J.A. Oteo. Departamento de Física Teórica (UVEG).[MMF1-B:2011-12]

TEMA 3: Solución en serie de potencias de EDO. Funciones especiales

9 de diciembre de 2011

Resolver en serie de potencias las siguientes EDO lineales (determinar $y_1(z)$ e $y_2(z)$). Si no se indica lo contrario, desarrollar alrededor de $z_0 = 0$. Determinar la relación de recurrencia para los coeficientes de la serie y el radio de convergencia de la serie, cuando sea posible

1. `//Oteo//` $y'' + (3z+2)y' + 8y = 0$ (hasta orden 6)
2. `//Oteo//` $y'' - 2zy' - 2y = 0$. Identificar una de las soluciones como: $y_1(z) = \exp z^2$. Verificarla por sustitución directa.
3. `//Oteo//` $(1+z^2)y'' + \lambda z y' + 2\lambda y = 0$. Valores de λ para los que la sol. es polinómica. Resolver hasta orden 5 con $\lambda = 6$.
4. `//Oteo//` $(1-z^2)y'' - 3zy' + \lambda y = 0$. Determinar para qué valores de λ una solución es un polinomio de grado N y hallarla para $N = 2,\ 3$.
5. `//Oteo//` Conociendo la relación $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \pi/\sin(\pi z)$ determinar el valor de $\Gamma(1/2)$ y $\Gamma(5/2)$.
6. `//Oteo//` Comprobar la relación de ortogonalidad entre armónicos esféricos:
   $\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} [Y_l^m(\theta,\phi)]^* \ Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi)\ d\phi\ d(\cos\theta) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$,
   utilizando $Y_1^0 = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sin\theta\exp(\pm i\phi)$
7. `//Oteo//` Sabiendo $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, dar una expresión de $\Gamma(m/2)$ para m par e impar.
8. `//Oteo//` Asociada de Legendre: Sabiendo que $P_1^1 = (1-z^2)^{1/2}$, $P_2^1 = 3z(1-z^2)^{1/2}$, obtener P_3^1 mediante la recurrencia $(l+1-m)P_{l+1}^m = (l+m+2)zP_l^m - (l+1)P_{l-1}^m$
9. `//Oteo//` Evaluar $\int_0^\infty \sqrt{x^5}\exp(-x)\,dx$
10. `//Oteo//` Evaluar $\int_0^1 x^{9/2}(1-x)^3\,dx$
11. `//Oteo//` Calcular $\beta(m,n)$, $\beta(n,m)$ si $\Gamma(m+2) = 6$ y $\Gamma(n) = \sqrt{\pi}$
12. `//Oteo//` Legendre: dada la fórmula de Rodrigues
   $$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dz^l}(z^2-1)^l$$
   y la relación de recurrencia $(n+1)P_{n+1} - (2n+1)zP_n + nP_{n-1} = 0$, calcula $P_4(z)$ de ambas maneras (datos $P_0 = 1, P_1 = z$).

13. `//Oteo//` Bessel: $z^2y'' + zy' + (z^2 - \frac{1}{4})y = 0$. Sabiendo que $J_{1/2}(z) = \sqrt{2/\pi z}\sin z$ y $J_{-1/2}(z) = \sqrt{2/\pi z}\cos z$, escribir la solución general $y(z)$.

14. `//Oteo//` Chebyshev: dada la fórmula de Rodrigues

$$T_n(z) = \frac{(-2)^n n!(1-z)^{1/2}}{(2n)!}\frac{d^n}{dz^n}(1-z^2)^{n-1/2}$$

determinar T_0, T_1, T_2.

15. `//Oteo//` Hermite: dada la fórmula de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2)\frac{d^n}{dx^n}(\exp(-x^2))$$

determinar H_0, H_1, H_2.

16. `//Oteo//` Hermite: conocida la relación de recurrencia $H_{n+1}(z) = 2zH_n(z) - 2nH_{n-1}(z)$, y la solución del problema anterior, determinar H_3.