J.A. Oteo. Departamento de Física Teórica (UVEG).[MMF1-B:2010-11]

TEMA 4: Solución en serie de potencias de EDO. Funciones especiales

21 de diciembre de 2010

Resolver en serie de potencias las siguientes EDO lineales (determinar $y_1(z)$ e $y_2(z)$). Si no se indica lo contrario, desarrollar alrededor de $z_0 = 0$. Determinar el radio de convergencia de la serie, cuando sea posible.

1. `//Oteo//` $y'' + (3z + 2)y' + 8y = 0$ (hasta orden 6)
2. `//Oteo//` $y'' - 2zy' - 2y = 0$ (hasta orden 6)
3. `//Oteo//` $(1 + z^2)y'' + \lambda zy' + 2\lambda y = 0$. Valores de λ para los que la sol. es polinómica. Resolver hasta orden 5 con $\lambda = 6$.
4. `//Elena [Francisco]//` $\phi y'' + zy' = 0$, con ϕ real.
5. `//Miguel P. [Sebastián]//` $(z - 2)y'' - zy' + 4y = 0$ (hasta orden 5)
6. `//Arantxa [Juan]//` $2(z^2 + 3)y'' - 3zy' + y = 0$.

Funciones especiales

7. `//Oteo//` Conociendo la relación $\Gamma(1 - z)\Gamma(z) = \pi/\sin(\pi z)$ determinar el valor de $\Gamma(1/2)$ y $\Gamma(5/2)$.
8. `//Oteo//` Comprobar la relación de ortogonalidad entre armónicos esféricos:
$\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} [Y_l^m(\theta,\phi)]^*\ Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi)\, d\phi\, d(\cos\theta) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$,
utilizando $Y_1^0 = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_1^{\pm1} = \mp\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sin\theta\exp(\pm i\phi)$
9. `//Oteo//` Sabiendo $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, dar una expresión de $\Gamma(m/2)$ para m par e impar.
10. `//Oteo//` Hermite: Dada la fórmula de Rodrigues
$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2/2)\frac{d^n}{dx^n}\exp(x^2/2)$, determinar $H_4(x)$.
11. `//Francisco [Elena]//` Asociada de Legendre: Sabiendo que $P_1^1 = (1 - z^2)^{1/2}$, $P_2^1 = 3z(1 - z^2)^{1/2}$, obtener P_3^1 mediante la recurrencia $(l + 1 - m)P_{l+1}^m = (l + m + 2)zP_l^m - (l + 1)P_{l-1}^m$
12. `//Mireia [Josu]//` Evaluar $\int_0^\infty \sqrt{x^5}\exp(-x)\,dx$
13. `//Núria [Mario]//` Evaluar $\Gamma(15/2)$
14. `//Esther [Marina]//` Evaluar $\Gamma(17/2)$

15. `//Marina [Esther]//` Evaluar $\Gamma(21/2)$
16. `//Alberto [Miguel]//` Demostrar $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
17. `//Miguel [Alberto]//` Evaluar $\int_0^1 x^{9/2}(1-x)^3\, dx$
18. `//Pablo [Fernando]//` Evaluar $\beta(5/2, 2)$
19. `//Helena [Paula]//` Evaluar $(7/2)!\beta(3, 1/2)$
20. `//Paula [Helena]//` Evaluar $(-1/2)!\beta(3, 1)$
21. `//Samuel [Adrián]//` Evaluar $\beta(4, 3)/(\Gamma(3)\beta(7/2, 5/2))$
22. `//Adrián [Samuel]//` Calcular $\beta(m, n)$, $\beta(n, m)$ si $\Gamma(m + 2) = 6$ y $\Gamma(n) = \sqrt{\pi}$
23. `//Fernando [Pablo]//` Evaluar $\int_0^\infty x^7 \exp(-2x)\, dx$
24. `//Sebastián [Miguel P.]//` Evaluar $(-5/2)!$ y aproximar $100!$ mediante la fø'rmula de Stirling
25. `//Juan [Arantxa]//` $(-1/2)!\beta(3/2, 3)$
26. `//Josu [Mireia]//` Legendre: dada la frmula de Rodrigues

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l}(z^2 - 1)^l$$

y la relación de recurrencia $(n+1)P_{n+1} - (2n+1)zP_n + nP_{n-1} = 0$, calcula $P_5(z)$ de ambas maneras (datos $P_0 = 1, P_1 = z$).