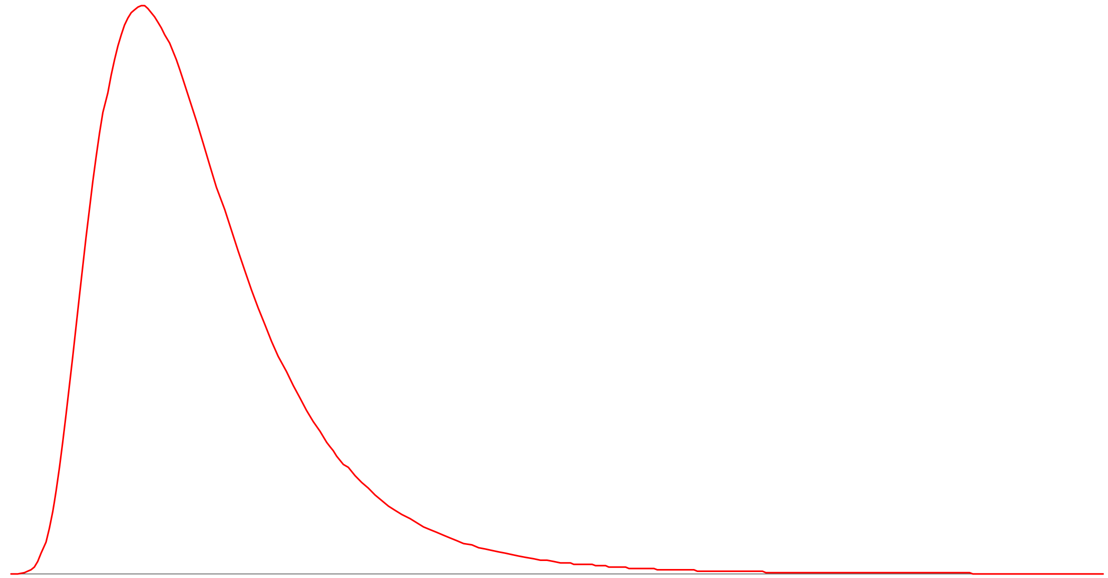
MODELO DE BLACK-SCHOLES

Puntos a desarrollar

- ¿Como de obtiene la ecuacion de Black-Scholes de valoracion de derivados? (Valoracion neutral al riesgo)
- ¿Cuales son las formulas analiticas de valoracion de call y puts europeas?
- ¿Que es la volatilidad implicita?
- ¿Como hay que modificar las formulas B-S, para valorar opciones sobre indices, divisas y futuros?
- ¿Como se utilizan las opciones sobre indices para asegurar el valor de una cartera?

La Distribución Lognormal



$$E(S_T) = S_0\, e^{\mu T}$$

$$\text{var}(S_T) = S_0^{\,2} e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1)$$

Los conceptos que subyacen en el modelo de Black-Scholes

- El precio de la opción y el precio de la acción dependen de la misma fuente de incertidumbre
- Podemos construir una cartera formada por la opción y la acción para eliminar la incertidumbre
- La cartera es instantáneamente libre de riesgo y debe ganar la rentabilidad del activo libre de riesgo
- Esto conduce a la ecuación diferencial de Black-Scholes

La Derivación de la ecuación diferencial de Black-Scholes

$$\Delta S = \mu S\,\Delta t + \sigma S\,\Delta z$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S\,\Delta z$$

Formamos una cartera:

-1: derivado

$+\dfrac{\partial f}{\partial S}$: acciones

La Derivación de la ecuación diferencial de Black-Scholes

El valor de la cartera Π viene dado por

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$$

El cambio en su valor en el tiempo Δt viene dado por

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S$$

La Derivación de la ecuación diferencial de Black-Scholes

La rentabildiad de la cartera debe ser la rentabilidad del activo libre de riesgo :

$$\Delta\Pi = r\,\Pi\Delta t$$

Sustituyendo $\Delta \boldsymbol{f}$ **y** ΔS **se obtiene la ecuación diferencial de Black - Scholes :**

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} + rS\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial S} + ½\,\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial S^2} = r\boldsymbol{f}$$

La ecuación diferencial

- Cualquier activo cuyo precio depende del precio de una acción satisface la ecuación diferencial anterior
- Las características particulares del activo que esté siendo valorado serán introducidas a través de las condiciones de contorno
- En un contrato forward la condición de contorno es
  $f = S - K$ siendo $t = T$
- La solución a la ecuación es $f = S - K e^{-r(T-t)}$

Valoración riesgo-neutro

- La variable μ no aparece en la ecuación de Black-Scholes
- La ecuación es independiente de todas las variables afectadas por las preferencias de riesgo
- Esto conduce al principio de valoración riesgo-neutro

Fórmulas de Black-Scholes

$$c = S_0\, N(d_1) - X\, e^{-rT} N(d_2)$$

$$p = X\, e^{-rT}\, N(-d_2) - S_0\, N(-d_1)$$

donde $$d_1 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Volatilidad implícita

- La volatilidad implícita de una opción es la volatilidad para la cual el precio de Black-Scholes es igual al precio de mercado
- Hay una correspondencia uno a uno entre los precios y las volatilidades implícitas

Dividendos

- Las opciones europeas sobre acciones que pagan dividendos son valoradas sustituyendo el precio de la acción menos el valor actual del dividendo en Black-Scholes
- Sólo deben incluirse los dividendos con vencimiento a lo largo de la vida de la opción
- El dividendo debería ser la reducción esperada en el precio esperado de la acción

Ejemplo de opcion europea sobre una accion que paga dividendos

- Dividendos dentro de tres y seis meses son de dos euros.
- Precio accion actual 100. P. Ejercicio= 90 y fecha de ejercicio es 9 meses. Tasa libre de riesgo r=10%. Volatilidad: 0.25 anual
- Remplazar en la formula de B-S, el precio S por S menos los dividendos acualizados:

$$S - D_1 e^{-rt_1} - \ldots - D_n e^{-rt_n} =$$

$$100 - 2e^{-0.10*0.25} - 2e^{-0.10*0.5} = 96.1469$$

y sustituyendo queda

$$c = 15.6465$$

Opciones europeas sobre acciones que pagan dividendos continuos

En cada uno de los siguientes casos tomamos la misma distribución de probabilidad para el precio de una acción en el momento T :

1. La acción parte del precio S_0 y proporciona una rentabilidad por dividendos q
2. La acción parte del precio $S_0 e^{-q\,T}$ y no proporciona ingresos por dividendos

Opciones europeas sobre acciones que pagan dividendos continuos (continuación)

Podemos valorar opciones europeas reduciendo el precio de la acción a $S_0e^{-q\,T}$ y tratándolas como si no hubiera dividendos

Formulas de valoracion (dividendos continuos)

$$c = S_0 e^{-qT} N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2)$$

$$p = X e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-qT} N(-d_1)$$

donde $$d_1 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r - q + \sigma^2 / 2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r - q - \sigma^2 / 2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

Opciones sobre Indices, Divisas y Futuros

Valorar opciones europeas sobre índices

Podemos usar la fórmula para una opción sobre una acción que paga dividendos continuos

Sea S_0 el nivel actual del índice

Sea q la rentabilidad esperada por dividendos media durante la vida de la opción

Formula opciones europeas sobre indices (q=tasa de rentabilidad por dividendo de las acciones del indice)

$$c = S_0 e^{-qT} N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2)$$

$$p = X e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-qT} N(-d_1)$$

donde $d_1 = \dfrac{\ln(S_0 / X) + (r - q + \sigma^2 / 2)T}{\sigma \sqrt{T}}$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r - q - \sigma^2 / 2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

Opciones Europeas sobre Indices

- Valorar una put con fecha vencimiento 6 meses, valor del indice es 100, precio ejercicio 95, r= 10%, rentabilidad por dividendo de las acciones del indice 5%, volatilidad 20%
- p=2.4648

Opciones sobre divisas

- Las opciones sobre divisas se negocian en la Bolsa de Filadelfia (PHLX)
- También se negocian en mercados no organizados (over-the counter market, OTC)
- Las opciones sobre divisas son usadas por las empresas para comprar un seguro cuando están expuestos al riesgo de tipos de cambio

El tipo de interés de la divisa

- Denotamos el tipo de interés de la divisa como r_f
- Cuando una empresa compra una unidad de divisa tiene una inversión S_0 euros
- La rentabilidad de invertir al tipo de interés de la divisa es $r_f S_0$ euros
- De manera que la divisa proporcionan una rentabilidad a la tasa $r_{f,}$ similar a los dividendos de las acciones

Valorar opciones europeas sobre divisas

- Una divisa es un activo que proporciona una rentabilidad continua por dividendos igual a r_f
- Podemos usar la fórmula para una opción sobre una acción que paga dividendos continuos:

Sea S_0 el actual tipo de cambio

Sea $q = r_f$

Fórmulas para opciones europeas sobre divisas

$$c = S_0 e^{-r_f T} N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2)$$

$$p = X e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-r_f T} N(-d_1)$$

donde $$d_1 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r - r_f + \sigma^2 / 2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r - r_f - \sigma^2 / 2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

Opciones europeas sobre divisas

- Valorar una opcion de compra europea a cuatro meses sobre dolares; tipo de cambio actual euro/dólar =0.911; precio ejercicio= 0.925; tipo libre de riesgo zona euro = 4%; tipo libre de riesgo USA= 5.5%; volatilidad tipo de cambio 20%

Valorar opciones europeas sobre futuros

- Podemos usar la fórmula para una opción sobre una acción para paga una rentabilidad continua por dividendo

  Sea S_0 el actual precio de futuro (F_0)

  Sea q el tipo de interés libre de riesgo (r)
- Estableciendo $q = r$ se asegura que el crecimiento esperado de F en un mundo neutral al riesgo es cero

La Fórmula de Black

- Las fórmulas para opciones europeas sobre contratos de futuros son:

$$c = e^{-rT}\left[F_0\ N(d_1) - X\ N(d_2)\right]$$

$$p = e^{-rT}\left[X\ N(-d_2) - F_0\ N(-d_1)\right]$$

donde $$d_1 = \frac{\ln(F_0 / X) + \sigma^2 T / 2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0 / X) - \sigma^2 T / 2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Opciones sobre futuro IBEX-35

- En opciones sobre futuros IBEX-35 la fecha de vencimiento de la opcion y del subyacente, coinciden por lo que el precio de futuro a vencimiento es el precio de contado del IBEX-35

Opcion europea sobre futuros

- Valorar opcion sobre el futuro IBEX-35 a tres meses; precio de futuro actual 9535, precio ejercicio 9600, volatilidad del precio del futuro 25%, r=4%

Resumen de los resultados clave

- Podemos tratar los índices de acciones, divisas y los contratos de futuro como una acción que paga una tasa de rentabilidad continua por dividendos de q
  - Para índices de acciones, q es la rentabilidad por dividendos media del índice a lo largo de la vida de la opción
  - Para divisas, $q = r_f$
  - Para futuros, $q = r$

Usar opciones sobre índices como seguro de cartera

- Suponga que el valor del índice es I_0 y el precio de ejercicio es X
- Si una cartera tiene una β de 1.0, el seguro de cartera se consigue comprando una opción de venta sobre el índice por cada $100I_0$ dólares mantenidos
- Si la β no es 1.0, el gestor de cartera comprará β opciones de venta por cada $100I_0$ dólares mantenidos
- En ambos casos, X es elegido para proporcionar el nivel adecuado de seguro

Ejemplo de seguro de cartera

- La cartera tiene una beta de 2.0
- Su valor actual es $1 millón y el índice está en 1000
- El tipo de interés libre de riesgo es 12% por año
- La rentabilidad por dividendos para ambos, la cartera y el índice, es 4%
- ¿Cuantas opciones de venta deberían comprarse para asegurar la cartera en 900.000 $? (vencimiento opcion =3 meses)

Numero de puts compradas

$$\mathbf{N}^{*} = \beta \, \frac{\mathbf{valor\ \ cartera}}{\mathbf{100 * valor\ indice}} =$$

$$= 2 * \frac{1000000}{100 * 1000} = 20$$

Determinar el Precio de Ejercicio

Valor del índice en 3 meses	Valor esperado de la cartera en 3 meses (millones $)
1,080	1.14
1,040	1.06
1,000	0.92
960	0.90
920	0.82

Una opción con precio de ejercicio de 960 proveerá protección contra una caída del 10% en el valor de la cartera

Calcular la relación entre el nivel del índice y el valor de la cartera en 3 meses

- Si el índice alcanza 1040, proporciona una rentabilidad del 4% en 3 meses
- La rentabilidad total (con dividendos) es 5%
- El exceso de rentabilidad sobre el tipo de interés libre de riesgo es 2%
- El exceso de rentabilidad de la cartera es 4%
- El incremento del valor de la cartera es 4+3-1=6%
- El valor esperado de la cartera es $1.06 millones