis $(x_k^n)_k$ es de Cauchy para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto existe k_0 tal que

$$|x_k^{n_0} - x_{k'}^{n_0}| < \varepsilon. \quad k, k' \geq k_0.$$

Ahora estimamos, para $k, k' \geq k_0$,

$$\begin{aligned} |x_k - x_{k'}| &\leq |x_k - x_k^{n_0}| + |x_k^{n_0} - x_{k'}^{n_0}| + |x_{k'}^{n_0} - x_{k'}| \\ &\leq 2\|x^{n_0} - x\|_\infty + |x_k^{n_0} - x_{k'}^{n_0}| < \varepsilon. \end{aligned}$$

La misma demostración sirve para c_0. ■

Definición 2.2.3 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y una sucesión (x_n) de elementos de X. Diremos que la serie $\sum_n x_n$ es convergente si la sucesión de sumas parciales, $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ es convergente en X, i.e. existe* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n x_k$. *A dicho valor se le llama suma de la serie $x = \sum_{n=1}^\infty x_n$.*

Una serie (formal) de elementos de un espacio normado se dice absolutamente convergente si $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$.

Nota 2.2.2 *Sea $X = \ell^p$ para $1 < p < \infty$. Consideremos $x_n = (0, ..., \frac{1}{n}, 0, ...)$.*

La serie $\sum_n x_n$ es convergente a $s = (1, 1/2, ..., 1/n, ...)$, pues

$$\|s - \sum_{k=1}^n x_k\|_p^p = \sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k^p}.$$

Pero no absolutamente convergente, pues $\|x_n\|_p = \frac{1}{n}$.

Veamos una caracterización de los espacios de Banach en términos de series.

Teorema 2.2.4 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. X es de Banach si, y sólo si, toda serie absolutamente convergente de elementos de X es convergente en X.*

Demostración: $\Longrightarrow$) Supongamos que X es Banach y $\sum_n \|x_n\| < \infty$. Veamos que la sucesión de sumas parciales es de Cauchy. Supongamos $n \geq m$

$$\|\sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^m x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^\infty \|x_k\|.$$

Usando que el resto m-ésimo converge a cero se obtiene esta dirección.

$\Longleftarrow$) Sea (y_n) una sucesión de Cauchy en X. Probemos que es convergente. Dado $\varepsilon = 1/2$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| \leq 1/2$ para $n, m \geq n_1$.

Dado $\varepsilon = 1/4$ existe $n_2 > n_1$ tal que $\|x_n - x_m\| \leq (1/2)^2$ para $n, m \geq n_2$.

Reiterando existe $n_k > n_{k-1}$ tal que $\|x_n - x_m\| \leq (1/2)^k$ para $n, m \geq n_k$.

En particular se tiene que $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq (1/2)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \infty.$$

Usando la hipótesis tenemos que $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = y \in X$. Veamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = y + x_{n_1}$.

Por ser (x_n) de Cauchy existe n_0 tal que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon/2$ para $n, m \geq n_0$.

Por otro lado, existe $q_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\| \sum_{k=1}^{q}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) - y\| < \varepsilon/2$ para $q \geq q_0$.

Finalmente existe $k_0 \geq q_0$ tal que $n_k \geq n_0$ para todo $k \geq k_0$. Y por tanto, si $n \geq n_{k_0}$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \|x_n - (y + x_{n_1})\| &\leq \|x_n - x_{n_{k_0}}\| + \|x_{n_{k_0}} - x_{n_1} - y\| \\ &\leq \|x_n - x_{n_{k_0}}\| + \| \sum_{k=1}^{k_0-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) - y\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Definición 2.2.5 *Un espacio normado se dice separable si existe un subconjunto denso y numerable.*

Nota 2.2.3 $\mathbb{R}$ *es separable, pues* $\mathbb{Q}$ *es denso y numerable en* $\mathbb{R}$. $\mathbb{C}$ *tiene a* $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ *como subconjunto denso y numerable. Del mismo modo* $\mathbb{K}^n$ *para* $n \in \mathbb{N}$ *son separables para cualquier norma* $\| \cdot \|_p$ *si* $1 \leq p \leq \infty$.

Veamos unos criterios de separabilidad y no separabilidad de espacios normados.

Proposición 2.2.6 *Sea* X *un espacio normado. Supongamos que existe una sucesión* (x_n) *de elementos de* X *tal que el conjunto de combinaciones lineales finitas de elementos de la sucesión*

$$LIN\{x_k : k \in \mathbb{N}\} = \{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j : \alpha_j \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\}$$

es denso en X. *Entonces* X *es separable.*

Demostración: Consideremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se deja como ejercicio). Definimos

$$D = \{\sum_{j=1}^{n} q_j x_j : q_j \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Claramente D es numerable pues puede identificarse con un subconjunto de $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ donde $A_n = \mathbb{Q}$ es numerable.

Dado $\varepsilon > 0$ y $x \in X$ existe $x' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ tal que $\|x - x'\| < \varepsilon/2$. Ahora encontramos $q_j \in \mathbb{Q}$ tales que $|\alpha_j - q_j| < \frac{\varepsilon}{2n(\|x_j\|+1)}$ y por consiguiente $x'' = \sum_{j=1}^{n} q_j x_j \in D$ y verifica

$$\|x - x''\| \leq \|x - x'\| + \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j - q_j|\|x_j\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

■

Corolario 2.2.7 *c_0 y ℓ^p para $1 \leq p < \infty$ son separables.*

Demostración: Considerar $x_n = e_n = (\overbrace{0, ..., 0}^{n-1}, 1, 0....)$. Denotemos $c_{00} = LIN\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ el espacio de las sucesiones finitamente no nulas.

Si $y \in \ell^p$ (respect. $y \in c_0$) se tiene que $(y_1, ..., y_n, 0, ...) \in c_{00}$ y claramente

$$\|x - \sum_{k=1} y_k e_k\|_p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k|^p \to 0, n \to \infty$$

(respect.

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{k=1} y_k e_k\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n+1} |y_k| = 0.)$$

■

Proposición 2.2.8 *Sea X un espacio normado tal que existe una familia de abiertos no vacios $(O_i)_{i\in I}$ tal que*

(i) $O_i \cap O_j = \varnothing$ si $i \neq j$

(ii) I es no numerable.

Entonces X es no separable.

Demostración: Supongamos que X es separable y probemos que I es numerable. Sea (x_n) una sucesión densa en X. Para cada $i \in I$ el conjunto $O_i \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$. Sea n_i el minimo de los indices tal que $x_{n_i} \in O_i$. Definamos $\phi : I \to \mathbb{N}$ dada por $\phi(i) = n_i$. Si $\phi(i) = \phi(j)$ se tiene que $x_{n_i} = x_{n_j}$ y por tanto $O_i \cap O_j = \varnothing$ implica que $i = j$. Esto prueba que I es numerable. ■

Corolario 2.2.9 *ℓ^∞ es no separable.*

Demostración: Sea $I = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ que es no numerable. Para $A \subset \mathbb{N}$ definimos

$$e_A(i) = \begin{cases} 1 & i \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si denotamos $O_A = \{x \in \ell^\infty : \|x - e_A\|_\infty < 1/2\}$ tenemos una familia de abiertos no vacios tales que $O_A \cap O_B = \varnothing$ siempre que $A \neq B$. En efecto, supongamos que $A \neq B$ y existe $x \in O_A \cap O_B$ entonces se tendría que $\|e_A - e_B\|_\infty < 1$, pero, por otro lado tomando i que sólo pertenezca a uno de los dos conjuntos se tendría $\|e_A - e_B\|_\infty \geq |e_A(i) - e_B(i)| = 1$. ■

Corolario 2.2.10 *c_{00} no es denso en ℓ^∞. De hecho la clausura de c_{00} en ℓ^∞ coincide con c_0.*

2.3 Espacios de Funciones.

Definición 2.3.1 *Sea K un espacio topológico compacto. Denotemos*

$$C(K) = \{f : K \to \mathbb{K} : f \textit{ continua } \}$$

con $\|f\|_\infty = \sup_{t \in K} |f(t)|$ si $f \in C(K)$. Denotamos

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K} : f \textit{ continua}, \lim_{|t| \to \infty} |f(t)| = 0\}$$

con $\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}^n} |f(t)|$.

LLamamos $supp(f)$ a la clausura del conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$ y definimos $C_{00}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K} : f \textit{ continua}, supp(f) \textit{ compacto } \}$.

Teorema 2.3.2 *Entonces $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach separable.*

Demostración: La demostración de ser espacio normado y completo la dejamos al lector. Veamos la separabilidad. Sea

$$\phi(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2-2x & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos $I_{n,k} = [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}], \quad 1 \leq k \leq n$, y

$$J_{n,0} = [0, \frac{2}{n}], J_{n,k} = [\frac{2k-1}{2n} \frac{2k+1}{2n}], \quad 1 \leq k \leq n-1, J_{n,n} = [\frac{2n-1}{2n}, n].$$

Denotemos

$$\phi_{n,0}(x) = 0, \phi_{n,k}(x) = \phi(n(x - \frac{k-1}{n})), \quad x \in I_{n,k}$$

$$\psi_{n,0}(x) = -2(x - \frac{1}{2n}), \psi_{n,k}(x) = \phi(n(x - \frac{2k-1}{2n})), \quad x \in J_{n,k}.$$

Por tanto $\phi_{n,k}$ y $\psi_{n,k}$ son continuas en $[0,1]$ y cumplen

$$\sum_{k=0}^{n} (\phi_{n,k}(x) + \psi_{n,k}(x)) = 1 \quad x \in [0,1].$$

Probaremos que $LIN\{\phi_{k,n}, \psi_{k,n}\}$ es denso en $C([0,1])$.

Dado $\varepsilon > 0$ y $f \in C([0,1])$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para todo $x, y \in [0,1]$ con $|x-y| < \delta$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \delta$. Consideremos $\alpha_{n,0} = 0$, $\alpha_{n,k} = \min\{f(x) : x \in I_{n,k}\} = f(x_{n,k})$ para $1 \leq k \leq n$ y $\beta_{n,k} = \min\{f(x) : x \in J_{n,k}\} = f(x'_{n,k})$ para $0 \leq k \leq n$. Nótese que entonces

$$|f(x) - \alpha_{n,k}| = |f(x) - f(x_{n,k})| < \varepsilon, \quad x \in I_{n,k}$$

y

$$|f(x) - \beta_{n,k}| = |f(x) - f(x'_{n,k})| < \varepsilon \quad x \in J_{n,k}.$$

Sea

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k}\phi_{n,k}(x) + \beta_{n,k}\psi_{n,k}(x).$$

Entonces

$$|f(x) - g(x)| \;\; = \;\; |\sum_{k=0}^{n} (f(x) - \alpha_{n,k})\phi_{n,k}(x) + (f(x) - \beta_{n,k})\psi_{n,k}(x)|$$

$$
\begin{aligned}
&= \ |\sum_{k=0}^{n}(f(x)-\alpha_{n,k})\phi_{n,k}(x)+(f(x)-\beta_{n,k})\psi_{n,k}(x)| \\
&\leq \ \sum_{k=0}^{n}|f(x)-\alpha_{n,k}|\phi_{n,k}(x)+|f(x)-\beta_{n,k}|\psi_{n,k}(x) \\
&\leq \ \varepsilon\Big(\sum_{k=0}^{n}\phi_{n,k}(x)+\psi_{n,k}(x)\Big)=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

■

Nota 2.3.1 *Entonces* $(C(K),\|\cdot\|_\infty)$ *y* $(C_0(\mathbb{R}^n),\|\cdot\|_\infty)$ *son espacios de Banach separables.*

Teorema 2.3.3 $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ *es un subespacio denso de* $C_0(\mathbb{R}^n)$

Demostración: Caso $n=1$: Sea $f\in C_0(\mathbb{R})$ y $\varepsilon>0$.

Existe $R>0$ tal que $|f(x)|<\varepsilon/2$ si $|x|>R$. Definimos

$$
g(x)=\begin{cases} 0 & x<-R-1 \\ f(-R)(x+R+1) & -R-1<x\leq R \\ f(x) & |x|\leq R \\ -f(R)(x-R-1) & R\leq x\leq R+1 \\ 0 & x>R+1 \end{cases}.
$$

Es claro que $g\in C_{00}(\mathbb{R})$. Además

$$
f(x)-g(x)=\begin{cases} f(x) & x<-R-1 \\ f(x)-f(-R)(x+R+1) & -R-1<x\leq R \\ 0 & |x|\leq R \\ f(x)+f(R)(x-R-1) & R\leq x\leq R+1 \\ f(x) & x>R+1 \end{cases}.
$$

■

Por tanto

$$
\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|=\sup_{|x|\geq R}|f(x)-g(x)|\leq \max\{\varepsilon/2,\sup_{R\leq|x|<R+1}|f(x)-g(x)|\}\leq\varepsilon.
$$

Caso $n>1$. Pongamos, para $n\in\mathbb{N}$,

$$
\phi_n(t)=\begin{cases} 1 & 0\leq t\leq n \\ -(t-n-1) & n\leq t\leq n+1 \\ 0 & t>n+1 \end{cases}.
$$

Definimos $\Phi_n(x) = \phi_n(\|x\|)$ para $x \in \mathbb{R}^n$. Si $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $f\Phi_n \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$. Además

$$\|f - f\Phi_n\|_\infty = \sup_{\|x\|>n} |f(x)|(1 - \Phi_n(x)) \leq \sup_{\|x\|>n} |f(x)|.$$

Con ésto se concluye el resultado. ■

Vamos a definir ahora el espacio $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ medible Lebesgue. Considerar

$$\mathfrak{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ medibles } : \int_\Omega |f(x)|^p dm(x) < \infty\}.$$

Diremos que $f \approx g$ si $m(\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}) = 0$, i.e. $f = g$ en casi todo punto, donde m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.3.4 *Sea* $1 \leq p < \infty$. *Definimos* $L^p(\Omega)$ *el espacio cociente* $\mathfrak{L}^p(\Omega)/\approx$, *y su norma*

$$\|f\|_p = (\int_\Omega |f(x)|^p dm(x))^{1/p}.$$

Teorema 2.3.5 $(L^1(\Omega), \|\cdot\|_1)$ *es un espacio de Banach.*

DEMOSTRACIÓN: Es immediato ver que es un espacio vectorial. Veamos ahora que es normado.

En efecto, si $\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)|dx = 0$ entonces $f = 0$ en casi todo punto, es decir $f = 0$. Es claro que $\|\lambda f\|_1 = \int_\Omega |\lambda||f(x)|dx = |\lambda|\|f\|_1$ y que

$$\|f + g\|_1 = \int_\Omega |f(x) + g(x)|dx \leq \int_\Omega (|f(x)| + |g(x)|)dx = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Para ver que es completo, veremos que toda serie absolutamente convergente en $L^1(\Omega)$ es convergente.

Supongamos que $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_1 = \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega |f_n(x)|dx < \infty$.

Usando el teorema de la convergencia monótona de Lebesgue se sabe que

$$\sum_{n=1}^\infty \int_\Omega |f_n(x)|dx = \int_\Omega \sum_{n=1}^\infty |f_n(x)|dx < \infty.$$

De ésto deducimos que $\sum_{n=1}^\infty |f_n(x)|dx < \infty$ en casi todo punto, i.e existe un conjunto medible Lebegue de medida nula N tal que la serie $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ es absolutamente convergente en $\mathbb{C}$ para todo $x \notin N$. Por tanto definiendo

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ si $x \notin N$ y $f(x) = 0$ si $x \in N$ se tiene una función f medible tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ en casi todo punto. Veamos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge a f en $L^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}\|f - \sum_{n=1}^{N} f_n\|_1 &= \int_\Omega |f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n| dx \\ &\leq \int_\Omega |\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)| dx \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_\Omega |f_n(x)| dx \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_1.\end{aligned}$$

La convergencia absoluta de la serie nos lleva a concluir el resultado. ■

Proposición 2.3.6 *(Desigualdad de Hölder)*

(i) Sean $1 < p < \infty$ y $1/p + 1/q = 1$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ entonces $fg \in L^1(\Omega)$.

Además $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

(ii) Sean $1 < p_1, p_2 < \infty$ y $1/p_1 + 1/p_2 = 1/p_3$. Si $f \in L^{p_1}(\Omega)$ y $g \in L^{p_2}(\Omega)$ entonces $fg \in L^{p_3}(\Omega)$.

Además $\|fg\|_{p_3} \leq \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2}$.

Demostración: (i) Usando la desigualdad de Young

$$|f(x)||g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}$$

e integrando se obtiene

$$\int_\Omega |f(x)||g(x)| dx \leq \frac{\|f\|_p^p}{p} + \frac{\|g\|_q^q}{q}.$$

Si $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ entonces $\int_\Omega |f(x)||g(x)| dx \leq 1/p + 1/q = 1$.

Si $\|f\|_p = 0$ ó bien $\|g\|_q = 0$ se tiene que $f = 0$ en casi todo punto ó bien $g = 0$ en casi todo punto, y por tanto $fg = 0$ en casi todo punto y el resultado se cumple trivialmente.

Si $\|f\|_p > 0$ y $\|g\|_q > 0$, tomar $f' = f/\|f\|_p$ y $g' = g/\|g\|_q$ y aplicar lo anterior para obtener $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q$.

(ii) Se sigue de (i) teniendo en cuenta el siguiente hecho:

$$f \in L^p(\Omega) \Longleftrightarrow |f|^p \in L^1(\Omega)$$

y además $\|f\|_p = \||f|^p\|_1^{1/p}$.

Suponemos que $|f|^{p_3} \in L^{p_1/p_3}(\Omega)$, $|g|^{p_3} \in L^{p_2/p_3}(\Omega)$ con $p_3/p_1 + p_2/p_1 = 1$. Por tanto $|f|^{p_3}|g|^{p_3} \in L^1(\Omega)$ con

$$\|fg\|_{p_3} = \||f|^{p_3}|g|^{p_3}\|_1^{1/p_3} \leq \||f|^{p_3}\|_{p_1/p_3}^{1/p_3}\||g|^{p_3}\|_{p_2/p_3}^{1/p_3} = \|f\|_{p_1}\|g\|_{p_2}.$$

■

Corolario 2.3.7 *Si Ω es un conjunto de medida finita, y $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ entonces $L^{p_2}(\Omega) \subset L^{p_1}(\Omega)$.*

Además $\|f\|_{p_1} \leq m(\Omega)^{1/p_1 - 1/p_3}\|f\|_{p_2}$ para toda $f \in L^{p_2}(\Omega)$.

Demostración: Basta con usar (ii) Proposition 2.3.6, pues tenemos que $f \in L^{p_2}(\Omega)$ y $\chi_\Omega \in L^q(\Omega)$ para todo $q \geq 1$. Pongamos $1/p_1 = 1/p_2 + 1/q$. Entonces $f\chi_\Omega \in L^{p_1}(\Omega)$ y se tiene que

$$\|f\chi_\Omega\|_{p_1} \leq \|\chi_\Omega\|_q\|f\|_{p_2} = m(\Omega)^{1/p_1 - 1/p_3}\|f\|_{p_2}.$$

■

Teorema 2.3.8 $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ *es un espacio normado para $1 < p < \infty$.*

Demostración:

Sean $f, g \in L^p(\Omega)$ y $\lambda, \beta \in K$. Consideremos los representantes de las clases de equivalencia $f_1, g_1 \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, es decir $f(x) = f_1(x)$ salvo en un conjunto N de medida nula y $g(x) = g_1(x)$ salvo en un conjunto M de medida nula. Entonces $\lambda f + \beta g$ coincide con $\lambda f_1 + \beta g_1$ salvo en $N \cup M$. Además

$$|\lambda f_1(x) + \beta g_1(x)|^p \leq 2^p(|f_1(x)|^p + |g_1(x)|^p)$$

y por tanto $\lambda f + \beta g \in L^p(\Omega)$. Esto demuestra que $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial.

Veamos ahora que es normado. Supongamos que $\|f\|_p^p = \int_\Omega |f(x)|^p dx = 0$ entonces $f = 0$ en casi todo punto, es decir $f = 0$.

Además $\|\lambda f\|_p = (\int_\Omega |\lambda|^p |f(x)|^p dx)^{1/p} = |\lambda| \|f\|_p$.

Finalmente, si $f, g \in L^p(\Omega)$ y $\|f+g\|_p > 0$, podemos razonar como en el caso de sucesiones, es decir, usando la Desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx \\
&\leq \int_\Omega (|f(x)|+|g(x)|)|f(x)+g(x)|^{p-1} dx \\
&\leq \int_\Omega |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} dx + \int_\Omega |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} dx \\
&\leq (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{1/p} (\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} dx)^{1/q} \\
&+ (\int_\Omega |g(x)|^p dx)^{1/p} (\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} dx)^{1/q} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f+g\|_p^{p/q}.
\end{aligned}$$

Por tanto, despejando, $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. ■

Teorema 2.3.9 *(Teorema de Riesz-Fisher) Sea $1 \leq p < \infty$ y sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Entonces existe una subsucesión f_{n_k} y una función no negativa $g \in L^p(\Omega)$ tales que*
(i) $|f_{n_k}(x)| \leq g(x) \quad x \in \Omega$,
(ii) f_{n_k} converge a f casi por todas partes,
(iii) (f_n) converge a f en $L^p(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN:

Dado $\varepsilon = 1/2^k$ existe $n_k > n_{k-1}$ tal que

$$\|f_m - f_n\|_p < 1/2^k, \quad n, m \geq n_k.$$

Consideremos $g_1 = |f_{n_1}|$ y definimos para $k \in \mathbb{N}$,

$$g_k = g_{k-1} + |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}| = |f_{n_1}| + |f_{n_2} - f_{n_1}| + ... + |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|.$$

Es una sucesión creciente de funciones no negativas en $L^p(\Omega)$. Definimos $g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x)$.

Usando la desigualdad triangular de Minkowski

$$\begin{aligned}
\|g_k\|_p &\leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{i=2}^k \|f_{n_i} - f_{n_{i-1}}\|_p \\
&\leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{i=2}^k 1/2^{i-1} \\
&\leq \|f_{n_1}\|_p + 1 < \infty.
\end{aligned}$$

Usando el Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue se obtiene que $g \in L^p(\Omega)$, pues
$$\int_\Omega g(x)^p dx = \lim_k \int_\Omega g_k(x)^p dx < \infty.$$
Ahora se concluye que $g(x)^p < \infty$ (y por tanto $g(x) < \infty$) en casi todo punto.

Claramente (i) queda probado ya que
$$|f_{n_k}| \leq |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}| + ... + |f_{n_2} - f_{n_1}| + |f_{n_1}| = g_k \leq g.$$

Por otro lado existe un conjunto N de medida nula tal que si $x \notin N$ se tiene
$$g(x) = \lim_k g_k(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{i=2}^{\infty} |f_{n_i}(x) - f_{n_{i-1}}(x)| < \infty.$$
Podemos concluir que la serie $\sum_{i=2}^{\infty}(f_{n_i}(x) - f_{n_{i-1}}(x))$ es convergente en casi todo punto. Definimos
$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{i=2}^{\infty}(f_{n_i}(x) - f_{n_{i-1}}(x))$$
y por tanto se cumple (ii).

Es claro que $|f(x)| \leq g(x)$ en casi todo punto, y por tanto $f \in L^p(\Omega)$. Veamos finalmente que $\|f - f_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que, si $x \notin N$,
$$\lim_{k\to\infty} |f_n(x) - f_{n_k}(x)| = |f_n(x) - f(x)|.$$
Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$ existen $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$\int_\Omega |f_n(x) - f_m(x)|^p dx < \varepsilon^p, \quad n, m \geq n_0.$$
Usando que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq n_0$ para $k \geq k_0$ se concluye que
$$\int_\Omega |f_n(x) - f_{n_k}(x)|^p dx < \varepsilon^p, \quad n \geq n_0, k \geq k_0.$$
Aplicando ahora el lema de Fatou se concluye que
$$\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|^p dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |f_n(x) - f_{n_k}(x)|^p dx \leq \varepsilon^p, \quad n \geq n_0.$$
Por tanto $\|f_n - f\|_p \leq \varepsilon$ para $n \geq n_0$. ■

Proposición 2.3.10 *(Densidad de las funciones escalonadas) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto no vacío y $1 \leq p < \infty$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe una función escalonada $g = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{I_k}$, donde I_k son intervalos con $\bar{I}_k \subset \Omega$, $1 \leq k \leq m$, tal que $\|f - g\|_p < \varepsilon$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que Ω es acotado y $f \geq 0$ es una función superior. Ahora usando que Ω es abierto encontramos una sucesión creciente de compactos (que son uniones de intervalos) tal que $\Omega = \cup_{k\in\mathbb{N}} K_k$. Como f es una función superior existe una sucesión creciente de funciones escalonadas f_k (que podemos suponer no negativas) que converge a f en casi todo punto. Ahora tenemos que $(f_k \chi_{K_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de funciones escalonadas, cumpliendo

$$|f_k \chi_{K_k} - f|^p \to 0, \text{ en casi todo punto },$$

y además

$$|f_k \chi_{K_k} - f|^p \leq 2^p |f|^p.$$

Por el teorema de la convergencia dominada se deduce que existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - f_k \chi_{K_k}\|_p < \varepsilon, k \geq n_0$. Tomando $g = f_{n_0} \chi_{K_{n_0}} = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{I_k}$ se obtiene el resultado (nótese que los intervalos $I_k \subset K_{n_0}$).

Supongamos ahora que Ω no es acotado y que $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Definimos $\Omega_k = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < k\}$ que cumple $\Omega = \cup_{k=1}^\infty \Omega_k$ y, debido al Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se tiene que

$$\|f - f\chi_{\Omega_k}\|_p^p = \int_\Omega |f(x) - f\chi_{\Omega_k}|^p dx \to 0, \quad k \to \infty.$$

Ahora descomponemos primero $f\chi_{\Omega_k} = (\Re f\chi_{\Omega_k})^+ - (\Re f\chi_{\Omega_k})^- + i(\Im f\chi_{\Omega_k})^+ - i(\Im f\chi_{\Omega_k})^-$. Y usando que $L^p(\Omega_k) \subset L^1(\Omega_k)$, podemos incluso descomponer cada una de las funciones no negativas integrables anteriores en diferencia de dos funciones superiores positivas. y aplicamos la aproximación anterior en cada pedazo y recomponemos la aproximación de la función original. ■

Teorema 2.3.11 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue. Entonces $L^p(\Omega)$ es separable para $1 \leq p < \infty$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probarlo para $\Omega = \mathbb{R}^n$. En otro caso si (f_n) es una sucesión densa en $L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces $(f_n)\chi_\Omega$ es una sucesión densa en $L^p(\Omega)$. (En efecto, si $\varepsilon > 0$ y $f \in L^p(\Omega)$, basta considerar la extensión $\bar{f}(x) = 0$ si

$x \notin \Omega$ y $\bar{f}(x) = f(x), x \in \Omega$ de modo que $\|f_n - \bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y por consiguiente $\|(f_n)\chi_\Omega - f\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$ para algún $n \in \mathbb{N}$.)

Ahora consideremos D el conjunto de funciones caracteríticas de intervalos $I = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ con extremos $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Este conjunto D es separable, pues es equipotente con $\mathbb{Q}^{2n}$.

Usando Proposición 2.3.10 si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe una función escalonada $g = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{I_k}$, donde I_k son intervalos, $1 \leq k \leq m$, tal que $\|f - g\|_p < \varepsilon/2$. Ahora podemos cada intervalo I_k substituirlo por otro J_k con extremos racionales de modo que $m_n(I_k \setminus J_k) < \frac{\varepsilon^p}{2^p m(|\alpha_k|^p + 1)}$. Ahora $h = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{J_k} \in LIN(D)$ y se tiene que $\|g - h\|_p < \varepsilon/2$. ■

Finalicemos esta sección con el espacio $L^\infty(\Omega)$.

Definición 2.3.12 *Denotamos $\mathfrak{L}^\infty(\Omega)$ es espacio de la funciones medibles $f : \Omega \to \mathbb{C}$ y acotadas. Ponemos $L^\infty(\Omega) = \mathfrak{L}^\infty(\Omega)/ \approx$. Se conoce con el nombre de espacio de las funciones esencialmente acotadas.*

Definimos $\|f\|_\infty = inf\{C \geq 0 : m(\{x \in \Omega : |f(x)| > C\}) = 0\}$.

Proposición 2.3.13 *Sea $f \in L^\infty(\Omega)$. Entonces $|f| \leq \|f\|_\infty$ en casi todo punto, i.e.*

$$m\{x \in \Omega : |f(x)| > \|f\|_\infty\} = 0\}.$$

Demostración: Sea $C_k > \|f\|_\infty$ tal que $C_k - \|f\|_\infty < 1/k$ y $m(A_k) = 0$ donde $A_k = \{x \in \Omega : |f(x)| > C_k\}$. Es resultado se sigue del hecho $\{x \in \Omega : |f(x)| > \|f\|_\infty\} = \cup_k A_k$. ■

Teorema 2.3.14 $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ *es un espacio de Banach no separable para $\Omega \subset \mathbb{R}$. medible con $m(\Omega) > 0$.*

Demostración: Es inmediato probar que $L^\infty(\Omega)$ es un espacio vectorial.

Veamos que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma: Si $\|f\|_\infty = 0$, la Proposición 2.3.13 implica $f = 0$ en casi todo punto.

Claramente si $\lambda \neq 0$

$$\inf\{|\lambda|C \geq 0 : m(\{x \in \Omega : |f(x)| > C\}) = 0\}$$

$$= \inf\{D \geq 0 : m(\{x \in \Omega : |\lambda f(x)| > D\}) = 0\} = \|\lambda f\|_\infty.$$

Finalmente observemos que

$$\{x \in \Omega : |f(x) + g(x)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\}$$

$$\subset \{x \in \Omega : |f(x)| > \|f\|_\infty\} \cup \{x \in \Omega : |g(x)| > \|g\|_\infty\}$$

y por tanto

$$m(\{x \in \Omega : |f(x) + g(x)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\}) = 0$$

de donde se concluye que $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Demostremos ahora la completitud. Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\Omega)$

Dado $k \in \mathbb{N}$ existe n_k tal que $\|f_{n+l} - f_n\|_\infty < 1/k$ para $n \geq n_k$ y $l \in \mathbb{N}$. Entonces, si

$$A_{n,l}^k = \{x \in \Omega : |f_{n+l}(x) - f_n(x)| > 1/k\}$$

se tiene que $m(A_{n,l}^k) = 0$ para $n \geq n_k$ y $l \in \mathbb{N}$.

Consideremos $A = \cup_{k=1}^\infty \cup_{n=n_k}^\infty \cup_{l=1}^\infty A_{n,l}^k$ que tiene medida nula. Entonces

$$|f_{n+l}(x) - f_n(x)| \leq 1/k \quad k, l \in \mathbb{N}, n \geq n_k, x \notin A \tag{2.9}$$

y por tanto $(f_n(x))$ es de Cauchy. Pongamos $f(x) = \lim f_n(x)$ para $x \notin A$ y $f(x) = 0$ para $x \in A$. Veamos que $f \in L^\infty(\Omega)$ y $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Como f es límite de medibles es medible. Además si $x \notin A$,

$$|f_{n_1+l}(x)| \leq |f_{n_1+l}(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x)| \leq 1 + |f_{n_1}(x)|, \quad l \in \mathbb{N}$$

y tomando límites cuando $l \to \infty$ se tiene que $|f(x)| \leq 1 + |f_{n_1}(x)|$ en casi todo $x \in \Omega$. Usando la desigualdad triangular $\|f\|_\infty \leq 1 + \|f_{n_1}\|_\infty$.

Finalmente usando (2.9) se concluye fijado k y $n \geq n_k$ y tomando límites cuando $l \to \infty$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq 1/k \quad x \notin A,$$

por tanto $\|f - f_n\|_\infty \leq 1/k$ para $n \geq n_k$ y se tiene que (f_n) converge a f en $L^\infty(\Omega)$.

Finalmente veamos la no separabilidad del espacio. Descomponemos $\Omega = \cup_k \Omega_k$ donde Ω_k son disjuntos dos a dos y de medida positiva (basta con cortar el espacio con una red de disjuntos de $\mathbb{R}^n$) Considerar $A \subset \mathbb{N}$ y denotar $\Omega_A = \cup_{k\in A}\Omega_k$. Poniendo

$$O_A = \{f \in L^\infty(\Omega) : \|f - \chi_{\Omega_A}\|_\infty < 1/2\}$$

se obtiene una colección no numerable de conjuntos disjuntos dos a dos, lo que permite, usando la Proposición 2.2.8, probar que $L^\infty(\Omega)$ es no separable.

■

Chapter 3

Operadores lineales y continuos

3.1 Primeras definiciones y ejemplos

En esta sección X e Y son espacios normados y no diferenciamos la notación de la norma en cada uno de los espacios, que será denotada en ambos casos por $\|\cdot\|$, salvo que pueda llevar a confusión.

Comencemos con un resultado que motiva las definiciones siguientes.

Proposición 3.1.1 *Sea $T : X \mapsto Y$ una aplicación lineal. Son equivalentes*

(i) T es continua en $x = 0$.

(ii) T es uniformemente continua en X.

(iii) Existe una constante $C \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN: (i) $\Longrightarrow$(ii) Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|u\| < \delta$ implica que $\|Tu\| < \varepsilon$. Por tanto $\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| < \varepsilon$ siempre que $\|x - y\| < \delta$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Como $T0 = 0$, poniendo $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ con $\|Tx_1 - Tx_2\| < 1$ si $\|x_1 - x_2\| < \delta$. Si $x \neq 0$, $x_1 = \frac{\delta x}{2\|x\|}$ y $x_2 = 0$ entonces $\|Tx_1\| < 1$. Esto implica que $\|Tx\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$. Es resultado se sigue tomando $C = \frac{2}{\delta}$.

(iii) $\Longrightarrow$(i) Es inmediato.

■

Definición 3.1.2 *Una aplicación lineal y continua entre dos espacios normados $T : X \to Y$ se denomina operador entre X e Y. Escribimos $\mathcal{L}(X, Y)$ para el conjunto de los operadores de X en Y y denotamos $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$. Definimos, para $T \in \mathcal{L}(X, Y)$,*

$$\|T\| = \inf\{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\|x\| \text{ para todo } x \in X\}.$$

Proposición 3.1.3 *Si* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *entonces*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $a(T) = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$.

Si $C \geq 0$ es tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$ entonces $a(T) \leq C$. Por tanto $a(T) \leq \inf\{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\|x\|, x \in X\} = \|T\|$.

Es claro que $\|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leq a(T)$ para todo $x \neq 0$. Por tanto $\|Tx\| \leq a(T)\|x\|$ para todo $x \in X$. Luego $\|T\| \leq a(T)$. ■

Nota 3.1.1 *Es inmediato ver que*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} = \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\}.$$

Veamos ahora algunos ejemplos concretos de operadores entre espacios normados.

Ejemplo 3.1.1 *Sean* $(X, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{p_1})$ *e* $(Y, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{p_2})$ *donde* $1 < p_1, p_2 < \infty$*. Toda aplicación lineal* $T : X \to Y$ *tiene asociada una matriz* $A = (a_{ij})$ *de modo que* $T(e_i) = \sum_{j=1}^m a_{ij}e_j$ *donde* e_i *denota la correspondiente base canónica del espacio finito dimensional, ésto es*

$$T(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i)e_j = \sum_{j=1}^m y_j e_j.$$

Entonces $T \in \mathcal{L}(X,Y)$*, si* $1/p_1 + 1/q_1 = 1$*,*

$$\|T\| \leq (\sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^{q_1})^{p_2/q_1})^{1/p_2}.$$

DEMOSTRACIÓN: Como $\|\sum_{j=1}^m y_j e_j\|_{p_2} = (\sum_{j=1}^m |y_j|^{p_2})^{1/p_2}$, estimaremos $|y_j|$. Usando la desigualdad de Hölder, para cada $j \in \{1, ..., m\}$, se tiene

$$|y_j| = |\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i| \leq (\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^{q_1})^{1/q_1}\|x\|_{p_1}.$$

Ahora sumando en j se tiene

$$\|Tx\|_{p_2} = (\sum_{j=1}^m |\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i|^{p_2})^{1/p_2} \leq (\sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^{q_1})^{p_2/q_1})^{1/p_2}\|x\|_{p_1}.$$

■

Ejemplo 3.1.2 *Sea X un espacio de Hilbert y $\phi : X \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal y continua no nula. Por el teorema de Riesz-Frechet existe $x_0 \in X \setminus \{0\}$ tal que $\phi(x) = \langle x, x_0 \rangle$. Entonces $\|\phi\| = \|x_0\|$.*

Demostración: Por la desigualdad de Cauchy se tiene $|\phi(x)| \leq \|x\|\|x_0\|$y ésto implica que $\|\phi\| \leq \|x_0\|$. Eligiendo ahora $x' = \frac{x_0}{\|x_0\|}$ se tiene que $\|x'\| = 1$ y $|\phi(x')| = \|x_0\|$. Por tanto $\|\phi\| = \|x_0\|$. ∎

Ejemplo 3.1.3 *Sea $X = C_0(\mathbb{R}^n)$ e $Y = \mathbb{R}$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y definimos $\phi_{x_0} : C_0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\phi_{x_0}(f) = f(x_0).$$

Entonces $\phi_{x_0} \in \mathcal{L}(C_0(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ con $\|\phi_{x_0}\| = 1$.

Demostración: Es claro que

$$|\phi_{x_0}(f)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| = \|f\|_\infty.$$

Por tanto $\|\phi_{x_0}\| \leq 1$. Para probar $\|\phi_{x_0}\| = 1$ es suficiente encontrar $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f\|_\infty = 1$ y $|f(x_0)| = 1$.

Tomemos

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \|x_0\| + 1 \\ (\|x_0\| + 2) - t & \|x_0\| + 1 \leq t \leq \|x_0\| + 2 \\ 0 & t > \|x_0\| + 2 \end{cases}.$$

Definimos $f(x) = \phi(\|x\|)$ para $x \in \mathbb{R}^n$. Es claro que $f \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$, $\|f\|_\infty = 1$ y $\phi_{x_0}(f) = f(x_0) = 1$. ∎

Ejemplo 3.1.4 *Sean $X = \ell^p$, $1 < p < \infty$, $Y = \ell^1$ y $T : \ell^p \to \ell^1$ dado por*

$$T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\frac{x_n}{n})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Entonces $T \in \mathcal{L}(\ell^p, \ell^1)$ con $\|T\| = (\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^q})^{1/q}$ donde $1/p + 1/q = 1$.

Demostración: En primer lugar hay que ver que está bien definido. En efecto si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, como $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$ (pues $1 < q < \infty$), entonces $(\frac{x_n}{n})_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$.

Claramente es lineal. Para ver que es continua usamos la desigualdad de Hölder,

$$\|T((x_n)_{n\in\mathbb{N}})\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{n} \leq \|(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}\|_q \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p.$$

Sea $C_q = (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q})^{1/q}$. Para probar que $\|T\| = C_q$ es suficiente encontrar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = 1$ y $\|T((x_n)_{n\in\mathbb{N}})\|_1 = C_q$.

Consideremos $x_n = \frac{C_q^{-q/p}}{n^{q-1}}$, para $n \in \mathbb{N}$. Es claro que

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = C_q^{-q/p} (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(q-1)p}})^{1/p} = 1.$$

Por otro lado

$$\|T((x_n)_{n\in\mathbb{N}})\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_q^{-q/p}}{n^q} = C_q^{-q/p} C_q^q = C_q.$$

■

Ejemplo 3.1.5 *Sean $X = Y = \ell^p$ para $1 \leq p < \infty$. Dado $0 \neq (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, definimos $T_\lambda : \ell^p \to \ell^p$ por*

$$T_\lambda((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Entonces $T_\lambda \in \mathfrak{L}(\ell^p, \ell^p)$ con $\|T\| = \|(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty$.

Demostración: Es inmediato que está bien definido y es continuo con $\|T\| \leq \|(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty$. Para probar que $\|T\| = \|(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty$ encontraremos para cada $\varepsilon > 0$ una sucesión $(x_n^\varepsilon)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ tal que $\|(x_n^\varepsilon)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = 1$ verificando que

$$\|T_\lambda((x_n^\varepsilon)_{n\in\mathbb{N}})\|_p + \varepsilon > \|(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty.$$

Para $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_{n_\varepsilon}| > \|(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty - \varepsilon$. Tomar $x_n^\varepsilon = \frac{\lambda_{n_\varepsilon}}{|\lambda_{n_\varepsilon}|}$ para $n = n_\varepsilon$ y $x_n^\varepsilon = 0$ para $n \neq n_\varepsilon$, que cumple que $\|T_\lambda((x_n^\varepsilon)_{n\in\mathbb{N}})\|_p = |\lambda_{n_\varepsilon}|$. ■

Ejemplo 3.1.6 *Sean $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ e $Y = L^1(\Omega)$. Dada $0 \neq f \in L^q(\Omega)$ para $1/p + 1/q = 1$, definimos el operador multiplicación $M_f : L^p(\Omega) \to L^1(\Omega)$ por*

$$M_f(g) = fg.$$

Entonces $M_f \in \mathfrak{L}(L^p(\Omega), L^1(\Omega))$ con $\|M_f\| = \|f\|_q$.

Demostración: Es inmmediato, usando la desigualdad de Hölder, que el operador está bien definido y es continuo con $\|M_f\| \leq \|f\|_q$. Para demostrar que $\|M_f\| = \|f\|_q$ tomar

$$g_1(x) = \begin{cases} \frac{\bar{f}(x)}{|f(x)|^{2-q}} & f(x) \neq 0 \\ 0 & f(x) = 0 \end{cases}$$

Se tiene que

$$\|g_1\|_p = (\int_\Omega |f(x)|^{p(q-1)} dx)^{1/p} = \|f\|_q^{q/p},$$

por tanto si tomamos $g(x) = \|f\|_q^{-q/p} g_1(x)$ que cumple $\|g\|_p = 1$ y $M_f(g) = \|f\|_q^{-q/p}|f|^q$. Por consiguiente $\|M_f(g)\|_1 = \|f\|_q$. ■

Ejemplo 3.1.7 *Sean $X = L^1([0,1])$ e $Y = C([0,1])$. El operador de Volterra $V : L^1([0,1]) \to C([0,1])$ viene dado por*

$$V(f)(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad x \in [0,1].$$

Entonces $V \in \mathcal{L}(L^1([0,1]), C([0,1]))$ con $\|V\| = 1$.

Demostración: Como

$$|V(f)(x) - V(f)(x')| \leq \int_{[x,x']} |f(t)|dt, \quad 0 \leq x \leq x' \leq 1$$

se tiene que $V(f)$ es continua si f es integrable. Luego V está bien definido.

Por otro lado

$$\|V(f)\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1} |\int_{[0,x]} f(t)dt| \leq \sup_{0\leq x\leq 1} \int_{[0,x]} |f(t)|dt = \int_{[0,1]} |f(t)|dt = \|f\|_1.$$

Esto prueba que $\|V\| \leq 1$. Por otro lado cualquier $f \geq 0$ con $\|f\|_1 = 1$ sirve para alcanzar la norma, pues $\sup_{0\leq x\leq 1} |\int_{[0,x]} f(t)dt| = \|f\|_1$ para $f \geq 0$. Lo que demuestra que $\|V\| = 1$. ■

Ejemplo 3.1.8 *Sean $X = Y = C([0,1]$ y $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si denotamos $T_K : C([0,1]) \to C([0,1])$ el operador integral dado por*

$$T_K(f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

entonces $T_K \in \mathcal{L}(C([0,1], C([0,1]))$ con $\|T_K\| \leq \|K\|_\infty$.

Demostración: Veamos primero que está bien definido: Si $f \in C([0,1])$ entonces

$$\begin{aligned} |T_K(f)(x) - T_K(f)(x')| &\leq \int_0^1 |K(x,y) - K(x',y)||f(y)|dy \\ &\leq \|f\|_\infty \sup_{0\leq y\leq 1} |K(x,y) - K(x',y)|. \end{aligned}$$

Suponiendo que $f \neq 0$, como K es uniformemente continua en $[0,1]\times[0,1]$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x'| < \delta$ e $|y - y'| < \delta$ entonces $|K(x,y) - K(x',y')| < \varepsilon/\|f\|_\infty$. Por tanto $|T_K(f)(x) - T_K(f)(x')| < \varepsilon$ siempre que $|x - x'| < \delta$.

Por otro lado, si $\|K\|_\infty = \sup_{0\leq x,y\leq 1} |K(x,y)|$, entonces

$$\sup_{0\leq x\leq 1} |T_K(f)(x)| \leq \sup_{0\leq x\leq 1} \int_0^1 |K(x,y)||f(y)|dy \leq \|K\|_\infty \|f\|_\infty.$$

■

Ejemplo 3.1.9 *Sean Ω_1, Ω_2 subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ con medida finita, $1 < p < \infty$ y $1/p + 1/q = 1$. Sean $X = L^p(\Omega_1)$, $Y = L^p(\Omega_2)$ y $K : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Si denotamos $T_K : L^p(\Omega_1) \to L^p(\Omega_2)$ el operador integral dado por*

$$T_K(f)(y) = \int_{\Omega_1} K(x,y) f(x) dx, \quad y \in \Omega_2$$

entonces $T_K \in \mathcal{L}(L^p(\Omega_1), L^p(\Omega_2))$ y

$$\|T_K\| \leq m(\Omega_1)^{1/q} m(\Omega_2)^{1/p} \sup_{x\in\Omega_1, y\in\Omega_2} |K(x,y)|.$$

Demostración: Probemos primero que T_K está bien definido: Sea $f \in L^p(\Omega_1)$. Pongamos $M = \sup_{x\in\Omega_1, y\in\Omega_2} |K(x,y)|$ y recordemos que $L^p(\Omega_1) \subset L^1(\Omega_1)$ puesto que $m(\Omega_1) < \infty$. La función $x \to K(x,y)f(x)$ es medible y $|K(x,y)f(x)| \leq M|f(x)|$. Por tanto $\int_{\Omega_1} K(x,y)f(x)dx$ está definido para todo $y \in \Omega_2$. Usando la desigualdad de Hölder se tiene que

$$|T_K(f)(y)| \leq (\int_{\Omega_1} |K(x,y)|^q dx)^{1/q} \|f\|_p.$$

Por tanto se consigue

$$\begin{aligned} (\int_{\Omega_2} |T_K(f)(y)|^p dy)^{1/p} &\leq (\int_{\Omega_2} (\int_{\Omega_1} |K(x,y)|^q dx)^{p/q} \|f\|_p^p dy)^{1/p} \\ &\leq M\|f\|_p m(\Omega_1)^{1/q} m(\Omega_2)^{1/p}. \end{aligned}$$

Esto permite concluir el resultado. ■

3.2 El espacio $\mathcal{L}(X,Y)$

Teorema 3.2.1 *Sean X e Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$.*

(i) Entonces $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

(ii) Si el espacio Y es de un espacio de Banach entonces $\mathcal{L}(X,Y)$ es también un espacio de Banach.

Demostración: Sean $T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$ entonces $\lambda T + \beta S$ es lineal y continuo. Por tanto $\mathcal{L}(X,Y)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Veamos que $\|\cdot\|$ es una norma.

(i) Si $\|T\| = 0$, usando que $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ se concluye que $T = 0$.

(ii) Para $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda T\| = \sup\{\|\lambda T(x)\| : \|x\| = 1\} = |\lambda|\|T\|$.

(iii) Si $T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$,

$$\begin{aligned}
\|T+S\| &= \sup\{\|T(x)+S(x)\| : \|x\|=1\} \\
&\leq \sup\{\|T(x)\| + \|S(x)\| : \|x\|=1\} \\
&\leq \sup\{\|T(x)\| : \|x\|=1\} + \sup\{\|S(x)\| : \|x\|=1\} \\
&\leq \|T\| + \|S\|.
\end{aligned}$$

Supongamos que Y es completo. Sea (T_n) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(X,Y)$. Para todo $x \in X$, $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\|$$

y por tanto $(T_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en Y. Usando la completitud, definimos $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ para $x \in X$. De las propiedades de los límites se tiene que T es lineal. Veamos que es continuo. Observar primero que $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy ya que $|\|T_n\| - \|T_m\|| \leq \|T_n - T_m\|$, y por lo tanto acotada. Sea $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|$. Entonces se tiene que

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| \leq M\|x\|.$$

Veamos ahora que $\lim\limits_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $\|x\| \leq 1$ tenemos

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| < \varepsilon, \quad n, m \geq n_0.$$

Fijando $m \geq n_0$ y tomando límite cuando $n \to \infty$ se obtiene

$$\|T(x) - T_m(x)\| \leq \varepsilon, \quad m \geq n_0, \|x\| \leq 1.$$

Por tanto $\|T - T_n\| \leq \varepsilon$ para $n \geq n_0$. ■

Implícitamente en la demostración anterior hemos visto el siguiente resultado, cuya demostración dejamos como ejercicio.

Proposición 3.2.2 *Sean X e Y espacios normados y $(T_n) \in \mathcal{L}(X,Y)$ una sucesión de operadores tal que existe $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ para todo $x \in X$. Si definimos $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ entonces*

(i) $T : X \to Y$ es lineal, y,

(ii) si $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ entonces $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ con $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.

Nota 3.2.1 *En general límite puntual de operadores lineales y continuos no es un operador lineal y continuo. Tomar $X = c_0$ e $Y = \mathbb{K}$ y definamos $T_n(x) = x_n$ para $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Es claro que $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = 0$ para toda $x \in c_0$. Por tanto T_n converge puntualmente a 0, y sin embargo $\lim_{n\to\infty} \|T_n\| = 1 \neq 0$. Esto se debe a que $\|T_n\| = 1$ para $n \in \mathbb{N}$ ya que $|T_n(e_n)| = 1$ para $e_n = (\overbrace{0,\cdots,0}^{n-1}, 1, 0, ..)$.*

Proposición 3.2.3 *Sean X, Y y Z espacios normados. Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ entonces $S \circ T \in \mathcal{L}(X,Z)$. Además $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$.*

Demostración: Es claro que la composición de aplicaciones lineales y continuas es lineal y continua. Para ver la estimación de las normas observar que

$$\|S \circ T(x)\| = \|S(Tx)\| \leq \|S\|\|Tx\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|,$$

de donde se concluye que $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$. ■

Definición 3.2.4 *Dado X espacio normado, denotamos $X' = \mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ y le llamamos espacio dual (ó dual toplológico) de X. Los elementos $\phi \in X'$ se llaman formas lineales (ó funcionales lineales) sobre X.*

Nota 3.2.2 *Usando Teorema 3.2.1 X' es siempre un espacio de Banach con la norma $\|\phi\| = \sup\{|\phi(x)| : \|x\| \leq 1\}$.*

Ejemplo 3.2.1 *Sea $X = \ell^p$ para $1 \leq p < \infty$. Sea $\phi : \ell^p \to \mathbb{K}$ dada por*

$$\phi((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x_1 + x_2.$$

Entonces $\phi \in X'$ con $\|\phi\| = 2^{1/q}$ donde $1/p + 1/q = 1$.

DEMOSTRACIÓN: La linealidad es inmediata. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ entonces

$$|\phi((x_n)_{n\in\mathbb{N}})| = |x_1 + x_2| \leq 2^{1/q}(|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p} \leq 2^{1/q}\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p.$$

Tomando $(x_n^0)_{n\in\mathbb{N}} = (2^{-1/p}, 2^{-1/p}, 0, ...)$ se tiene

$$|\phi(x_n^0)_{n\in\mathbb{N}})| = x_1^0 + x_2^0 = 2^{1/q}.$$

■

Ejemplo 3.2.2 *Sea $X = C([0,1])$ y sea $\phi : C([0,1]) \to \mathbb{K}$ dada por*

$$\phi(f) = 2f(1/2) - f(1/3).$$

Entonces $\phi \in X'$ con $\|\phi\| = 3$.

DEMOSTRACIÓN: En efecto si $f \in C([0,1])$ entonces

$$|\phi(f)| = |2f(1/2) - f(1/3)| \leq 2|f(1/2)| + |f(1/3)| \leq 3\|f\|_\infty.$$

Tomando f una función continua con $\|f\|_\infty = 1$ y tal que $f(1/2) = 1$ y $f(1/3) = -1$, se obtiene que $\phi(f) = 3$. ■

Ejemplo 3.2.3 *Sea $X = C([0,1])$ y $0 \neq g \in C([0,1])$. Sea $\phi : L^1([0,1]) \to \mathbb{K}$ dada por $\phi(f) = \int_{[0,1]} f(t)g(t)dt$ para $f \in L^1([0,1])$. Entonces $\phi \in X'$ con $\|\phi\| = \|g\|_\infty$.*

DEMOSTRACIÓN: Probemos sólo la continuidad.

$$|\phi(f)| = |\int_{[0,1]} f(t)g(t)dt| \leq \int_{[0,1]} |f(t)||g(t)|dt \leq \|g\|_\infty\|f\|_1.$$

Sea $t_0 \in [0,1]$ tal que $\|g\|_\infty = |g(t_0)| > 0$ (supongamos $0 < t_0 < 1$, siendo los casos $t_0 = 0$ y $t_0 = 1$ una modificación del argumento que sigue). Definimos

$$\alpha_n(g) = \int_{[t_0-1/2n, t_0+1/2n]} g(t)dt$$

que verifica, por la continuidad de g, que $\lim_{n\to\infty} n\alpha_n(g) = g(t_0)$. Ahora considerar $f_n(t) = n\overline{\frac{\alpha_n(g)}{|\alpha_n(g)|}}\chi_{[t_0-1/2n, t_0+1/2n]}$. Es claro que $f_n \in L^1([0,1])$, $\|f_n\|_1 = 1$ y además

$$\phi(f_n) = \int_{[0,1]} f_n(t)g(t)dt = n\frac{\overline{\alpha_n(g)}}{|\alpha_n(g)|}\int_{[t_0-1/2n, t_0+1/2n]} g(t)dt = n|\alpha_n(g)|.$$

Luego $\lim_{n\to\infty} \phi(f_n) = |g(t_0)| = \|g\|_\infty$. Esto implica $\|\phi\| = \|g\|_\infty$. ■

Definición 3.2.5 *Sean X, Y espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y $T : X \to Y$ un operador en $\mathcal{L}(X, Y)$. Diremos operador conjugado de T y lo denotaremos T^t a la aplicación $T^t : Y' \to X'$ definida por $T^t(\phi) = \phi \circ T$, i.e.*

$$T^t(\phi)(x) = \phi(Tx).$$

Proposición 3.2.6 *Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ entonces $T^t \in \mathcal{L}(Y', X')$ con $\|T^t\| \leq \|T\|$.*

DEMOSTRACIÓN: Usando la Proposición 3.2.3 se tiene que $T^t \in \mathcal{L}(Y', X')$. Además

$$\|T^t(\phi)\| \leq \|T\|\|\phi\|, \quad \phi \in Y'.$$

Por tanto $\|T^t\| \leq \|T\|$. ∎

Nota 3.2.3 *El lector debe saber que en realidad $\|T\| = \|T^t\|$ pero la demostración requiere argumentos que no se incluyen en este curso y por tanto no se presenta en estas notas.*

Definición 3.2.7 *Sean X e Y espacios normado y $T : X \to Y$ una aplicación lineal.*

Se dice que T es un isomorfismo (topológico) de X sobre Y si T es una biyección continua de inversa continua.

Se dice que T es una isometría si $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in X$.

X e Y se dicen isomorfos (o topológicamente isomorfos) si existe $T : X \to Y$ isomorfismo.

X e Y se dicen isométricamente isomorfos si existe $T : X \to Y$ isometría lineal suprayectiva.

Nota 3.2.4 *Si $T : X \to Y$ es lineal e inyectiva entonces $T^{-1} : T(X) \to X$ es automáticamente lineal.*

DEMOSTRACIÓN: Si $y_1, y_2 \in T(X)$ existen (y además únicos) $x_1, x_2 \in X$ tales que $T(x_1) = y_1$ e $T(x_2) = y_2$. Por tanto dados $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} T^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) &= T^{-1}(\alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2)) \\ &= T^{-1}(T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) \\ &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\ &= \alpha_1 T^{-1} y_1 + \alpha_2 T^{-1} y_2. \end{aligned}$$

∎

Nota 3.2.5 *Si $T : X \to Y$ es lineal, inyectiva y continua entonces $T^{-1} : T(X) \to X$ no es automáticamente continua.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $T = id : \ell_1 \to \ell_2$ dada por $T(x) = x$. Es claro que $\|Tx\|_2 \leq \|x\|_1$ luego es lineal continua e inyectiva. Claramente $T(\ell_1) = \ell_1$ y $T^{-1} : (\ell^1, \|\cdot\|_2) \to (\ell^1, \|\cdot\|_1)$ coincide con $T^{-1}(x) = x$. Sin embargo T^{-1} no es continua, pues existe una sucesión $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e_k$ en ℓ^1 tal que

$$\|x_n\|_2 \to 0, \quad \|T^{-1}(x_n)\|_1 = 1, n \in \mathbb{N}.$$

■

Nota 3.2.6 *Si $T : X \to Y$ es un isomorfismo entonces $\|T^{-1}\| \geq \|T\|^{-1}$. Se sigue del hecho $Id|_X = T^{-1}T$ puesto que $1 = \|T^{-1}T\| \leq \|T^{-1}\|\|T\|$.*

Ejemplo 3.2.4 *$T : \ell^p \to \ell^p$, $1 \leq p \leq \infty$, definida por*

$$T((x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$$

es una isometría lineal pero no suprayectiva.

Ejemplo 3.2.5 *Si X es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$. Entonces X' es isométricamente isomorfo a X.*

DEMOSTRACIÓN: Definimos $T : X \to X'$ dado por $Tx = \phi_x$ donde $\phi_x(y) = \langle y, x\rangle$ para $y \in X$. Usando Teorema de Riesz-Frechet si $\phi \in X'$ entonces existe $x_0 \in X$ tal que $\phi(x) = \langle x, x_0\rangle$. Luego T es suprayectiva. La linealidad es inmediata en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Además, como se vió en el Ejemplo 3.1.2),

$$\|Tx\| = \sup\{|\langle y, x\rangle| : \|y\| \leq 1\} = \|x\|.$$

■

Definición 3.2.8 *Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ sobre un espacio vectorial X se dicen normas equivalentes si existen constantes $A, B > 0$ tales que*

$$A\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq B\|x\|_1, \quad x \in X.$$

Proposición 3.2.9 *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados sobre el mismo cuerpo y $T : X \to Y$ una aplicación lineal suprayectiva. Entonces T es un isomorfismo si y sólo si existen constantes $A, B > 0$ tales que*

$$A\|x\|_X \leq \|T(x)\|_Y \leq B\|x\|_X, \quad x \in X.$$

DEMOSTRACIÓN: $\Longrightarrow$)Como $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ se tiene que $\|T(x)\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X$ para todo $x \in X$. Como $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$ entonces

$$\|x\|_X = \|T^{-1}(Tx)\|_X \leq \|T^{-1}\|\|Tx\|_Y, x \in X$$

Tomar $A = \|T^{-1}\|^{-1}$ y $B = \|T\|$.
$\Longleftarrow$)Claramente $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ con $\|T\| \leq B$. T es inyectiva, pues $kerT = \{0\}$ ya que $\|T(x)\|_Y = 0$ implica $x = 0$. Por otro lado

$$\|T^{-1}(y)\|_X \leq A^{-1}\|T(T^{-1}(y)\|_Y = A^{-1}\|y\|_Y, y \in Y$$

de donde se deduce (junto con la nota 3.2.4) que $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$. ∎

Nota 3.2.7 *Dos normas son equivalentes si* $Id : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ *es un isomorfismo.*

Ejemplo 3.2.6 *En el espacio* $\mathbb{K}^n$ *todas las normas* $\|\cdot\|_p$ *para* $1 \leq p \leq \infty$ *son equivalentes*

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de las estimaciones para $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$,

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_{p_2} \leq \|(x_1, ..., x_n)\|_{p_1} \leq n^{1/p_1 - 1/p_2}\|(x_1, ..., x_n)\|_{p_2}.$$

∎

3.3 Espacios de Banach finito dimensionales

Denotaremos para $1 \leq p \leq \infty$ y $n \in \mathbb{N}$ por $\mathbb{K}^n_p$ los espacios $\mathbb{K}^n$ considerados con la norma $\|\cdot\|p$.

Teorema 3.3.1 *(Teorema de Tikhonov) Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensión finita* n. *Entonces* X *es isomorfo a* $\mathbb{K}^n_\infty$.

En particular todas las normas sobre un espacio X *finito dimensional son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $e_1, \cdots, e_n$ una base (de Hamel) del espacio X. En particular $x \in X$ se puede escribir (de manera única) $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ donde $x_i \in \mathbb{K}$. Definimos $T : \mathbb{K}^n_\infty \to X$ dado por

$$T((x_1, \cdots, x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Claramente $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, X)$ con $\|T\| \leq \sum_{i=1}^n \|e_i\|$, puesto que

$$\|T((x_1, \cdots, x_n))\| \leq \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|e_i\||x_i| \leq (\sum_{i=1}^n \|e_i\|) \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

Además T es biyección por ser (e_i) una base. Como la esfera unidad de $\mathbb{K}^n_\infty$ es compacto, podemos poner

$$m = \min\{\|T((x_1, \cdots, x_n))\| : \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = 1\}$$

y por el teorema de Weierstrass $m = \|T((w_1, \cdots, w_n))\|$ para un vector $\|(w_1, \cdots, w_n)\|_\infty = 1$. Por tanto $m > 0$ porque T es biyección y $w \neq 0$. Por consiguiente $\|T(\frac{1}{\|(x_1,\cdots,x_n)\|_\infty}(x_1, \cdots, x_n))\| \geq m$ para todo $x \neq 0$. Lo que permite concluir que

$$m\|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty \leq \|T((x_1, \cdots, x_n))\|, (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Probando la desigualdad que nos faltaba. ■

Corolario 3.3.2 *(i) Todo espacio normado finito dimensional X es un espacio de Banach.*

(ii) Si Y es subespacio finito dimensional de un espacio normado X entonces Y es cerrado.

(iii) Si X es un espacio normado finito dimensional, Y es un espacio normado y $T : X \to Y$ es lineal entonces T es continua.

Demostración: (i) Usando el Teorema 3.3.1 existe $T : X \to \mathbb{K}^n_\infty$ isomorfismo. Pasando por el isomorfismo anterior y usando que $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ es completo se obtiene el resultado.

(ii) se sigue usando que $(Y, \|\cdot\|)$ es normado y el apartado (i).

(iii) Sea $e_1, \cdots, e_n$ una base (de Hamel) del espacio X. En particular $x \in X$ se puede escribir (de manera única) $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ donde $x_i \in \mathbb{K}$. Luego

$$\|T(x)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\|T(e_i)\| \leq (\sum_{i=1}^n \|Te_i\|) \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

Como $\max_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq B\|x\|$ se obtiene $\|T(x)\| \leq B(\sum_{i=1}^n \|Te_i\|)\|x\|$. ■

Teorema 3.3.3 *(Riesz) Un espacio normado X es finito dimensional si, y sólo si, la bola unidad cerrada es compacta.*

Demostración: Supongamos que X es de dimensión finita, y sea $T : \mathbb{K}^n_\infty \to X$ un isomorfismo entre ellos. Usando que

$$\|T^{-1}\|^{-1}\|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty \leq \|x\| \leq \|T\|\|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty$$

para $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ se obtiene que

$$\{x \in X : \|x\| \leq 1\} \subset T(\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty \leq \|T^{-1}\|\}).$$

Ahora usando que la bolas cerradas de $\mathbb{K}^n_\infty$ son compactos y T es continua se tiene que $T(\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty \leq \|T^{-1}\|\})$ es compacto. Finalmente todo cerrado en un compacto es también compacto, lo que prueba que la bola unidad cerrada es compacto.

Supongamos ahora que la bola unidad $\bar{B}_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ es compacta. Consideremos un recubrimiento de la misma dado por $B(y, 1/2) = \{x \in X : \|x - y\| < 1/2\}$ con $y \in B_x$. Existe entonces una colección finita $y_1, .., y_n \in B_X$ tal que $\bar{B}_X \subset \cup_{i=1}^n B(y_i, 1/2)$. Sea Y el subespacio vectorial generado por $y_1, .., y_n$, que sabemos que es necesariamente cerrado en X. Veamos que $Y = X$ y por tanto X es de dimensión finita.

Supongamos que existe $x \in X \setminus Y$. Como Y es cerrado se tiene que $d = d(x, Y) > 0$. Podemos entonces encontrar $y \in Y$ tal que $d \leq \|x - y\| \leq \frac{3}{2}d$. Como $z = \frac{x-y}{\|x-y\|} \in \bar{B}_X$ existirá $y_k \in Y$ tal que $z \in B(y_k, 1/2)$. Ahora bien,

$$x = y + \|x - y\|z = y + \|x - y\|y_k + \|x - y\|(z - y_k).$$

Como $y + \|x - y\|y_k \in Y$ tenemos que

$$d \leq \|x - (y + \|x - y\|y_k)\| = \|x - y\|\|z - y_k\| < \frac{1}{2}\|x - y\| < \frac{3}{4}d,$$

lo que lleva a una contradicción. ■

Definición 3.3.4 *Sea X un espacio normado y $A \subset X$. Diremos que A es relativamente compacto si $\bar{A}$ es compacto.*

Corolario 3.3.5 *Sea X un espacio normado. X es de dimensión finita si, y sólo si, todo acotado es relativamente compacto.*

Teorema 3.3.6 *Sea $1 \leq p \leq \infty$ y $n \in \mathbb{N}$. El espacio dual de $\mathbb{K}^n_p$ es isométricamente isomorfo a $\mathbb{K}^n_q$ donde $1 \leq q \leq \infty$ con $1/p + 1/q = 1$*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $1 < p < \infty$. Sea $T : (\mathbb{K}_p^n)' \to \mathbb{K}_q^n$ la aplicación definida por

$$T(\phi) = (\phi(e_1), \cdots \phi(e_n)).$$

Es inmediato probar que T es lineal. Veamos que es una isometría. Supongamos $\phi \neq 0$ y tomemos $\lambda_i = \frac{\overline{\phi(e_i)}}{|\phi(e_i)|}$, si $\phi(e_i) \neq 0$ y $\lambda_i = 0$ si $\phi(e_i) = 0$.

$$\begin{aligned}
\|(\phi(e_1), \cdots \phi(e_n))\|_q &= (\sum_{i=1}^n |\phi(e_i)|^q)^{1/q} \\
&= (\sum_{i=1}^n |\phi(e_i)|^{q-1}\lambda_i\phi(e_i))^{1/q} \\
&= (\sum_{i=1}^n |\phi(e_i)|^{q-1}\lambda_i e_i))^{1/q} \\
&\leq \|\phi\|^{1/q}\|\sum_{i=1}^n |\phi(e_i)|^{q-1}\lambda_i e_i\|^{1/q} \\
&= \|\phi\|^{1/q}(\sum_{i=1}^n |\phi(e_i)|^q)^{1/pq}.
\end{aligned}$$

Por tanto $(\sum_{i=1}^n |\phi(e_i)|^q)^{1/q} \leq \|\phi\|$.

Por otro lado, es claro que

$$|\phi(\sum_{i=1}^n \beta_i e_i)| \leq \sum_{i=1}^n |\beta_i||\phi(e_i)| \leq (\sum_{i=1}^n |\beta_i|^p)^{1/p}(\sum_{i=1}^n |\phi(e_i)|^q)^{1/q},$$

luego $\|\phi\| \leq (\sum_{i=1}^n |\phi(e_i)|^q)^{1/q}$.

Veamos finalmente que es suprayectiva. Dada $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}_q^n$ definamos

$$\phi((\beta_1, \cdots, \beta_n)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i.$$

Es lineal y cumple que $T(\phi) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$.

Los casos $p = 1$ y $p = \infty$ se hacen de manera análoga y se dejan como ejercicios. ■

3.4 Dualidad

Hemos visto en Ejemplo 3.2.5 que, en el caso de espacios de Hilbert reales, X' es isométricamente isomorfo a X. Para espacios de Hilbert cualesquiera puede decirse lo siguiente:

Teorema 3.4.1 *Si X es un espacio de Hilbert con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y consideramos la aplicación de Riesz $J_X : X \to X'$ dada por $J_X(x) = \phi_x$ definido por*

$$\phi_x(y) = \langle y, x \rangle.$$

Entonces J_X es una aplicación biyectiva que cumple $\|J_X(x)\| = \|x\|$ y verifica $J_X(\alpha_1 x_1 + i\alpha_2 x_2) = \bar{\alpha}_1 J_X(x_1) + \bar{\alpha}_2 J_X(x_2)$ para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ y $x_1, x_2 \in X$.

Hemos visto también en Teorema 3.3.6 que $(\mathbb{K}_p^n)'$ es isométricamente isomorfo a $\mathbb{K}_q^n$ para $1 \leq p \leq \infty$ y $1/p + 1/q = 1$.

Veamos cual es la versión infinito dimensional de dicho resultado. La demostración es similar a la presentada en Teorema 3.3.6 y se deja como ejercicio.

Teorema 3.4.2 *Sea $1 < p < \infty$ y $1/p + 1/q = 1$. Entonces $(\ell^p)'$ es isométricamente isomorfo a ℓ^q.*

Analicemos los casos $p = 1$ y $q = 1$.

Teorema 3.4.3 *$(\ell^1)'$ es isométricamente isomorfo a ℓ^∞.*

Demostración: Definimos $T : \ell^\infty \to (\ell^1)'$ mediante la aplicación

$$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots) \to \phi_\lambda((\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots)) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n.$$

Es claro que está bien definida, pues $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n$ es convergente para toda $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Además T es lineal y cumple

$$|\phi_\lambda((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}})| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|)(\sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|) = \|(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1.$$

Por otro lado, como $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty < |\lambda_m| + \varepsilon.$$

Se tiene que $\frac{\bar{\lambda}_m}{|\lambda_m|} e_m \in \ell^1$, $\|\frac{\bar{\lambda}_m}{|\lambda_m|} e_m\|_1 = 1$ y

$$\phi_\lambda(\frac{\bar{\lambda}_m}{|\lambda_m|} e_m) = |\lambda_m| \geq \|(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty - \varepsilon.$$

Esto demuestra que $\|\phi_\lambda\| = \|(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty$ y por tanto T es una isometría. Para finalizar hay que ver que T es suprayectiva. Dado $\phi \in (\ell^1)'$, considerar

$\lambda_n = \phi(e_n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Claramente $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| \leq \|\phi\|$. Además $T(\lambda) = \phi_\lambda = \phi$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
\phi((\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots)) &= \lim_{N\to\infty} \phi((\alpha_1, \cdots, \alpha_N, 0, \cdots)) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi(e_i) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \lambda_i \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n = \phi_\lambda((\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots)).
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.4.4 $(c_0)'$ *es isométricamente isomorfo a* ℓ^1.

Demostración: Definimos $T : \ell^1 \to (c_0)'$ mediante la aplicación

$$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots) \to \phi_\lambda((\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots)) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n.$$

Es claro que está bien definida, pues $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n$ es convergente para toda $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. Además T es lineal y cumple

$$|\phi_\lambda((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}})| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|)(\sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|) = \|(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 \|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty.$$

Por otro lado, como $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 < \|(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)\|_1 + \varepsilon = \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n| + \varepsilon.$$

Sea

$$\alpha_i^\varepsilon = \begin{cases} \frac{\bar{\lambda}_i}{|\lambda_i|} & i \in 1, \cdots, N, \lambda_i \neq 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}.$$

Se tiene que $(\alpha_n^\varepsilon)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}$, $\|(\alpha_n^\varepsilon)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = 1$ y

$$\phi_\lambda((\alpha_n^\varepsilon)_{n\in\mathbb{N}}) = \|(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)\|_1 \geq \|(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 - \varepsilon.$$

Esto demuestra que $\|\phi_\lambda\| = \|(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1$ y por tanto T es una isometría. Para finalizar hay que ver que T es suprayectiva. Dado $\phi \in (c_0)'$, considerar $\lambda_n = \phi(e_n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N} |\lambda_i| = \sum_{n=1}^{N} |\phi(e_i)| = \phi(\sum_{n=1}^{N} \alpha_i e_i)$$

para cierta $(\alpha_i)_{1\le i\le N} \in c_{00}$ con $\|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = 1$ (basta tomar $\alpha_i = \frac{\bar{\lambda}_i}{|\lambda_i|}$ si $\lambda_i \neq 0$ y $\alpha_i = 0$ en otro caso). Por tanto $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. Además $T((\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \phi_\lambda = \phi$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
\phi((\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\cdots)) &= \lim_{N\to\infty} \phi((\alpha_1,\cdots,\alpha_N,0,\cdots)) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi(e_i) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \lambda_i \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n = \phi_\lambda((\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\cdots)).
\end{aligned}$$

■

En el caso de espacios de funciones se pueden probar, aunque no incluimos su demostración completa, los siguientes resultados:

Teorema 3.4.5 *Si Ω es un conjunto medible de $\mathbb{R}^n$. Entonces*
(i) $(L^1(\Omega))'$ es isométricamente isomorfo a $L^\infty(\Omega)$.
(ii) $(L^p(\Omega))'$ es isométricamente isomorfo a $L^q(\Omega)$ si $1 < p < \infty$ y $1/q + 1/p = 1$.

Demostración: (Esbozo de demostración) Si $f \in L^q(\Omega)$ entonces $T(g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$ define un funcional lineal sobre $L^p(\Omega)$, cuya continuidad es consecuencia de la desigualdad de Hölder. Para alcanzar la norma se procede seleccionando una función g en un proceso similar al realizado para sucesiones. La dificultad radica en la suprayectividad que requiere el uso de teoremas (como el de Radon-Nikodym u otras alternativas) que no veremos en esta asignatura. ■

3.5 Operadores invertibles

La busqueda de solución de una ecuación $Tx = y$ en el contexto de espacios de Banach lleva a analizar la invertibilidad del operador. Si existe $T^{-1} : Y \to X$ entonces $x = T^{-1}y$ es la solución buscada. Ahora bien nos interesa que las soluciones sean continuas en el dato, es decir a variaciones continuas del dato le correspondan variaciones continuas de la solución. Buscamos entonces también que T^{-1} sea continua.

Definición 3.5.1 *Un operador $T \in \mathfrak{L}(X,Y)$ se dice invertible si existe $S \in \mathfrak{L}(Y,X)$ tal que $S \circ T = I_X$ y $T \circ S = I_Y$ donde $I_X : X \to X$ denota la identidad en el espacio X. Dicho operador se denota $T^{-1} : Y \to X$.*

Nota 3.5.1 *Un operador es invertible si y sólo si es un isomorfismo de X en Y.*

Recordemos que si $T : X \to Y$ es lineal y X es finito dimensional entonces

$$dim(T(X)) + dim(Ker(T)) = dim(X).$$

Por tanto son equivalentes:
(i) T es inyectiva.
(ii) T es suprayectiva.
(iii) T es invertible.

Cuando X no es finito dimensional las condiciones anteriores no son equivalentes en general.

Ejemplo 3.5.1 *Sean $L : \ell^2 \to \ell^2$ dado por $L((x_1, x_2, \cdots)) = (x_2, x_3, \cdots)$ y $R : \ell^2 \to \ell^2$ dado por $L((x_1, x_2, \cdots)) = (0, x_1, x_2, \cdots)$. Entonces L es suprayectiva pero no inyectiva, R es inyectiva pero no suprayectiva. Además $R \circ L = Id_{\ell^2}$ pero $L \circ R \neq RL$.*

Definición 3.5.2 *Definimos el producto de operadores $ST = S \circ T$ para $S, T \in \mathfrak{L}(X)$. Esto permite dotar a $\mathfrak{L}(X)$ de una estructura adicional (álgebra de Banach no conmutativa con identidad), es decir además de la estructura de espacio vectorial con las operaciones $(S,T) \to S + T$ y $(\lambda, T) \to \lambda T$ se tiene la ley interna $(S,T) \to ST$ que cumple*
(i) $T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)T_3, \quad T_1, T_2, T_3 \in \mathfrak{L}(X),$
(ii) $S(\lambda_1T_1 + \lambda_2T_2) = \lambda_1ST_1 + \lambda_2ST_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, S, T_1, T_2 \in \mathfrak{L}(X),$
(iii) $SI_X = I_XS = S, \quad S \in \mathfrak{L}(X),$
(iv) $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|, \quad S, T \in \mathfrak{L}(X).$

Teorema 3.5.3 *(Criterio de invertibilidad) Sea X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ (donde $T^0 = I_X$) es convergente en norma entonces $I_X - T$ es invertible. Además*

$$(I_X - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Demostración: Sea $S_n = \sum_{k=0}^{n} T^k$ y denotemos $S = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$. Entonces, usando (iv) en la definición anterior, la aplicación $\Phi_T : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$ dada por $S \to ST$ es continua. Por tanto podemos escribir

$$ST = (\lim_{n\to\infty} S_n)T = \lim_{n\to\infty} S_n T = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^{k+1} = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} - I_X = S - I_X.$$

Esto permite despejar $S(I-T) = S - ST = I_X$. Análogamente se concluye que $(I-T)S = I_X$. ∎

Corolario 3.5.4 *Sea X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$.*
(i) Si $\|T\| < 1$ entonces $I_X - T$ es invertible y $\|(I_X - T)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|T\|}$.
(ii) Si $\|I - T\| < 1$ entonces T es invertible y $\|T^{-1}\| < \frac{1}{1-\|I-T\|}$.

Demostración: (i) Usando que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n < \infty$ y teniendo en cuenta que $\|T^n\| \le \|T\|^n$ se concluye que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ es absolutamente convergente. Por tanto converge y debido al Teorema 3.5.3 existe $(I_X - T)^{-1}$. Además

$$\|(I_X - T)^{-1}\| = \lim_{N\to\infty} \|\sum_{n=0}^{N} T^n\| \le \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \|T^n\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n \le \frac{1}{1-\|T\|}.$$

(ii) Aplicar (i) a $I_X - T$. ∎

Denotemos $\mathcal{G}(X,Y) = \{T \in \mathcal{L}(X,Y) : T \text{ invertible }\}$.

Teorema 3.5.5 *Sean X, Y son espacios de Banach y $T \in \mathcal{G}(X,Y)$. Si $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ es tal que $\|S - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ entonces $S \in \mathcal{G}(X,Y)$. Además*
(i) $\|S^{-1}\| \le \frac{\|T^{-1}\|}{1-\|T^{-1}\|\|S-T\|}$,
(ii) $\|T^{-1} - S^{-1}\| \le \frac{\|T^{-1}\|^2\|S_T\|}{1-\|T^{-1}\|\|S-T\|}$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $R = T^{-1}S$. Se tiene que

$$\|I_X - R\| = \|T^{-1}(T-S)\| \leq \|T^{-1}\|\|T-S\| < 1.$$

Usando el Corolario 3.5.4 se tiene que $R \in \mathcal{G}(X,X)$ y además

$$\|R^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|I_X - R\|} \leq \frac{1}{1-\|T^{-1}\|\|T-S\|}.$$

Teniendo en cuenta que $S = TR$ se tiene que $S \in \mathcal{G}(X,Y)$ con $S^{-1} = R^{-1}T^{-1}$. Esto permite concluir que

$$\|S^{-1}\| \leq \|T^{-1}\|\|R^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|}{1-\|T^{-1}\|\|T-S\|}.$$

Ésto demuestra (i).

Para probar (ii), observar que

$$T^{-1} - S^{-1} = (T^{-1}S - I_X)S^{-1} = T^{-1}(S-T)S^{-1}.$$

Combinado con (i) permite concluir el resultado. ■

Corolario 3.5.6 *Sean X, Y espacios de Banach. Entonces*
(i) $\mathcal{G}(X,Y)$ es abierto en $\mathcal{L}(X,Y)$.
(ii) $T \to T^{-1}$ es continua de $\mathcal{G}(X,Y)$ en $\mathcal{G}(Y,X)$.

3.6 Aplicaciones a ecuaciones integrales

En este capítulo analizaremos el uso de las técnicas abstractas de Análisis Funcional para la resolución de distintos tipos de ecuaciones integrales, es decir en aquellas que la incógnita aparece dentro de una integral. Comenzaremos aplicando los resultados anteriores a un caso particular.

Ejemplo 3.6.1 *Dada $y \in C([0,1])$ encontrar una solución $x \in C([0,1])$ de la ecuación integral*

$$x(s) - \int_0^1 sen(st)x(t)dt = y(s), s \in [0,1].$$

Demostración: ■

Consideremos el operador integral $Tx(s) = \int_0^1 sen(st)x(t)dt$ definido en $X = C([0,1])$. Por el Ejemplo 3.1.8 se tiene que $T \in \mathcal{L}(X)$ y

$$\|T\| \leq \sup_{0\leq s,t\leq 1} |sen(st)| = sen 1 < 1.$$

Usando el Corolario 3.5.4 se obtiene que $I_X - T$ es invertible, luego para todo $y \in C([0,1])$ existe una única solución continua x tal que $x - Tx = y$. Además podemos calcularla explícitamente, pues

$$x = (I_X - T)^{-1}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n y = \lim_{n\to\infty} y + Ty + T^2y + ... + T^n y.$$

Sea $x_0 = y$, $x_n = y + Tx_{n-1} = y + Ty + T^2y + ... + T^n y$ se tiene que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Incluso puede estimarse el error cometido en la aproximación, pues

$$\|x-x_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|T^k y\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|T\|^k \|y\|_\infty \leq \frac{\|T\|^{n+1}}{1-\|T\|}\|y\|_\infty \leq \frac{(sen1)^{n+1}}{1-sen1}\|y\|_\infty.$$

(Ver Teorema 3.6.2 que para el cálculo exacto de la norma $\|T\|$.) ■

Definición 3.6.1 *Una ecuación integral de Fredholm de segunda especie es una ecuación de la forma*

$$x(s) - \int_a^b K(s,t)x(t)dt = y(s), s \in [a,b]$$

donde $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{K}$ es una función continua (denominado el núcleo de la ecuación) y donde $y \in C([a,b])$.

Teorema 3.6.2 *Sea $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y*

$$T_K x(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)dt, x \in C([a,b]).$$

Entonces $T_K \in \mathcal{L}(C([a,b]))$ y

$$\|T_K\| = \max_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(s,t)|dt.$$

DEMOSTRACIÓN: Pongamos $M = \max_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(s,t)|dt$. Claramente

$$|T_K x(s)| \leq \int_a^b |K(s,t)||x(t)|dt \leq \|x\|_\infty \int_a^b |K(s,t)|dt \leq M\|x\|_\infty.$$

Esto prueba que $\|T_K x\|_\infty \leq M\|x\|_\infty$ y por tanto $\|T_K\| \leq M$. Nótese en primer lugar que $s \to \int_a^b |K(s,t)|dt$ es una función continua (pues es la imagen de $T_{|K|}(1)$ que se probó que estaba bien definido. Por tanto existe $s_0 \in [a,b]$ tal que $M = \int_a^b |K(s_0,t)|dt$. Sea

$$\phi_n(\alpha) = \begin{cases} -1 & \alpha \leq -1/n \\ n\alpha & -1/n < \alpha < 1/n \\ 1 & \alpha \geq 1/n \end{cases}.$$

Entonces $t \to x_n(t) = \phi_n(K(s_0,t))$ es continua para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\|x_n\|_\infty \leq 1$. Además $\lim_{n\to\infty} \phi_n(K(s_0,t)) = sgn(K(s_0,t))$ para todo t.

Por tanto

$$\|T_K)\| \geq \sup_{s\in[a,b]} |\int_a^b K(s,t)x_n(t)dt| \leq |\int_a^b K(s_0,t)x_n(t)dt|$$

Y pasando al límite se tiene $\|T_K\| \geq \int_a^b |K(s_0,t)|dt = M$. ■

Proposición 3.6.3 *Sean $X = Y = C([0,1])$. Dados $k_1, k_2 \in C([0,1]) \times [0,1])$ consideramos*

$$T_i(f)(x) = \int_0^1 k_i(x,y)f(y)dy, i = 1,2$$

para $f \in C([0,1])$. Entonces

$$T_2 \circ T_1(f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy, \quad K(x,y) = \int_0^1 k_2(x,t)k_1(t,y)dt.$$

DEMOSTRACIÓN: Del Ejemplo 3.1.8 se tiene que $T_i \in \mathcal{L}(X,Y)$ para $i = 1,2$. Entonces

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1(f)(x) &= \int_0^1 k_2(x,t)T_1(f)(t)dt \\ &= \int_0^1 k_2(x,t)(\int_0^1 k_1(t,y)f(y)dy)dt \\ &= \int_0^1 (\int_0^1 k_2(x,t)k_1(t,y)dt)f(y)dy. \end{aligned}$$

La continuidad de $(t,y)\to k_2(x,t)k_1(t,y)f(y)$ para todo $x\in[0,1]$ justifica que pueda aplicarse Fubini. Además $(x,y)\to\int_0^1 k_2(x,t)k_1(t,y)dt$ es continua, ya que dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que

$$\sup_{t\in[0,1]}|k_2(x,t)-k_2(x',t)|<\frac{\varepsilon}{2\|k_1\|_\infty},\quad |x-x'|<\delta,$$

$$\sup_{t\in[0,1]}|k_1(t,y)-k_1(t,y')|<\frac{\varepsilon}{2\|k_2\|_\infty},\quad |y-y'|<\delta.$$

Por tanto, si $|x-x'|<\delta$ y $|y-y'|<\delta$,

$$\begin{aligned}
|K(x,y)-K(x',y')| &= |\int_0^1 k_2(x,t)k_1(t,y)dt-\int_0^1 k_2(x',t)k_1(t,y')dt|\\
&\leq \int_0^1 |k_2(x,t)k_1(t,y)-k_2(x',t)k_1(t,y')|dt\\
&\leq \int_0^1 |k_2(x,t)-k_2(x',t)||k_1(t,y)|dt\\
&+ \int_0^1 |k_1(t,y)-k_1(t,y')||k_2(x',t)|dt\\
&\leq \|k_1\|_\infty\int_0^1 |k_2(x,t)-k_2(x',t)dt\\
&+ \|k_2\|_\infty\int_0^1 |k_2(x,t)-k_2(x',t)|dt<\varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Nota 3.6.1 *Usando la Proposition 3.6.3 tenemos que si* $Tx(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)dt$ *entonces* $T^2(x)(s)=\int_a^b K_2(s,t)x(t)dt$*, donde*

$$K_2(s,t)=\int_a^b K(s,u)K(u,t)du.$$

Mediante este proceso se consiguen los llamados núcleos iterados.

Definición 3.6.4 *Si* $T_Kx(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)dt$ *entonces definimos*

$$K_1(s,t)=K(s,t),$$

$$K_{n+1}(s,t)=\int_a^b K(s,u)K_n(u,t)du \quad n\in\mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Estos se llaman núcleos iterados y corresponden a los núcleos del operador T_K^n*, es decir* $T_K^n=T_{K_n}$.

Lema 3.6.5 *Si $K \in C([a,b]\times[a,b])$ con $\|K\|_\infty < \frac{1}{b-a}$ y K_n son los núcleos iterados de (3.1) entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty K_n$ converge en $C([a,b]\times[a,b])$.*

Llamaremos a la función suma $H=\sum_{n=1}^\infty K_n$ el núcleo resolvente de K.

Demostración: Basta probar que la serie $\sum_{n=1}^\infty \|K_n\|_\infty < \infty$ y usar que $C([a,b]\times[a,b])$ es un espacio de Banach. Usando (3.1) se tiene que

$$\begin{aligned}
\|K_{n+1}\|_\infty &= \sup_{a\le t,s\le b} \Big|\int_a^b K(s,u)K_n(u,t)du\Big| \\
&\le \sup_{a\le t,s\le b} \int_a^b |K(s,u)||K_n(u,t)|du \\
&\le \|K_n\|_\infty \sup_{a\le s\le b}\int_a^b |K(s,u)|du \\
&\le \|K_n\|_\infty (b-a)\|K\|_\infty.
\end{aligned}$$

Por inducción se tiene que

$$\|K_n\| \le \|K\|_\infty((b-a)\|K\|_\infty)^{n-1}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Como $(b-a)\|K\|_\infty < 1$ se obtiene el resultado. ■

Teorema 3.6.6 *Sea $K \in C([a,b]\times[a,b])$ con $\|K\|_\infty < \frac{1}{b-a}$. Para cada $y\in C([a,b])$ existe una única solución $x\in C([a,b])$ tal que*

$$x(s) - \int_a^b K(s,t)x(t)dt = y(s), s\in[a,b].$$

Dicha solución viene dada por

$$x(s) = y(s) + \int_a^b H(s,t)x(t)dt, s\in[a,b]$$

donde $H(s,t)=\sum_{n=1}^\infty K_n(s,t), (s,t\in[a,b])$ es el núcleo resolvente.

Demostración: Sabemos que $T\in\mathcal{L}(X)$ para $X=C([a,b])$. Es suficiente probar que $\|T\|<1$ para garantizar que $I_X - T$ es invertible. Esto se sigue de la sencilla estimación $\|T\|\le\|K\|_\infty(b-a)$. Como sabemos que $(I_X-T)^{-1}=\sum_{n=0}^\infty T^n$ se puede escribir la solución mediante la fórmula

$$x(s) = (I_X - T)^{-1}y(s)$$

$$
\begin{aligned}
&= y(s) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b K_n(s,t)y(t)dt \\
&= y(s) + \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} K_n(s,t)y(t)dt \\
&= y(s) + \int_a^b H(s,t)y(t)dt.
\end{aligned}
$$

(El paso de intercambio de serie e integral está garantizado por la convergencia absoluta de la serie involucrada como se prueba en Lema 3.6.5.) ■

Ejemplo 3.6.2 *Calcular la solución de la ecuación*

$$x(s) - \frac{1}{3}\int_0^1 (2 - 3(s+t) + 6st)x(t)dt = y(s), s \in [0,1].$$

Demostración: El núcleo de la ecuación de Fredholm viene dado por

$$K(s,t) = 2 - 3(s+t) + 6st, \quad s,t \in [0,1].$$

Calculemos primero $\|K\|_\infty = \sup_{s,t\in[0,1]} |2 - 3(s+t) + 6st|$.

Como $\frac{\partial K}{\partial s} = -3+6t$ y $\frac{\partial K}{\partial t} = -3+6s$, el único punto crítico es $s = t = 1/2$. En la frontera de $[0,1]\times[0,1]$ tenemos $K(0,t) = 2/3 - t$, $K(1,t) = -1/3 + t$, $K(s,0) = 2/3 - s$ y $K(s,1) = -1/3 + s$ y por tanto

$$
\begin{aligned}
\|K\|_\infty &= \max\{K(1/2,1/2), \max_{0\le t\le 1}|2/3 - t|, \max_{0\le t\le 1}|-1/3+t|\} \\
&= \max\{1/6, 2/3, 1/3\} = 2/3 < 1.
\end{aligned}
$$

Calculemos ahora K_n.

$$
\begin{aligned}
K_2(s,t) &= \frac{1}{9}\int_0^1 (2 - 3s - 3u + 6su)(2 - 3u - 3t + 6ut)du \\
&= \frac{1}{9}\int_0^1 (4 - 6(s+t) + 9st)du \\
&+ \frac{1}{9}\int_0^1 2(-6 + \frac{21}{2}(s+t) - 18st)udu + \\
&+ \frac{1}{9}\int_0^1 3(3 - 6(s+t) + 12st)u^2du \\
&= \frac{1}{9}(1 - \frac{3}{2}(s+t) + 3st) \\
&= \frac{1}{6}K(s,t).
\end{aligned}
$$

Reiterando se obtiene $K_{n+1}(s,t) = \frac{1}{6^n}K(s,t)$. Por tanto el núcleo resolvente queda

$$H(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n} K(s,t)) = \frac{5}{6}K(s,t),$$

y la solución viene dada por

$$x(s) = y(s) + \frac{2}{5}\int_0^1 (2 - 3(s+t) + 6st)y(t)dt.$$

■

Otro tipo de ecuaciones integrales que podemos abordar son las del tipo Volterra.

Ejemplo 3.6.3 *Dada $y \in C([0,1])$ encontrar una solución $x \in C([0,1])$ de la ecuación integral*

$$x(s) - \int_0^s x(t)dt = y(s), s \in [0,1].$$

Demostración: Consideremos el operador integral de Volterra $Vx(s) = \int_0^s x(t)dt$ definido en $X = C[0,1]$. Por el Ejemplo 3.6.3 se tiene que $V \in \mathcal{L}(X)$ ya que

$$\|V(x)\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \|x\|_\infty$$

En este caso se tiene que $\|V\| = 1$. Sin embargo el cálculo de V^n es elemental.

En efeto

$$V^2x(s) = \int_0^s (\int_0^t x(u)du)dt = \int_0^s (\int_u^s dt)x(u)du = \int_0^s (s-u)x(u)du.$$

Repitiendo el proceso

$$V^3x(s) = \int_0^s (\int_0^t (t-u)x(u)du)dt = \int_0^s (\int_u^s (t-u)dt)x(u)du = \int_0^s \frac{(s-u)^2}{2}x(u)du.$$

En general

$$V^{n+1}x(s) = \int_0^s \frac{(s-u)^n}{n!}x(u)du.$$

Veamos que la serie $\sum_{n=0}^\infty V^n$ es convergente en $\mathcal{L}(C([0,1])$. En efecto

$$\|V^{n+1}\| = \sup_{\|x\|_\infty=1} \sup_{s\in[0,1]} |\int_0^s \frac{(s-u)^n}{n!}x(u)du| \leq \frac{1}{n!}.$$

Usando el Teorema 3.5.3 se obtiene que $I_X - V$ es invertible, luego para todo $y \in C([0,1])$ existe una única solución continua x tal que $x - Vx = y$. Además podemos calcularla explícitamente, pues

$$x = (I_X - V)^{-1}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} V^n y.$$

Para $x \in C([0,1])$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} V^n x(s) &= x(s) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^s \frac{(s-u)^n}{n!} x(u)du \\
&= x(s) + \int_0^s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s-u)^n}{n!} x(u)du \\
&= x(s) + \int_0^s e^{(s-u)} x(u)du \\
&= x(s) + e^s \int_0^s e^{-u} x(u)du.
\end{aligned}$$

Por tanto la solución es $x(s) = y(s) + e^s \int_0^s e^{-u} y(u)du$.

■

Definición 3.6.7 *Sea* $\Delta = \{(s,t) \in [a,b] \times [a,b] : t \leq s\}$ *y sea* $K : \Delta \to \mathbb{K}$ *una función continua. Una ecuación integral de Volterra de segunda especie es una ecuación de la forma*

$$x(s) - \int_a^s K(s,t)x(t)dt = y(s), s \in [a,b]$$

donde K *se denomina el núcleo de la ecuación y donde el dato* $y \in C([a,b])$.

Definimos ahora los núcleos iterados

$$K_1(s,t) = K(s,t),$$

$$K_{n+1}(s,t) = \int_t^s K(s,u)K_n(u,t)du, \quad t \leq s, n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Proposición 3.6.8 *Si* $K : \Delta \to \mathbb{K}$ *es una función continua y* $\tilde{T}_K x(s) = \int_a^s K(s,t)x(t)dt$ *entonces* $(\tilde{T}_K)^n = \tilde{T}_{K_n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre n. Para $n = 1$ es obvio. Suponerlo cierto para n. Entonces

$$\begin{aligned}
(\tilde{T}_K)^{n+1}x(s) &= \int_0^s K(s,t)(\tilde{T}_K)^n x(t)dt \\
&= \int_0^s K(s,t)(\int_0^t K_n(t,u)x(u)du)dt \\
&= \int_0^s (\int_u^s K(s,t)K_n(t,u)dt)x(u)du \\
&= \int_0^s K_{n+1}(s,u)x(u)du \\
&= \tilde{T}_{K_{n+1}}x(s).
\end{aligned}$$

■

Lema 3.6.9 *Sea $\Delta = \{(s,t) \in [a,b] \times [a,b] : t \leq s\}$, $K : \Delta \to \mathbb{K}$ es una función continua y K_n son los núcleos iterados dados por (3.2). Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} K_n$ converge en Δ.*

Llamaremos a la función suma

$$H(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(s,t), \quad (s,t) \in \Delta$$

el núcleo resolvente de K.

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|K_n\|_\infty < \infty$ y usar que $C(\Delta)$ es un espacio de Banach. Probemos usando inducción que

$$|K_n(s,t)| \leq M^n \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad (s,t) \in \Delta$$

siendo $M = \|K\|_\infty = \sup_{(s,t)\in\Delta} |K(s,t)|$.

Es claro para $n = 1$. Suponerlo cierto para n. Usando (3.2) se tiene que

$$\begin{aligned}
|K_{n+1}(s,t)| &= |\int_t^s K(s,u)K_n(u,t)du| \\
&\leq \int_t^s |K(s,u)||K_n(u,t)|du \\
&\leq M^n \int_t^s |K(s,u)| \frac{(u-t)^{n-1}}{(n-1)!} du \\
&\leq M^{n+1} \int_t^s \frac{(u-t)^{n-1}}{(n-1)!} du \\
&= M^{n+1} \frac{(s-t)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Por tanto $\|K_n\|_\infty \leq M^n \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|K_n\|_\infty < \infty$. ■

Teorema 3.6.10 *Sea* $\Delta = \{(s,t) \in [a,b] \times [a,b] : t \leq s\}$ *y* $K : \Delta \to \mathbb{K}$. *Para cada* $y \in C([a,b])$ *existe una única solución* $x \in C([a,b])$ *tal que*

$$x(s) - \int_a^s K(s,t)x(t)dt = y(s), s \in [a,b].$$

Dicha solución viene dada por

$$x(s) = y(s) + \int_a^s H(s,t)x(t)dt, s \in [a,b]$$

donde $H(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(s,t), (s,t \in \Delta)$ *es el núcleo resolvente.*

Demostración: Por el lema 3.6.8 se tiene $(\tilde{T}_K)^n x(s) = \int_0^s K_n(s,t)x(t)dt$ y por consiguiente

$$\begin{aligned}
\|(\tilde{T}_K)^n x\|_\infty &\leq \|x\|_\infty \int_a^b |K_n(s,t)|dt \\
&\leq \|x\|_\infty (b-a)\|K_n\|_\infty \\
&\leq M^n \|x\|_\infty \frac{(b-a)^n}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

Consecuentemente $\|(\tilde{T}_K)^n\| \leq M^n \frac{(s-a)^n}{(n-1)!}$. Esto garantiza la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|(\tilde{T}_K)^n\| < \infty$.

Usando el Teorema 3.5.3 se concluye que $I_X - \tilde{T}_K$ es invertible. Como sabemos que $(I_X - \tilde{T}_K)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{T}_K)^n$ se puede escribir la solución mediante la fórmula

$$\begin{aligned}
x(s) &= (I_X - \tilde{T}_K)^{-1} y(s) \\
&= y(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^s K_n(s,t)y(t)dt \\
&= y(s) + \int_a^s \sum_{n=1}^{\infty} K_n(s,t)y(t)dt \\
&= y(s) + \int_a^s H(s,t)y(t)dt.
\end{aligned}$$

(El paso de intercambio de serie e integral está garantizado por la convergencia absoluta de la serie involucrada como se prueba en Lema 3.6.9.) ■

Chapter 4

Ampliación de espacios de Hilbert

4.1 Bases Ortonormales

En el capítulo primero vimos que la existencia de sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que las combinaciones lineales de los vectores x_n es denso en X es una condición suficiente para la separabilidad del espacio. En el caso $X = \ell^2$ puede tomarse la sucesión (e_n), que además tiene la propiedad de ser ortogonal. Nuestro objetivo ahora es probar que realmente en todo espacio de Hilbert separable existen sucesiones (bases ortonormales) de modo que $\overline{LIN\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = X$.

En este capítulo $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ denota siempre un espacio prehilbertiano.

Definición 4.1.1 *Un subconjunto $M \subset X$ se dice ortonormal si $\langle x, y\rangle = 0$ para $x, y \in M, x \neq y$ y $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 1$ para $x \in M$. Diremos que M es una base ortonormal si M es ortonormal y $X = \overline{LIN(M)}$.*

Ejemplo 4.1.1 *En $X = \mathbb{C}^3$ el conjunto $M = \{e_1, e_2, e_3\}$ donde $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ y $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 1)$ forma una base ortonormal de $\mathbb{C}^3$.*

Ejemplo 4.1.2 *En $X = \ell^2(\mathbb{R}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$, la sucesión*

$$e_n = (\overbrace{0, ..., 0}^{n-1}, 1, 0, ...)$$

forma una base ortonormal.

Ejemplo 4.1.3 *En $X = L^2((-\pi,\pi))$ definido por funciones $f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{C}$ medible Lebesgue tales que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$, la sucesión*

$$\phi_n(t) = \frac{e^{int}}{2\pi}$$

es un conjunto ortonormal.

Proposición 4.1.2 *Todo conjunto ortonormal M es un sistema linealmente independiente.*

Demostración: Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ y $x_1, ..., x_n \in M$ tales que $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$. Usando que $\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, x_k \rangle = \alpha_k$ para $k = 1, .., n$ se concluye que el sistema es linealmente independiente ■

Proposición 4.1.3 *Si X es un espacio de Hilbert separable y M es un conjunto ortonormal de X entonces M es, a lo sumo, numerable.*

Demostración: Sea $X = \bar{D}$ donde D es numerable. Para cada $x \in M$ existe un $y(x) \in D$ tal que $\|x - y(x)\| < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Usando el teorema de Pitǵoras si $x, x' \in M$ con $x \neq x'$ se tiene que $\|x - x'\|^2 = 2$. Por tanto la aplicación $x \to y(x)$ es inyectiva de M en D y se obtiene que M es numerable. ■

Teorema 4.1.4 *(Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión linealmente independiente en X entonces existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormal tal que*

$$LIN(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) = LIN(\{y_n : n \in \mathbb{N}\}).$$

Demostración: Nótese que $x_n \neq 0$ por ser un sistema linealmente independiente. Sea $y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Es claro que $LIN(x_1) = LIN(y_1)$ y $\|y_1\| = 1$. Supongamos que tenemos construidos $y_1, ..., y_n$ cumpliendo

(1) $LIN(\{x_1, ..., x_n\}) = LIN(\{y_1, ..., y_n\})$.

(2) $y_i \perp y_j$ para $i \neq j$.

(3) $\|y_i\| = 1$ para $i = 1, ..., n$.

Consideremos

$$x'_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{i=1}^n \langle x_{n+1}, y_i \rangle y_i.$$

Como $x_{n+1} \notin LIN(\{y_1, ..., y_n\})$ se puede asegurar que $x'_{n+1} \neq 0$ y definimos $y_{n+1} = \frac{x'_{n+1}}{\|x'_{n+1}\|}$. Comprobemos que cumple las propiedades anteriores: En primer lugar

$$\begin{aligned} LIN(\{x_1, ..., x_n, x_{n+1}\}) &= LIN(\{y_1, ..., y_n, x_{n+1}\}) \\ &= LIN(\{y_1, ..., y_n, x'_{n+1}\}) \\ &= LIN(\{y_1, ..., y_n, y_{n+1}\}). \end{aligned}$$

Por otro lado para cada $j \in \{1, ..., n\}$,

$$\langle y_{n+1}, y_j \rangle = \frac{1}{\|x'_{n+1}\|}\Big(\langle x_{n+1}, y_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x_{n+1}, y_i \rangle \langle y_i, y_j \rangle\Big) = 0.$$

■

Ejemplo 4.1.4 *Sea $X = L^2((-1,1))$ y consideremos la sucesión $x_n(t) = t^n$ para $n \geq 0$. Dicha sucesión forma un conjunto linealmente independiente. La sucesión correspondiente al proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt se llaman los polinomios de Legendre. Los primeros términos son: $P_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $P_1(t) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}t$, $P_2(t) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}(3t^2 - 1)$ y $P_3(t) = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}(5t^3 - 3t)$.*

Proposición 4.1.5 *Si X es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n. Entonces X es isométricamente isomorfo a $\mathbb{K}_2^n$.*

Demostración: Sean $x_1, ..., x_n$ vectores linealmente independientes (y generadores de X). Por el proceso anterior existen $e_1, ..., e_n$ vectores ortonormales (y por tanto base de X). Considerar $T : X \to \mathbb{K}_2^n$ definido por

$$T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = (\alpha_1, ..., \alpha_n).$$

Observar que por la ortonormalidad de $(e_i)_{i=1}^n$ se tiene que $\alpha_j = \langle x, e_j \rangle$. Por tanto T es lineal y biyectiva. Además

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle x, e_i \rangle} \langle x, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|T(x)\|_2^2.$$

■

Teorema 4.1.6 *Sea X un espacio prehilbertiano de dimensión infinita. X es separable si y sólo si tiene existe una sucesión $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es base ortonormal.*

Demostración: Suponer que X es separable. Sea $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $X = \bar{D}$. El proceso a seguir consta de dos pasos: En primer lugar vamos a encontrar una sucesión linealmente independiente (y_n) tal que $X = \overline{LIN(\{y_n : n \in \mathbb{N}\})}$ y después usar el proceso de ortonormalización para conseguir la base pretendida.

Sea n_1 el primer índice tal que $x_n \neq 0$. Supongamos que tenemos definidos $\{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}\}$ tales que el sistema es linealmente independiente y

$$LIN(\{x_1, x_2, ..., x_{n_k}\}) = LIN(\{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}\}).$$

Como X es de dimensión infinita, el conjunto

$$A_k = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin LIN(\{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}\})$$

es no vacío. Sea $n_{k+1} = minA_k$. Entonces

$$LIN(\{x_1, x_2, ..., x_{n_k}, x_{n_{k+1}}\}) = LIN(\{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, x_{n_{k+1}}\}).$$

Definendo $y_j = x_{n_j}$ tenemos un sistema linealmente independiente. Además $X = \overline{LIN(\{y_n : n \in \mathbb{N}\})}$.

Ahora basta con usar el proceso de ortonormalización de la sucesión (y_n) para conseguir (e_n) base ortonormal.

El recíproco viene del criterio de separabilidad de los espacios de Banach probado con anterioridad. ■

Veamos ahora que la situación que ocurre en ℓ^2 con su base (canónica) ortonormal (e_n), donde se cumple que

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$$

siendo la convergencia de la serie en ℓ^2, puesto que

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \to 0, \quad n \to \infty,$$

es propia de todos los espacios de Hilbert separables, reemplazando la base canónica de ℓ^2 por una base ortonormal cualquiera.

Definición 4.1.7 *Sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en X y sea $x \in X$. La sucesión numérica de coeficientes (en $\mathbb{K}$) dada por $(\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ se dicen los coeficientes de Fourier de x respecto la sucesión $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

La serie (formal) $\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$ se denomina la serie de Fourier de x relativa a la sucesión $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejemplo 4.1.5 *Sea $X = L^2((-\pi, \pi))$, $\phi_n(t) = \frac{1}{2\pi}e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$. Para $f \in L^2((-\pi, \pi))$ denotamos*

$$\hat{f}(n) = \langle f, \phi_n\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\frac{dt}{2\pi}$$

a los coeficientes de Fourier clásicos.

Teorema 4.1.8 *(Desigualdad de Bessel) Sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en un espacio prehilbertiano X. Para cada $x \in X$ se cumple*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Demostración: Es suficiente probar que

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2, x \in X, N \in \mathbb{N}.$$

Consideremos $x_N = x - \sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n$. Observemos que $x_N \perp e_k$ para $k = 1, ..., N$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\langle x_N, e_k\rangle &= \langle x - \sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n, e_k\rangle \\
&= \langle x, e_k\rangle - \sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle\langle e_n, e_k\rangle \\
&= \langle x, e_k\rangle - \langle x, e_k\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, usando el teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \|x_N + \sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n\|^2 \\
&= \|x_N\|^2 + \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2\|e_n\|^2 \\
&\geq \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Teorema 4.1.9 *Sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en un espacio pre-hilbertiano X. Son equivalentes*

(1) (e_n) es una base ortonormal.

(2) Para todo $x \in X$ la serie de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$ converge a x en X.

(3) Para todo $x \in X$ se verifica

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \textit{(Identidad de Parseval).}$$

DEMOSTRACIÓN: (1) $\Longrightarrow$(2) Sea $x \in X$. Hemos de probar que $\|x_N\| \to 0$ cuando $N \to \infty$ siendo $x_N = x - \sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n$. Dado $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, usando que $X = \overline{LIN(\{e_n : n \in \mathbb{N}\})}$, existe $y = \sum_{n=1}^{N_0} \alpha_n e_n$ tal que $\|x - y\| < \varepsilon$. Entonces, para $N \geq N_0$, teniendo en cuenta que $x_N \perp (\sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n - y)$, y usando Pitágoras de nuevo,

$$\|x_N\|^2 + \|\sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n - y\|^2 = \|x - y\|^2$$

En particular $\|x_N\| < \varepsilon$ para $N \geq N_0$.

(2) $\Longrightarrow$(3) Aplicamos la continuidad la aplicación $y \to \langle x, y\rangle$. Puesto que $\sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n$ converge a x podemos concluir que

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\overline{\langle x, e_n\rangle}\langle x, e_n\rangle = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}|\langle x, e_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, e_n\rangle|^2.$$

(3) $\Longrightarrow$(2) Sea $x \in X$. Observar que $x = \sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n + x_N$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Además $\sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n \perp x_N$ y por tanto

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{N}|\langle x, e_n\rangle|^2 + \|x_N\|^2.$$

Así que si suponemos que $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, e_n\rangle|^2$ se tiene que $\|x_N\| \to 0$ cuando $N \to \infty$.

(2) $\Longrightarrow$(1) Inmediato pues $\sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n \in LIN(\{e_n : n \in \mathbb{N}\})$. $\blacksquare$

Teorema 4.1.10 *(Teorema de Riesz-Fisher) Sea* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert* X*. La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ *converge a* x *si y sólo si* $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$*. En tal caso* $\alpha_n = \langle x, e_n\rangle$*.*

Demostración: El resultado se obtiene usando el Criterio de Cauchty pues para $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$ tenemos

$$\|\sum_{k=n}^{m} \alpha_k e_k\|^2 = \sum_{k=n}^{m} |\alpha_k|^2.$$

En el supuesto de la convergencia, la continuidad del producto escalar permite concluir

$$\langle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, e_n\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \langle e_k, e_n\rangle = \alpha_n.$$

■

Teorema 4.1.11 *Todo espacio de Hilbert (sobre* $\mathbb{K}$*) separable de dimensión infinita es isométricamente isomorfo a* $\ell^2(\mathbb{K})$*.*

Demostración: Usando el Teorema 4.1.6 existe una base ortonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ del espacio X. Definimos $T : X \to \ell^2$ dada por

$$T(x) = (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Está bien definida por la desigualdad de Bessel. Es una isometría por la identidad de Parseval y es suprayectiva por el teorema de Riesz-Fisher.

■

Corolario 4.1.12 *Si* Ω *es medible de medida positiva entonces* $L^2(\Omega)$ *es isométricamente isomorfo a* ℓ^2*.*

4.2 Operador adjunto

Teorema 4.2.1 *Sean* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *e* $(Y, (\cdot,\cdot))$ *espacios de Hilbert sobre* $\mathbb{K}$ *y sea* $T \in \mathfrak{L}(X, Y)$*. Existe un único* $T^* \in \mathfrak{L}(Y, X)$ *tal que*

$$(Tx, y) = \langle x, T^*y\rangle, \quad x \in X, y \in Y.$$

Además $\|T^*\| \le \|T\|$*.*

Demostración: Fijado $y \in Y$ definimos $\phi_{T,y} : X \to \mathbb{K}$ dada por

$$\phi_{T,y}(x) = (Tx, y).$$

Es inmediato probar que $\phi_{T,y} \in X'$ con $\|\phi_{T,y}\| \leq \|T\|$. Usando el Teorema de representación de Riesz-Frechet se obtiene un único $x' \in X$ tal que $\phi_{T,y}(x) = \langle x, x' \rangle$.

Definimos $T^* : Y \to X$ mediante la aplicación $T^*(y) = x'$. Se cumple que

$$(Tx, y) = \phi_{T,y}(x) = \langle x, T^* y \rangle, \quad x \in X.$$

Hemos de comprobar que $T^* \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Veamos la linealidad: Sean $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{K}$ y $y_1, y_2 \in Y$. Consideremos $T^*(y_1) = x'_1$ y $T^*(y_2) = x'_2$ y $T^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = x'$. Para comprobar que $x' = \alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2$ es suficente probar que

$$(Tx, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \langle x, \alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 \rangle, \quad x \in X.$$

Sea $x \in X$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle x, \alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 \rangle &= \bar{\alpha}_1 \langle x, x'_1 \rangle + \bar{\alpha}_2 \langle x, x'_2 \rangle \\ &= \bar{\alpha}_1 (Tx, y_1) + \bar{\alpha}_2 (Tx, y_2) \\ &= (Tx, \alpha_1 y_1) + (Tx, \alpha_2 y_2) \\ &= (Tx, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2). \end{aligned}$$

Veamos la continuidad: Usando que $\|x\| = \sup\{|\langle v, x \rangle| : \|v\| \leq 1\}$ tenemos

$$\|T^* y\| = \sup\{|\langle v, T^* y \rangle| : \|v\| \leq 1\} = \sup\{|\langle Tv, y \rangle| : \|v\| \leq 1\} \leq \|T\| \|y\|.$$

Por tanto $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Finalmente veamos la unicidad del operador T^*. Supongamos que existen $T_1, T_2 \in L(Y, X)$ tales que

$$(Tx, y) = \langle x, T_1 y \rangle = \langle x, T_2 y \rangle, \quad x \in X, y \in Y.$$

Como $\langle x, T_1 y - T_2 y \rangle = 0$ para todo $x \in X$, $y \in Y$, tomando $x = T_1 y - T_2 y$ se tiene que $T_1 y = T_2 y$ para todo $y \in X$. ■

Definición 4.2.2 *Dados $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ e $(Y, (\cdot,\cdot))$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{K}$. Para cada $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ se define el operador adjunto de T al único $T^* \in \mathcal{L}(Y,X)$ tal que*

$$(Tx, y) = \langle x, T^*y\rangle, \quad x \in X, y \in Y.$$

Nota 4.2.1 *Recordemos que el Teorema de Riesz-Frechet permite definir una isometría $J_X : X \to X^*$ dada por $J_X(x) = \phi_x$ definido por*

$$J_X(x)(y) = \langle y, x\rangle, y \in X.$$

Entonces si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tenemos

$$T^* = J_X^{-1} T^t J_Y$$

Demostración: Es consecuencia de la unicidad del operador adjunto, pues

$$\begin{aligned}
\langle x, J_X^{-1} T^t J_Y(y)\rangle &= \langle x, J_X^{-1} T^t(\phi_y)\rangle \\
&= J_X(J_X^{-1} T^t(\phi_y))(x) \\
&= T^t(\phi_y)(x) = \phi_y(T(x)) \\
&= \langle y, T(x)\rangle.
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 4.2.1 *Sea $T : \mathbb{K}_2^n \to \mathbb{K}_2^n$ una aplicación lineal con matriz asociada $(a_{i,j})_{i,j=1}^n$. Entonces $T^* : \mathbb{K}_2^n \to \mathbb{K}_2^n$ viene dado por la matriz conjugada de la traspuesta $(a^*_{i,j})_{i,j=1}^n = (\bar{a}_{j,i})_{i,j=1}^n$.*

Demostración: En efecto, recordemos que

$$T(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i) = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n a_{i,j}\alpha_i) e_j.$$

Es decir, $a_{i,j} = \langle T(e_i), e_j\rangle$ y por tanto

$$a^*_{i,j} = \langle T^*(e_i), e_j\rangle = \overline{\langle e_j, T^*(e_i)\rangle} = \overline{\langle T(e_j), e_i\rangle} = \bar{a}_{j,i}.$$

■

Ejemplo 4.2.2 *Sea $S : \ell^2 \to \ell^2$ dado por $S((x_1, x_2, ...)) = (0, x_1, x_2, ...)$. Entonces $S^* : \ell^2 \to \ell^2$ viene dado por $S^*((x_1, x_2, ...)) = (x_2, x_3, ...)$.*

Demostración: Tenemos que $S(e_n) = e_{n+1}$. Por consiguiente

$$\langle e_{n+1}, e_m \rangle = \langle Se_n, e_m \rangle = \langle e_n, S^*(e_m) \rangle.$$

Se deduce entonces que $S^*(e_m) = e_{m-1}$ para $m \geq 2$ y $S^*(e_1) = 0$. En consecuencia

$$S^*((x_1, x_2, ...)) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m S^*(e_m) = \sum_{m=1}^{\infty} x_{m+1} e_m = (x_2, x_3, ...).$$

■

Ejemplo 4.2.3 *Sea $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es medible. Definimos $T_K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ dado por*

$$T_K(f)(x) = \int_\Omega K(x, y) f(y) dy.$$

Entonces $T_K^* : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ dado por $T_K^* = T_{K^*}$ donde $K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}$, es decir

$$T_K^*(g)(y) = \int_\Omega \overline{K(x, y)} g(x) dx.$$

Demostración: La fórmula $\langle T_K(f), g \rangle = \langle f, T_K^*(g) \rangle$ se traduce, en este caso, en

$$\int_\Omega (\int_\Omega K(x, y) f(y) dy) \bar{g}(x) dx = \int_\Omega f(y) \overline{T_K^*(g)(y)} dy.$$

Usando el teorema de Fubini para $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\Omega)$ se tiene que $f(y)\bar{g}(x) \in L^2(\Omega \times \Omega)$, y por tanto $|K(x, y)||f(y)g(x)| \in L^1(\Omega \times \Omega)$ de donde se concluye que

$$\int_\Omega (\int_\Omega K(x, y) f(y) dy) \bar{g}(x) dx = \int_\Omega \overline{(\int_\Omega \overline{K(x, y)} g(x) dx)} f(y) dy.$$

■

Una manera equivalente de calcular normas de operadores entre espacios de Hilbert es la siguiente:

Lema 4.2.3 *Sean X e Y espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Entonces*

$$\|T\| = \sup\{|\langle T(x), y \rangle| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}.$$

Demostración: Basta usar la definición de norma y el hecho de que para $u \in Y$

$$\|u\| = \sup\{|\langle u, y\rangle| : \|y\| \leq 1\}.$$

■

Veamos algunas de las propiedades de los operadores adjuntos:

Teorema 4.2.4 *Sean* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle), (Y, (\cdot,\cdot))$ *y* $(Z, [\cdot,\cdot])$ *espacios de Hilbert sobre* $\mathbb{K}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *y sean* $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$ *y* $R \in \mathcal{L}(Y, Z)$. *Entonces*
(i) $T^{**} = T$.
(ii) $\|T\| = \|T^*\|$.
(iii) $\|T\|^2 = \|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T^*\|^2$.
(iv) $(\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha}T^* + \bar{\beta}S^*$.
(v) $(RT)^* = T^*R^*$.
(vi) T *es invertible si, y sólo si,* T^* *es invertible y* $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Demostración: (i) Como $T^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ entonces $T^{**} \in \mathcal{L}(X, Y)$. Fijamos $x \in X$. Para cada $y \in Y$ se tiene que

$$(T^{**}x, y) = \overline{(y, (T^*)^*x)} = \overline{\langle T^*y, x\rangle} = \langle x, T^*y\rangle = (Tx, y).$$

Por tanto $T^{**}(x) = T(x)$ para todo $x \in X$.

(ii) Usando $\|T^*\| \leq \|T\|$, junto con (i) se tiene $\|T\| = \|(T^*)^*\| \leq \|T^*\|$.

(iii) Si $x \in X$ podemos escribir

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = \langle x, T^*Tx\rangle \leq \|x\|\|T^*Tx\| \leq \|T^*T\|\|x\|^2.$$

Tomando supremos en la bola unidad se tiene que $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. La otra desigualdad se tiene de la estimación de normas de la composición y el apartado (ii), pues $\|T^*T\| \leq \|T\|\|T^*\| = \|T\|^2$.

Cambiando T por T^* y usando (i) se tienen las otras igualdades.

(iv) Hay que comprobar, debido a la unicidad del adjunto, que para todo $x \in X, y \in Y$ se cumple

$$\langle x, \bar{\alpha}T^* + \bar{\beta}S^*y\rangle = ((\alpha T + \beta S)x, y).$$

Pero ésto se sigue de

$$\begin{aligned}\langle x, (\bar{\alpha}T^* + \bar{\beta}S^*)y\rangle &= \alpha\langle x, T^*y\rangle + \beta\langle x, S^*y\rangle \\ &= \alpha(Tx, y) + \beta(Sx, y) \\ &= ((\alpha T + \beta S)x, y).\end{aligned}$$

(v) Nótese que $RT \in \mathfrak{L}(X, Z)$. Para $x \in X$ y $z \in Z$ tenemos

$$[RTx, z] = (Tx, R^*z) = \langle x, T^*(R^*z)\rangle.$$

Ésto significa que $(RT)^* = T^*R^*$.

(vi) Supongamos que existe $T^{-1} \in \mathfrak{L}(Y, X)$ tal que $TT^{-1} = I_Y$ y $T^{-1}T = I_X$. Teniendo en cuenta que $I_X^* = I_X$ e $I_Y^* = I_Y$ y el apartado (v) entonces $T^*(T^{-1})^* = I_X$ y $(T^{-1})^*T^* = I_Y$. De donde se concluye que T^* es invertible y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. ∎

Definición 4.2.5 *Sea $X = Y$ espacio de Hilbert y $T \in \mathfrak{L}(X)$. T se dice autoadjunto si $T^* = T$.*

Nota 4.2.2 *Si $T \in \mathfrak{L}(X)$ entonces TT^* es autoadjunto, pues $(TT^*)^* = T^{**}T^* = TT^*$.*

Ejemplo 4.2.4 *Si $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ entonces T_K es autoadjunto si y sólo si*

$$K(x, y) = \overline{K(y, x)}.$$

Para núcleos reales ser autoadjunto equivale a ser simétrico, i.e. $K(x, y) = K(y, x)$.

Acabaremos este capítulo con la relación existente entre el núcleo de un operador y la imagen del adjunto.

Proposición 4.2.6 *Sean X e Y espacios de Hilbert y $T \in \mathfrak{L}(X, Y)$. Entonces*

(i) $KerT = (ImT^*)^\perp$, $(KerT)^\perp = \overline{ImT^*}$.

(ii) $KerT^* = (ImT)^\perp$, $(KerT^*)^\perp = \overline{ImT}$.

Demostración: (i) Como $\langle x, T^*y\rangle = (Tx, y)$ se tiene que $Tx = 0$ si, y sólo si, $x \perp T^*y$ para todo $y \in Y$. Es decir, $KerT = (ImT^*)^\perp$.

Por otro lado sabemos que $(KerT)^\perp = ((ImT^*)^\perp)^\perp = \overline{ImT^*}$.

(ii) Es consecuencia de (i) aplicado a T^*. ∎

Corolario 4.2.7 *Sea $T \in \mathfrak{L}(X, Y)$.*

(i) Si T es suprayectiva entonces T^* es inyectiva.

(ii) Si T^* es inyectiva e ImT es cerrado entonces T es suprayectiva.

Chapter 5

Teoría espectral de operadores

5.1 Espectro de un operador

En esta sección $(X, \|\cdot\|)$ será un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y $T : X \to X$ un operador lineal y continuo, es decir $T \in \mathcal{L}(X)$. Motivados por la resolución de ecuaciónes consideramos varias nociones asociadas a los operadores que juegan un papel fundamental en el desarrollo posterior.

Definición 5.1.1 *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Un valor $\lambda \in \mathbb{K}$ se dice valor propio del operador si existe $x \neq 0 \in X$ tal que $Tx = \lambda x$, es decir $Ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$. Los elementos no nulos de $Ker(T - \lambda I)$ se llaman vectores propios de T asociados a λ.*

Denotamos $\sigma_p(T)$ al conjunto de valores propios del operador, i.e.

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : Ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$$

y le llamamos espectro puntual del operador.

Nota 5.1.1 *Observar que $\lambda \in \sigma_p(T)$ implica que $T - \lambda I$ no es inyectiva, en particular no es invertible.*

Es bien sabido que si $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ es lineal el hecho de ser inyectiva, equivale a ser suprayectiva y equivale a ser invertible (con inversa continua). Dicha condición puede caracterizarse en términos del $\det(A) \neq 0$ siendo A la matriz del operador. Por tanto el conjunto de valores propios $\sigma_p(T)$ coincide con las soluciones de

$$det(A - \lambda I) = 0,$$

es decir las raices del polinomio característico.

Definición 5.1.2 *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Un valor $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama valor regular (o valor resolvente) para T si $(T - \lambda I)$ es invertible en $\mathcal{L}(X)$. Denotamos*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \exists (T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$$

al conjunto de valores regulares, denominado el conjunto resolvente del operador y $\sigma(T)$ a su complementario, denominado el espectro del operador. Es decir $\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \rho(T)$ es el conjunto de valores no regulares (llamados también valores espectrales).

Definimos el operador resolvente resolvente de T, denotado R_T mediante la aplicación $R_T : \rho(T) \to \mathcal{L}(X)$ dada por

$$R_T(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}.$$

Nota 5.1.2 *Observar que $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.*

Ejemplo 5.1.1 *Sea $S \in \mathcal{L}(\ell^2)$ dado por $S((\alpha_1, \alpha_2, ...)) = (0, \alpha_1, \alpha_2, ...)$. Observar que $ImT = \{e_1\}^\perp$ luego $0 \in \sigma(S)$. Sin embargo $0 \notin \sigma_p(S)$ pues $KerT = 0$.*

Nota 5.1.3 *Si $\lambda \in \sigma(T)$ se debe a una de las siguientes circunstancias: $T - \lambda I$ no es inyectivo, $T - \lambda I$ no es suprayectivo ó $T - \lambda I$ es una biyección continua pero su inversa no es continua.*

Ejemplo 5.1.2 *Sea $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ dado por $T((\alpha_1, \alpha_2, ...)) = (\alpha_2, \alpha_3, ...)$. Observar que*

$$Ker(T - \lambda I) = \{x \in \ell^2 : x_2 = \lambda x_1, x_3 = \lambda x_2, ...\} = \{x_1(1, \lambda, \lambda^2, ...)\}.$$

Por tanto existe $x_1 \neq 0$ tal que $x_1(1, \lambda, \lambda^2, ...) \in \ell^2$ si, y sólo si, $0 \leq |\lambda| < 1$. Es decir $\sigma_p(T) = \{\lambda : 0 \leq |\lambda| < 1\}$.

En particular $1 \notin \sigma_p(T)$. Veamos que $1 \in \sigma(T)$ probando que $T - I$ no es suprayectiva. En efecto,

$$Im(T - I) = \{(\alpha_1, \alpha_2, ...) \in \ell^2 : \alpha_n = \beta_{n+1} - \beta_n, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2\}.$$

Luego $(\alpha_1, \alpha_2, ...) \in Im(T - I)$ implica que $\sum_{k=1}^n \alpha_k = \beta_{n+1} - \beta_1$ es convergente. En particular $(\frac{1}{n}) \notin Im(T - I)$.

Teorema 5.1.3 *Si $T \in \mathcal{L}(X)$ entonces $\sigma(T)$ es un conjunto compacto contenido en $\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|T\|\}$.*

Demostración: Veamos que $\sigma(T)$ es cerrado y $\sigma_p(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|T\|\}$.

Si $|\lambda| > \|T\|$ entonces $\|\lambda^{-1}T\| < 1$. Usando el criterio de invertibilidad de operadores se concluye que $I - \lambda^{-1}T = -\lambda^{-1}(T - \lambda I)$ es invertible. En particular $\lambda \in \rho(T)$.

Veamos que $\rho(T)$ es abierto. Sea $\lambda \in \rho(T)$, es decir $T - \lambda I \in \mathcal{G}(X)$. De los resultados del Teorema 3.5.4 se tiene que todo operador $S \in \mathcal{L}(X)$ tal que $\|S - (T - \lambda I)\| < \frac{1}{\|(T-\lambda I)^{-1}\|}$ también es invertible.

Consideremos $S = T - \beta I$. Por tanto, si $|\lambda - \beta| < \frac{1}{\|(T-\lambda I)^{-1}\|}$ entonces $\beta \in \rho(T)$. ■

Nota 5.1.4 *Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dado por $(x, y) \to (-y, x)$ se cumple que $\sigma(T) = \varnothing$, pues para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $T - \lambda I$ es inyectiva.*

Nota 5.1.5 *Un importante resultado referente al especto de un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ en el caso de X normado sobre $\mathbb{C}$ afirma que $\sigma(T) \neq \varnothing$. En el caso finito dimensional es consecuencia inmediata del teorema fundamental del álgebra, sin embargo en el caso infinito dimensional su demostración necesita algunos resultados que no entran en el contenido en este curso.*

Aplicando los resultados de invertibilidad del Capítulo 3 podemos obtener las siguientes consecuencias sobre desarrollos en serie de Laurent de la resolvente.

Teorema 5.1.4 *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$.*

(i) Si $|\lambda| > \|T\|$ entonces $\lambda \in \rho(T)$ y se obtiene el desarrollo en serie de Laurent

$$R_T(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n.$$

Además $\|R_T(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$.

(ii) Si $\lambda \in \rho(T)$ entonces se tiene el desarrollo en serie de potencias

$$R_T(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta - \lambda)^n R_T(\lambda)^{n+1}, \quad |\beta - \lambda| < \frac{1}{\|R_T(\lambda)\|}.$$

Demostración: (i) Se vió en Teorema 5.1.3 que $\lambda \in \rho(T)$. Además

$$(I - \lambda^{-1}T)^{-1} = -\lambda(T - \lambda I)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} T^n.$$

Por tanto

$$R_T(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n.$$

(ii) Nótese que si $\lambda \in \rho(T)$ y $|\lambda - \beta| < \frac{1}{\|R_T(\lambda)\|}$ entonces $\beta \in \rho(T)$. Además

$$\begin{aligned} T - \beta I &= T - \lambda I - (\beta - \lambda) I \\ &= (T - \lambda I)(I - (\beta - \lambda)(T - \lambda I)^{-1}) \\ &= (T - \lambda I)(I - (\beta - \lambda) R_T(\lambda)). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$R_T(\beta) = (I - (\beta - \lambda) R_T(\lambda))^{-1} R_T(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta - \lambda)^n R_T^{n+1}(\lambda).$$

■

5.2 Operadores compactos

Un conjunto $A \in X$ donde X un espacio normado es acotado si $\|x\| \leq M$ para todo $x \in A$, es decir $A \subset \{x \in X : \|x\| \leq M\}$. A es cerrado si $\bar{A} = A$. Recordemos que $A \subset X$ se dice *relativamente compacto* si $\bar{A}$ es compacto, i.e. de todo cubrimiento abierto de $\bar{A}$ se puede extraer un subrecubrimiento finito.

Es bien sabido que todo compacto es cerrado y acotado, pero recordemos que la compacidad no es equivalente a ser cerrado y acotado en espacios de dimensión infinita.

De hecho, por el teorema de Riesz, X es finito dimensional si, y sólo si, todo acotado $A \subset X$ es relativamente compacto.

Mencionemos, sin demostración, una caracterización de los conjuntos relativamente compactos en el caso $X = C(K)$.

Teorema 5.2.1 *(Teorema de Ascoli-Arzelà) Sea (K, d) un espacio métrico compacto, y $X = C(K)$ con $\|\cdot\|_\infty$. Un subconjunto $A \subset C(K)$ es relativamente compacto si, y sólo si, A es acotado, i.e.*

$$\sup_{x \in A, t \in K} |x(t)| < \infty,$$

y A es equicontinuo, i.e. para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que

$$\sup_{x \in A} |x(t) - x(s)| < \varepsilon, \quad d(s,t) < \delta.$$

Definición 5.2.2 *Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Diremos que T es compacto si transforma conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos.*

Nota 5.2.1 *Si $T : X \to Y$ es lineal y compacto entonces $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Como $T(B_X)$ es compacto en particular acotado. Luego existe $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M$ si $\|x\| \leq 1$.*

Proposición 5.2.3 *Sean X e Y espacios normados y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Son equivalentes:*

(i) T es compacto.

(ii) $T(B_X)$ es relativamente compacto, donde B_X es la bola cerrada.

(iii) De toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada se puede extraer una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(T(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente en Y.

Demostración: (i) $\Longrightarrow$(ii) Inmediato.

(ii) $\Longrightarrow$(iii) Sea $\|x_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $M^{-1}x_n \in B_X$. Sea $A = \{T(M^{-1}x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ que sabemos que es relativamente compacto. Luego se puede extraer una subsucesión convergente en $\bar{A}$ y por tanto $T(x_{n_k})$ converge en Y.

(iii)$\Longrightarrow$(i) Sea $A \subset X$ acotado. Como $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se tiene que $T(A)$ es acotado. Veamos que $T(A)$ es relativamente compacto, probando que de toda sucesión se puede extraer una subsucesión convergente. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T(A)$, pongamos $y_n = T(x_n)$ para $x_n \in A$. Como A es acotado, por la hipótesis se concluye que existe una subsucesión $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. ∎

Nota 5.2.2 *La identidad $I : X \to X$ es compacto si y sólo si X es finito dimensional.*

Ejemplo 5.2.1 *Sea $K \in C([a, b] \times [a, b])$ y $T_K : C([a, b]) \to C([a, b])$ dado por $T_K x(s) = \int_a^b K(s, t)x(t)dt$. Entonces T_K es compacto.*

Demostración: Es suficiente ver que $A = \{T_K(x) : \|x\|_\infty \leq 1\}$ es relativamente compacto en $C([a, b])$. Usando el Teorema 5.2.1 hemos de ver que A es acotado y equicontinuo. Es claro que $A \subset \{y \in C([a, b]) : \|y\|_\infty \leq \|T_K\|\}$. Por otro lado, como K es uniformemente continua en $[a, b] \times [a, b]$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|K(s, t) - K(s', t)| < \frac{\varepsilon}{(b - a)}, \quad |s - s'| < \delta, t \in [a, b].$$

Por tanto

$$\sup_{\|x\|_\infty\leq 1}|T_K(x)(s)-T_Kx(s')|\leq\int_a^b|K(s,t)-K(s',t)||x(t)|dt<\varepsilon,\quad |s-s'|<\delta.$$

■

Definición 5.2.4 *Denotemos los operadores de rango finito*

$$\mathcal{F}(X,Y)=\{T\in\mathcal{L}(X,Y):dim(ImT)<\infty\}$$

y los operadores compactos por

$$\mathcal{K}(X,Y)=\{T:X\to Y:\ \textit{lineales y compactos}\ \}.$$

En el caso $X=Y$ los denotaremos $\mathcal{F}(X)$ y $\mathcal{K}(X)$.

Proposición 5.2.5 *Sea $T\in\mathcal{L}(X,Y)$. $T\in\mathcal{F}(X,Y)$ si, y sólo si, existen $y_1,...,y_n\in Y$ y $\phi_1,....,\phi_n\in X'$ tales que*

$$T(x)=\sum_{i=1}^n\phi_i(x)y_i.$$

Demostración: Como $(ImT,\|\cdot\|)$ es finito dimensional. Sea $(y_i)_{i=1}^n$ una base de ImT. Consideremos $J:\mathbb{K}_2^n\to ImT$ el isomorfismo tal que $y_i=J(e_i)$. Consideremos $\phi_i=\pi_iJ^{-1}T\in X'$ donde $\pi_i:\mathbb{K}_2^N\to\mathbb{K}$ dado por $\pi_i((\alpha_1,...,\alpha_n))=\alpha_i$ para $i=1,...,n$. Entonces si $Tx=\sum_{i=1}^n\alpha_iy_i$ se tiene que $J^{-1}(Tx)=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ y por tanto $\alpha_i=\phi_i(x)$.

El recíproco es inmediato. ■

Proposición 5.2.6 *Sean X,Y y Z espacios normados. Entonces*

(i) $\mathcal{F}(X,Y)\subset\mathcal{K}(X,Y)\subset\mathcal{L}(X,Y)$.

(ii) Si $T\in\mathcal{F}(X,Y)$ (respect. $T\in\mathcal{K}(X,Y)$) y $S\in\mathcal{L}(Y,Z)$ entonces $ST\in\mathcal{F}(X,Z)$ (respect. $ST\in\mathcal{K}(X,Z)$).

(iii) Si $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ y $S\in\mathcal{F}(Y,Z)$ (respect. $T\in\mathcal{K}(Y,Z)$) entonces $ST\in\mathcal{F}(X,Z)$ (respect. $ST\in\mathcal{K}(X,Z)$).

Demostración: (i) Sea $T\in\mathcal{F}(X,Y)$. Como $T(B_X)$ es un conjunto acotado en ImT que es finito dimensional, se tiene que $T(B_X)$ es relativamente compacto.

El otro contenido se observó en la Nota 5.2.1.

(ii) Usar que $Im(ST) \subset Im(S)$ para el caso $S \in \mathcal{F}(Y,Z)$. Si $S \in \mathcal{K}(Y,Z)$, como $T(B_X)$ es un acotado se tiene que $ST(B_X)$ es relativamente compacto.

(iii) Si $T \in \mathcal{F}(X,Y)$ lo escribimos

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) y_i,$$

entonces

$$ST(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) S y_i \in \mathcal{F}(X,Z).$$

Si $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ entonces $\overline{T(B_X)}$ es compacto, y como S es continua se tiene que $S(\overline{T(B_X)})$ es compacto y $ST(B_X) \subset S(\overline{T(B_X)})$. ■

Teorema 5.2.7 *Sea X un espacio normado e Y un espacio de Banach. Entonces $\mathcal{K}(X,Y)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(X,Y)$.*

Demostración: Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ tal que $T_n \to T$. Veamos que $T \in \mathcal{K}(X,Y)$. Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X con $\sup_n \|x_n\| = M$. Veamos que existe una subsucesión $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(T(x'_k))_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en Y.

Por ser T_1 compacto existe una subsucesión, denotada $(x_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(T_1(x_{1,k}))_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente en Y. Aplicando que T_2 es compacto existe una subsucesión de $(x_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$, denotada $(x_{2,k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(T_2(x_{2,k}))_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente en Y. Reiterando el proceso existe una subsucesión de $(x_{n-1,k})_{k\in\mathbb{N}}$, denotada $(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(T_n(x_{n,k}))_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente en Y. Consideremos ahora, $x'_k = x_{k,k}$ para $k \in \mathbb{N}$. Es una subsucesión de la original $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Veamos que verifica que $(T(x'_k))_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Al ser $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(T_n(x'_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T\| < \varepsilon/(3M)$. En particular

$$\|T_n x'_k - T x'_k\| \leq \|T_n - T\|(\sup \|x'_k\|) < \varepsilon/3, k \in \mathbb{N}.$$

Por la compacidad de T_n existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T_n x'_j - T_n x'_i\| < \varepsilon/3, i, j \geq k_0.$$

Por tanto, para $i, j \geq k_0$

$$\|T x'_j - T x'_i\| \leq \|T x'_j - T_n x'_j\| + \|T_n x'_j - T_n x'_i\| + \|T_n x'_i - T x'_i\| < \varepsilon.$$

■

Corolario 5.2.8 *Sea X un espacio normado e Y un espacio de Banach. Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(X,Y)$ y $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(X,Y)$ entonces $T \in \mathcal{K}(X,Y)$.*

5.3 Espectro de operadores compactos

Comenzamos mencionando un resultado de aproximación de gran utilidad debido a Riesz.

Lema 5.3.1 *(Riesz) Sean Y_1 e Y_2 subespacios vectoriales de un espacio normado X tales que Y_1 es cerrado y cumple $Y_1 \subsetneq Y_2$. Para todo $0 < \theta < 1$ existe $y_2 \in Y_2$ con $\|y_2\| = 1$ y $\|y_2 - y\| \geq \theta$ para todo $y \in Y_1$.*

Demostración: Sea $u \in Y_2 \backslash Y_1$. Como Y_1 es cerrado se tiene que $d(u, Y_1) = d > 0$. Por tanto existe $y_\theta \in Y_1$ tal que

$$0 < d \leq \|u - y_\theta\| < \frac{d(u, Y_1)}{\theta}.$$

Consideremos $y_2 = \frac{u - y_\theta}{\|u - y_\theta\|} \in Y_2$ con $\|y_2\| = 1$ que cumple, para cada $y \in Y_1$,

$$\begin{aligned} \|y_2 - y\| &= \|\frac{u - y_\theta}{\|u - y_\theta\|} - y\| \\ &= \frac{1}{\|u - y_\theta\|}\|u - (y_\theta + y\|u - y_\theta\|)\| \\ &\geq \frac{1}{\|u - y_\theta\|} d(u, Y_1) > \theta. \end{aligned}$$

■

Otra importante observación, válida para todos los operadores, es la siguiente:

Lema 5.3.2 *Sean $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \sigma_p(T)$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$ y sean $x_1, ...x_n$ vectores propios asociados a dichos valores propios. Entonces $\{x_1, ..., x_n\}$ son linealmente independientes.*

Demostración: Supongamos que $\{x_1, ..., x_n\}$ no son linealmente independientes, y sea $m \in \{2, ..., n\}$ tal que x_m el primer vector combinación lineal de los anteriores (en particular $\{x_1, ..., x_{m-1}\}$ son linealmente independientes). Pongamos $x_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_i$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= (T - \lambda_m I)(x_m) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i T x_i - \lambda_m \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_m) x_i. \end{aligned}$$

Por independencia lineal se tiene que $(\lambda_i - \lambda_m)\alpha_i = 0$ para $1 \leq i \leq m-1$, y por tanto $x_m = 0$ lo que contradice la hipótesis. ■

Teorema 5.3.3 *Sea $T \in \mathcal{K}(X)$. Entonces $\sigma_p(T)$ es a lo sumo numerable y su único posible punto de acumulación es el* 0.

DEMOSTRACIÓN: Veamos que para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$\{\lambda \in \sigma_p(T) : |\lambda| \geq \varepsilon\}$$

es vacío o finito. Con ésto se concluye que

$$\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \{\lambda \in \sigma_p(T) : |\lambda| \geq 1/n\}$$

es a lo sumo numerable.

Supongamos, por redución al absurdo, que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $A = \{\lambda \in \sigma_p(T) : |\lambda| \geq \varepsilon_0\}$ es infinito. Podremos tomar una sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ de valores propios distintos. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores propios correspondiente a los valores propios anteriores. Sabemos que $\{x_1, x_2, ...\}$ es un conjunto linealmente independiente. Denotemos $Y_n = LIN\{x_1, ..., x_n\}$ que cumple $Y_n \subsetneq Y_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $T(Y_n) \subset Y_n$. Usando el lema de Riesz anterior existe $y_{n+1} \in Y_{n+1}$ con $\|y_{n+1}\| = 1$ y $d(y_{n+1}, Y_n) \geq 1/2$. Veamos que $(T(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene subsucesiones convergentes. Para ello escribimos, para $m < n$,

$$T(y_n) - T(y_m) = \lambda_n y_n - (T(y_m) - T(y_n) + \lambda_n y_n).$$

Comprobemos que $u = T(y_m) - (T(y_n) - \lambda_n y_n) \in Y_{n-1}$. Por un lado $y_m \in Y_m \subset Y_{n-1}$ y, por tanto $T(y_m) \in Y_{n-1}$. Por otro lado si $y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ se tiene que

$$\begin{aligned} T(y_n) - \lambda_n y_n &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T x_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_n \alpha_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_n) x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_n) x_i \in Y_{n-1}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \|T(y_n) - T(y_m)\| &= \|\lambda_n y_n - u\| \\ &\geq |\lambda_n| \|y_n - \frac{u}{|\lambda_n|}\| \\ &\geq |\lambda_n| d(y_n, Y_{n-1}) \\ &\geq |\lambda_n|/2 \geq \varepsilon_0/2. \end{aligned}$$

Esto impide que existan subsucesiones convergentes, y se obtiene una contradicción. ■

Corolario 5.3.4 *Si X es un espacio normado infinito dimensional y $T \in \mathcal{K}(X)$ entonces se cumple una de las siguientes situaciones:*
(i) $\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \varnothing$.
(ii) $\sigma_p(T) \setminus \{0\}$ *es un conjunto finito.*
(iii) $\sigma_p(T) \setminus \{0\}$ *es una sucesión que converge a* 0.

Teorema 5.3.5 *Sea X un espacio normado y $T \in \mathcal{K}(X)$. Si $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ entonces $Ker(T - \lambda I)$ es finito dimensional.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos que la bola unidad de $Ker(T - \lambda I)$ es compacto. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Ker(T - \lambda I)$ con $\|x_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como T es compacto entonces $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente. Y por tanto también $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente. ■

Daremos ahora información sobre el espectro de los operadores compactos.

Teorema 5.3.6 *Sea X un espacio normado de dimensión infinita y $T \in \mathcal{K}(X)$. Entonces $0 \in \sigma(T)$.*

Demostración: Supongamos que $0 \in \rho(T)$ entonces T es invertible y por tanto $I_X = TT^{-1}$ es compacto. Por el teorema de Riesz X es finito dimensional. ■

Teorema 5.3.7 *Sea X un espacio normado y $T \in \mathcal{K}(X)$. Si $\lambda \neq 0$ entonces $Im(T - \lambda I)$ es cerrado.*

Demostración: Supongamos que $Im(T - \lambda I)$ no es cerrado. Existe $y \in X \setminus Im(T - \lambda I)$ y una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $y_n = T(x_n) - \lambda x_n$ convergente a y. Como $Im(T - \lambda I)$ es un subespacio, se tiene que $y \neq 0$, y por tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_n\| > \|y\|/2 > 0$ para $n \geq n_0$. Luego $x_n \notin Ker(T - \lambda I)$ para $n \geq n_0$. Como $Ker(T - \lambda I)$ es cerrado, podemos poner $d_n = d(x_n, Ker(T - \lambda I)) > 0$. Consideremos $z_n \in Ker(T - \lambda I)$ tal que

$$0 < d_n \leq \|x_n - z_n\| < 2d_n.$$

Entonces

$$T(x_n - z_n) - \lambda(x_n - z_n) = T(x_n) - \lambda x_n = y_n.$$

Veamos que $sup\{d_n : n \in \mathbb{N}\} = \infty$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $sup\{d_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Es decir, $(x_n - z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y, como T es compacto, existirá una subsucesión de $(x_{n_k} - z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(T(x_{n_k} - z_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Luego $(x_{n_k} - z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x. Como consecuencia,

$$y = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} T(x_{n_k} - z_{n_k}) - \lambda(x_{n_k} - z_{n_k}) = T(x) - \lambda x.$$

Esto contradice el hecho de que $y \notin Im(T - \lambda I)$.

Tomemos ahora una sucesión d_{n_k} divergente a $+\infty$ y denotemos

$$w_k = \frac{1}{d_{n_k}}(x_{n_k} - z_{n_k}).$$

De nuevo, podemos afirmar que

$$\lambda w_k = T(w_k) - (T - \lambda I)(w_k) = T(w_k) - \frac{1}{d_{n_k}} y_{n_k}.$$

Usando que $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada, y T compacto se concluye que existe una subsucesión de $(T(w_k))_{k\in\mathbb{N}}$ convergente y por tanto también la subsucesión de $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a cierto w. Pasando al límite

$$\lambda w = T(w) - \lim_k \frac{1}{d_{n_k}} y_{n_k} = T(w).$$

Es decir $w \in Ker(T - \lambda I)$. Por tanto

$$d_{n_k}\|w_k - w\| = \|x_{n_k} - z_{n_k} - d_{n_k} w\| \geq d(x_{n_k}, Ker(T - \lambda I)) = d_{n_k}.$$

Esto conduce a contradicción pues $\|w_k - w\| \geq 1$, y tiene una subsucesión $(w_{n_j} - w)_j$ que converge a cero. ■

Teorema 5.3.8 *Sea $T \in \mathcal{K}(X)$ y $\lambda \neq 0$.*

Si $Ker(T - \lambda I) = \{0\}$ entonces $Im(T - \lambda I) = X$ y el operador $T - \lambda I$ es invertible en $\mathcal{L}(X)$.

Es decir, $\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$.

Demostración: Si X es de dimensión finita el resultado es conocido de Algebra elemental. Supongamos que X es de dimensión infinita. Supongamos que $X_1 = Im(T - \lambda I) \neq X$. Sabemos por el Teorema 5.3.7 que X_1 es cerrado. Veamos que X_1 tiene dimension infinita. En efecto si $x_1, ...x_n$ son linealmente independientes en X entonces $y_1 = T(x_1) - \lambda x_1, ..., y_n = T(x_n) - \lambda x_n$ son linealmente independientes en X_1 ya que

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = T(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) - \lambda(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i)$$

y por tanto $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in Ker(T - \lambda I) = \{0\}$ de donde se concluye que $\alpha_i = 0$ para $1 \leq i \leq n$.

Probemos ahora que $T(X_1) \subset X_1$. En efecto si $x = T(z) - \lambda z \in X_1$ y llamamos $y = T(z)$ se tiene que

$$T(y) - \lambda y = T^2(z) - \lambda T(z) = T(T(z) - \lambda z) = T(x).$$

En particular $T(x) \in Im(T - \lambda I) = X_1$. Denotemos T_1 la restricción de T a X_1 y estamos en la situación anterior, un operador compacto $T_1 \in \mathcal{L}(X_1)$ y X_1 de dimensión infinita. Definimos $X_2 = Im(T_1 - \lambda I_{X_1}) = Im((T - \lambda I_X)^2) \subset X_1$. Se cumple que $X_2 \neq X_1$ pues caso contrario dado $x \in X$ ponemos $Tx - \lambda x = x_1 \in X_1 = X_2$ y por tanto existe $x_1' \in X_1$ tal que $Tx - \lambda x = T_1(x_1') - \lambda x_1' = T(x_1') - \lambda x_1'$ y usando la inyectividad de $T - \lambda I$ se tiene que $x = x_1' \in X_1$. Razonando de manera recurrente se encuentra una sucesión de espacios cerrados X_n, infinito dimensionales tales que

$$... \subsetneq X_n \subsetneq X_{n-1} \subsetneq ... \subsetneq ...X_1 \subsetneq X$$

donde $X_n = Im(T - \lambda I_X)^n$, $T_n \in \mathcal{K}(X_n)$. Usando el lema de Riesz se obtiene una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|x_n\| = 1$, $x_n \in X_n$ y $d(x_n, X_{n+1}) \geq 1/2$. Observemos que para $n > m$,

$$T(x_n) - T(x_m) = -\lambda x_m + \lambda x_n + (T(x_n) - \lambda x_n) - (T(x_m) - \lambda x_m).$$

Como $x_n \in X_n \subset X_{m+1}$, $T(x_n) - \lambda x_n \in Im(T_n - \lambda I_{X_n}) = X_{n+1} \subset X_{m+1}$, $(T(x_m) - \lambda x_m) \in X_{m+1}$ entonces

$$\|T(x_n) - T(x_m)\| = |\lambda|\|x_m - u_m\| \geq |\lambda| d(x_m, X_{m+1}) \geq \frac{|\lambda|}{2}.$$

Esto conduce a una contradicción puesto que $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no puede tener subsucesiones convergentes. Por tanto $Im(T - \lambda I) = X$.

Veamos la continuidad de la inversa $T - \lambda I^{-1}$. Hemos de ver que existe $M > 0$ tal que $M \leq \|Tx - \lambda x\|$ para todo $x \in X$ con $\|x\| = 1$. Supongamos que existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|x_n\| = 1$ con $y_n = Tx_n - \lambda x_n$ tal que $\|y_n\| < 1/n$. Usando la compacidad existe una subsucesión tal que (Tx_{n_k}) es convergente, y como

$$x_{n_k} = \frac{1}{\lambda}(T(x_{n_k}) - y_{n_k})$$

la sucesión x_{n_k} también converge, digamos a x. Consecuentemente $\lambda x = T(x)$ y así $x \in Ker(T - \lambda I)$ lo que implica $x = 0$, pero $\|x\| = \lim_k \|x_{n_k}\| = 1$. ■

Corolario 5.3.9 *Si X es un espacio normado infinito dimensional y $T \in \mathcal{K}(X)$. Entonces*

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T).$$

En particular $\sigma(T)$ es, o bien un conjunto finito que contiene al 0, o bien un sucesión que tiene al cero como punto de acumulación.

5.4 Espectro de operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert

En esta sección $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ denota un espacio de Hilbert Recordemos que $T \in \mathcal{L}(X)$ se dice autoadjunto si $T = T^*$, i.e.

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \quad x, y \in X.$$

Una primera propiedad de estos operadores es que su norma se calcula de una manera más fácil.

Proposición 5.4.1 *Si $T \in \mathcal{L}(X)$ es autoadjunto entonces*

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| = 1\}.$$

Demostración: Llamemos $A = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| = 1\}$. De la desigualdad de Cauchy se tiene que $A \leq \|T\|$. Veamos ahora que $|\Re(\langle Tx, y\rangle)| \leq A$ para $\|x\| = \|y\| = 1$. Al ser autoadjunto se tiene

$$\begin{aligned} \langle T(x+y), x+y\rangle &= \langle T(x), x\rangle + \langle T(y), x\rangle + \langle T(x), y\rangle + \langle T(y), y\rangle \\ &= \langle T(x), x\rangle + 2\Re(\langle T(x), y\rangle) + \langle T(y), y\rangle. \end{aligned}$$

Razonando análogamente con $x - y$ y restando se obtiene

$$\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle = 4\Re(\langle Tx, y\rangle).$$

Como $|\langle Tz, z\rangle| \leq A\|z\|^2$ para todo $z \in X$, se tiene que

$$\begin{aligned} 4|\Re(\langle Tx, y\rangle)| &= |\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle| \\ &\leq |\langle T(x+y), x+y\rangle| + |\langle T(x-y), x-y\rangle| \\ &\leq A(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \\ &\leq 2A(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4A. \end{aligned}$$

Usando ahora que $\Im(\langle Tx, y\rangle) = \Re(\langle Tx, iy\rangle)$ se tiene tambien que $|\Im(\langle Tx, y\rangle)| \leq A$. Usando que $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\}$ se obtiene el resultado. ■

Proposición 5.4.2 *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ autoadjunto. Entonces*

(i) $A_T = \{\langle Tx, x\rangle : \|x\| = 1\}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ y $\sigma_p(T) \subset A_T$. En particular los valores propios son reales.

(ii) Si $M_T = \sup A_T$ y $m_T = \inf A_T$ se tiene que $\|T\| = \max\{M_T, -m_T\}$.

Demostración: (i) Como $\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle x, Tx\rangle} = \overline{\langle Tx, x\rangle}$ se tiene que $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in X$. Además $A_T \subset [-\|T\|, \|T\|]$ usando la Proposición 5.4.1. Sea $\lambda \in \sigma_p(T)$ y x un vector propio no nulo (que podemos suponer con $\|x\| = 1$) asociado a λ. Entonces como $Tx = \lambda x$ se tiene que $\lambda = \langle Tx, x\rangle \in A_T$.

(ii) La desigualdad de Cauchy garantiza que $M_T \leq \|T\|$ y $-m_T \leq \|T\|$. Por otro lado

$$\langle Tx, x\rangle \leq M_T \leq \max\{M_T, -m_T\}, -\langle Tx, x\rangle \leq -m_T \leq \max\{M_T, -m_T\}.$$

El resultado se sigue de nuevo aplicando la Proposición 5.4.1. ■

Teorema 5.4.3 *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ autoadjunto. Entonces*
(i) $\sigma(T) \subset [m_T, M_T]$.
(ii) $M_T, m_T \in \sigma(T)$.

DEMOSTRACIÓN: (i) Sea $\lambda \in \mathbb{K}\backslash[m_T, M_T]$ y pongamos $d = d(\lambda, [m_T, M_T]) > 0$. En particular, para $\|x\| = 1$ se tiene $|\langle Tx, x\rangle - \lambda| > d$. Por tanto

$$\|(T - \lambda I)(x)\| \geq d\|x\|^2, x \in X.$$

Esto implica que $T - \lambda I$ es inyectiva y que $Im(T - \lambda I)$ es cerrado (pues si $(T - \lambda I)(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y, se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, y por tanto convergente a $x_0 \in X$, y como consecuencia $y = Tx_0 - \lambda x_0$.) Además $(Im(T - \lambda I))^\perp = \{0\}$ ya que si $x \neq 0$ se tiene que $\langle Tx - \lambda x, x\rangle > 0$ y por tanto $x \notin (Im(T - \lambda I))^\perp$. Usando ahora el teorema de la proyección ortogonal

$$X = Im(T - \lambda I) + (Im(T - \lambda I))^\perp = Im(T - \lambda I).$$

Consecuentemente $T - \lambda I$ es suprayectiva e invertible, o equivalentemente $\lambda \in \rho(T)$.

(ii) Veamos que $m_T \in \sigma(T)$ (el caso $M_T \in \sigma(T)$ es análogo y se deja como ejercicio). Si m_T es un valor propio ya lo tenemos. Supongamos que $m_T \notin \sigma_p(T)$, es decir $Ker(T - m_T I) = \{0\}$. Consideremos

$$(x, y) = \langle (T - m_T I)x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle - m_T\langle x, y\rangle.$$

Se cumple que $(x, x) = \langle Tx, x\rangle - m_T\|x\|^2 \geq 0$. Como también verifica las propiedes de un producto escalar sobre X (salvo $(x, x) > 0$ para $x \neq 0$) entonces tenemos la validez de la desigualdad de Cauchy. Por tanto, para $x \in X$ e $y = Tx - m_T x$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|(T - m_T I)x\|^4 &= |\langle Tx - m_T x, Tx - m_T x\rangle|^2 \\
&= |(x, y)|^2 \\
&\leq (x, x)(Tx - m_T x, Tx - m_T x) \\
&\leq (\langle Tx, x\rangle - m_T\|x\|^2)\langle (T - m_T)^2 x, Tx - m_T x\rangle \\
&\leq (\langle Tx, x\rangle - m_T\|x\|^2)\|T - m_T\|^3\|x\|.
\end{aligned}$$

De esta estimación se tiene que, si consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\|x_n\| = 1$ tal que $(\langle Tx_n, x_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a m_T entonces $((T - m_T I)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Esto implica que $m_T \in \sigma(T)$, pues en caso contrario

$$\frac{1}{\|(T - m_T I)^{-1}\|} \leq \|(T - m_T I)x_n\|, n \in \mathbb{N}.$$

■

Corolario 5.4.4 *Si $T \in \mathcal{L}(X)$ es autoadjunto entonces $\|T\| \in \sigma(T)$.*

Proposición 5.4.5 *Si $T \in \mathcal{L}(X)$ es autoadjunto y compacto entonces existe $\lambda \in \sigma_p(T)$ con $|\lambda| = \|T\|$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $T = 0$ es trival. Supongamos que $\|T\| > 0$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\|x_n\| = 1$ tal que $(|\langle Tx_n, x_n\rangle|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\|T\|$. Como la sucesión $(\langle Tx_n, x_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, existe una subsucesión convergente a un valor $\lambda \in \mathbb{R}$, que además cumplirá $|\lambda| = \|T\|$. Comprobemos que $\lambda \in \sigma_p(T)$. Mantenemos la notación de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para la subsucesión anterior, y usando la compacidad existe otra subsucesión de la misma de modo que $(T(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a cierto valor $z \in X$. Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
\|T(x_n) - \lambda x_n\|^2 &= \langle T(x_n) - \lambda x_n, T(x_n) - \lambda x_n\rangle \\
&= \|T(x_n)\|^2 - 2\lambda\langle T(x_n), x_n\rangle + \lambda^2\|x_n\|^2 \\
&\leq \|T\|^2 - 2\lambda\langle T(x_n), x_n\rangle + \lambda^2 \\
&= 2\lambda^2 - 2\lambda\langle T(x_n), x_n\rangle.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\lim_{k\to\infty} \|T(x_{n_k}) - \lambda x_{n_k}\|^2 = 0,$$

de donde se sigue

$$\lim_{k\to\infty} \lambda x_{n_k} = z.$$

Si ponemos $y = \frac{z}{\lambda}$ se concluye que

$$\langle T(y), y\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle T(x_{n_k}), x_{n_k}\rangle = \lambda \neq 0.$$

Por tanto $y \neq 0$ y $\quad T(y) = \lambda y.$ ■

5.5 El teorema espectral

Uno de los resultados importantes en la teoría de matrices afirma que las matrices reales y simétricas tienen n valores propios reales y pueden diagonalizarse, encontrando una base de vectores propios respecto de la cual la matriz es diagonal y tiene los valores propios en la diagonal. Veamos la situación infinito dimensional y la relación con la teoría espectral.

Del contenido de las secciones precedentes se tiene que todo operador compacto y autoadjunto T no nulo verifica que $\sigma(T) \neq \{0\}$ (pues siempre $\|T\| \in \sigma(T)$)y a lo sumo numerable. Además si $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$ entonces $\lambda \in \sigma_p(T)$ y $Ker(T - \lambda I)$ es de dimensión finita. Veamos que si $\lambda, \beta \in \sigma_p(T)$ con $\lambda \neq \beta$ entonces $Ker(T - \lambda I) \perp Ker(T - \beta I)$

Lema 5.5.1 *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ es autoadjunto y sean λ y β valores propios distintos del operador T. Si x e y son vectores propios asociados a λ y β respectivamente entonces $x \perp y$.*

Demostración: Como

$$Tx = \lambda x, \quad Ty = \beta, \quad \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle,$$

se tiene que

$$\lambda\langle x, y\rangle = \beta\langle x, y\rangle.$$

Así que $\langle x, y\rangle = 0$.

Ahora presentaremos el teorema espectral para operadores autoadjuntos y compactos.

Teorema 5.5.2 *(Hilbert-Schmidt) Sea X un espacio de Hilbert, y sea $0 \neq T \in \mathcal{L}(X)$ autoadjunto y compacto.*

(i) Existe una base ortonormal de $(KerT)^\perp$ formada por vectores propios de T.

(ii) Si $T \in \mathcal{F}(X)$ entonces los valores propios no nulos de T (repetidos según la dimensión del subespacio propio correspondiente) forman un conjunto finito $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ y existe un conjunto ortonormal $\{x_1, ..., x_n\}$ donde x_i es un vector propio asociado a λ_i para $i = 1, ..., n$ de manera que cada $x \in X$ se puede escribir

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle x_i + x_0$$

donde $x_0 \in KerT$. En particular $T(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\langle x, x_i\rangle x_i$.

(iii) Si $T \in \mathcal{K}(X) \setminus \mathcal{F}(X)$ entonces los distintos valores propios no nulos de T forman una sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales con $\lim \lambda_n = 0$, y existe

un conjunto ortonormal $\{x_1, ..., x_n, ...\}$ *donde* x_n *es un vector propio asociado a* λ_n *para* $n \in \mathbb{N}$ *de manera que cada* $x \in X$ *se puede escribir*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i \rangle x_i + x_0$$

donde $x_0 \in KerT$*. En particular* $T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle x, x_i \rangle x_i$*. (Los valores* λ_i *aparecen repetidos en la serie una cantidad finita de veces en función de la dimensión del* $Ker(T - \lambda_i I)$*.)*

Demostración:

(i) Denotemos (λ'_k) los valores propios no nulos y distintos de T y denotemos $X_k = Ker(T - \lambda'_k I)$ (que tienen dimensión finita). Considerar Y el subespacio generado por $\{\cup_{k=1}^{\infty} X_k\}$. Probemos que $Y^{\perp} = KerT$.

Es claro que $X_k \subset ImT$ (pues $T(\frac{x}{\lambda}) = x$, para $x \in X_k$) y por tanto $Y \subset ImT$. Como sabemos que $KerT = (ImT)^{\perp}$ se concluye que $KerT \subset Y^{\perp}$.

Veamos ahora que $T(Y^{\perp}) = 0$. Usando ahora que $T(X_k) \subset X_k$ podemos decir que $T(Y) \subset Y$. Por tanto, usando que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$, se obtiene $T(Y^{\perp}) \subset Y^{\perp}$. Definimos T_0 la restricción de T al subespacio $Y^{\perp}$, $T_0 : Y^{\perp} \to Y^{\perp}$, que es autoadjunto y compacto sobre el espacio de Hilbert $Y^{\perp}$. Comprobemos que $T_0 = 0$ (lo que es equivalente a $\sigma(T_0) = \{0\}$). Si $\lambda \in \sigma(T_0) \setminus \{0\}$ entonces λ es valor propio de T_0 y por tanto $\lambda \in \sigma_p(T)$. Luego existe $x \neq 0$ vector propio en $Y^{\perp}$ asociado a λ. Por tanto $x \in X_k \subset Y$ para algún k, lo que lleva a contradicción. Esto finaliza la prueba de la inclusión $Y^{\perp} \subset KerT$.

Como $\bar{Y} = (KerT)^{\perp}$ podemos encontrar una base ortonormal en cada X_k y considerar la base de $(KerT)^{\perp}$ dada por la unión de las distintas bases consideradas.

(ii) Nótese que si existe una cantidad numerable de valores propios no nulos entonces $dim(Y) = \infty$ (y por tanto $dim(ImT) = \infty$). Por consiguiente si T tiene rango finito entonces sólo puede tener un número finito de valores propios no nulos.

Sean $\lambda'_1, ..., \lambda'_k$ los valores propios distintos y no nulos. Supongamos que $dim(Ker(T - \lambda'_i I)) = n_i$ y ponemos $n = n_1 + ... + n_k$ y

$$\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} = \{\lambda'_1, \overbrace{\cdots}^{n_1}, \lambda'_1, ..., \lambda'_k, \overbrace{\cdots}^{n_k}, \lambda'_k\}$$

son los valores propios no nulos de T contados cada uno tantas veces como la dimensión del espacio que genera λ'_i. Sea $\{x_1, ..., x_n\}$ la base ortonormal de $(KerT)^{\perp}$ de modo que $Tx_i = \lambda_i x_i$. Usando el teorema de la proyección ortogonal, para $x \in X$ existe una única descomposición $x = y + x_0$ con $y \in (KerT)^{\perp}$ y $x_0 \in KerT$. Como $\{x_i\}_{i=1}^n$ es ortonormal y $\langle x_i, x_0\rangle = 0$ para $i = 1, ..., n$ se tiene $\langle y, x_i\rangle = \langle x, x_i\rangle$ para $i = 1, ..., n$. Por consiguiente $y = \sum_{i=1}^n \langle y, x_i\rangle x_i = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i$ y, así

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle x_i + x_0.$$

(iii) Si T no tiene rango finito entonces hay una cantidad numerable de valores propios no nulos distintos y la descomposición se tiene del mismo modo, pero con suma infinita. ■

Una manera equivalente de escribir la descomposición espectral es

$$x = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)\setminus\{0\}} x_\lambda + x_0$$

siendo x_λ la proyección de x sobre el subespacio $Ker(T - \lambda I)$ y $x_0 \in KerT$.

Si $\lambda \in \sigma(T)$ y P_λ denota la proyección ortogonal $P_\lambda(x) = x_\lambda$ sobre el subespacio $Ker(T - \lambda I)$, podemos reescribir el resultado como sigue:

Teorema 5.5.3 *Si $0 \neq T$ es un operador autoadjunto y compacto sobre un Hilbert X. Entonces*

$$T = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda P_\lambda.$$

(En caso numerable se entiende que los valores propios están ordenados de manera decreciente en modulo.)

Demostración: Justifiquemos la sumabilidad en el caso de infinitos valores propios. Dado $\varepsilon > 0$ y $\|x\| = 1$, sabemos que $\{\lambda : |\lambda| \geq \varepsilon\}$ es finito, y por tanto

$$\|Tx - \sum_{|\lambda|>\varepsilon} \lambda P_\lambda(x)\|^2 = \|\sum_{|\lambda|\leq\varepsilon} \lambda P_\lambda(x)\|^2 \leq \varepsilon^2 \sum_{|\lambda|\leq\varepsilon} \|P_\lambda(x)\|^2 \leq \varepsilon^2\|x\|^2.$$

Tomando supremo en $\|x\| = 1$ se obtiene la convergencia en $\mathcal{L}(X)$. ■