ÀLGEBRA I GEOMETRIA I

Grau de Física. Universitat de València

Qüestions 2. **Estructures algebraiques**

1. En el cos dels nombres reals, amb les operacions usuals de suma i producte, es considera el subconjunt: $\mathbf{S} = \left\{a + 2^{1/3}b \text{ tals que } a, b \in \mathbb{Z}\right\}$. Indica quina de les afirmacions següents és **incorrecta**.

   - ☐ La llei suma és interna en $\mathbf{S}$.
   - ☐ La llei producte és interna en $\mathbf{S}$.
   - ☐ $-a - 2^{1/3}b$ és l'element simètric de $a + 2^{1/3}b$ respecte de la suma.
   - ☐ L'element neutre respecte de la llei producte és 1.

2. Considera el grup dels nombres complexos amb el producte usual. Indica quin dels següents subconjunts té estructura de grup:

   - ☐ El conjunt dels nombres enters no nuls.
   - ☐ El conjunt dels nombres imaginaris purs.
   - ☐ El conjunt de tots els nombres complexos de mòdul igual a 1.
   - ☐ El conjunt de tots els nombres complexos de mòdul igual a 2.

3. Marca la sentència que **no és necessària** per a que $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ siga un subgrup del grup $(\mathbf{E}, *)$:

   - ☐ L'element neutre $e$, està en $\mathbf{F}$.
   - ☐ $\forall a \in \mathbf{F}$, $a^{-1} \in \mathbf{F}$.
   - ☐ $\forall a, b \in \mathbf{F}$, $a * b = b * a$.
   - ☐ $\forall a, b \in \mathbf{F}$, $a * b^{-1} \in \mathbf{F}$.

4. Considera el grup $(\mathbb{Z}, +)$ dels nombres enters, el grup de les parelles d'enters, $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ amb la llei suma de parelles $(x, x') + (y, y') = (x + x', y + y')$, i les aplicacions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (x, y) & \longrightarrow & x - y \end{array} \qquad\qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ x & \longrightarrow & (x, -x). \end{array}$$

   Si $\mathbf{N}(f)$ i $\mathbf{Im}(f)$ (respectivament, $\mathbf{N}(g)$ i $\mathbf{Im}(g)$) representen el nucli i la imatge de l'aplicació $f$ (respectivament, $g$), marca la resposta **incorrecta**:

   - ☐ $\mathbf{N}(f) = \{(x, x) \ / \ x \in \mathbb{Z}\}$.
   - ☐ $\mathbf{Im}(g) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   - ☐ $\mathbf{Im}(f) = \mathbb{Z}$.
   - ☐ $\mathbf{N}(g) = \{0 \in \mathbb{Z}\}$.

5. Siga $f$ un homomorfisme entre els grups $(\mathbf{F}, *)$ i $(\mathbf{G}, \perp)$. Indica quina de les propietats següents és **incorrecta**:

- [ ] El nucli de $f$ és un subgrup de $(\mathbf{F}, *)$.
- [ ] Si $a, b \in \mathbf{F}$, $f(a * b) = f(a) \perp f(b)$.
- [ ] La imatge de $f$ és un subgrup de $(\mathbf{G}, \perp)$.
- [ ] $f^{-1}$ existeix i és un homomorfisme de $(\mathbf{G}, \perp)$ en $(\mathbf{F}, *)$.

6. Considera l'anell $(\mathbf{G}, +, \cdot)$, format pel conjunt $\mathbf{G} = \{a + b\sqrt{3} \ / \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ amb les operacions suma i producte usuals de nombres reals. Marca la resposta **correcta**:

- [ ] $(\mathbf{G}, +, \cdot)$ és un anell unitari i commutatiu.
- [ ] $(\mathbf{G}, +, \cdot)$ és un anell unitari però no commutatiu.
- [ ] $(\mathbf{G}, +, \cdot)$ és un anell commutatiu però no unitari.
- [ ] $(\mathbf{G}, +, \cdot)$ és un anell no unitari i no commutatiu.

7. En $\mathbb{Z}$ es consideren les operacions $\perp$ i $*$, definides en funció de la suma i el producte usuals d'enters de la següent forma: $x \perp y = x + y + 1$, $x * y = x + y + nxy$, on $x$ i $y$ són elements de $\mathbb{Z}$ i $n$ és un nombre natural arbitrari. Resulta que $(\mathbb{Z}, \perp)$ té estructura de grup abelià. A més, $(\mathbb{Z}, \perp, *)$ és anell:

- [ ] sols per a $n = 0$.
- [ ] sols per a $n = 1$.
- [ ] sols per a $n \neq 0$.
- [ ] $\forall n$.

8. Considera el conjunt $\mathbb{Z}$ dels nombres enters, el conjunt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ i les aplicacions

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & (x, y) & \longrightarrow & x - y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rccc} g : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ & x & \longrightarrow & (x, x). \end{array}$$

Marca la resposta **correcta**:

- [ ] $(f \circ g)(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.
- [ ] $g$ és suprajectiva.
- [ ] $(f \circ g)$ és injectiva.
- [ ] $(f \circ g)$ és suprajectiva.

9. Marca la sentència **incorrecta**:

- [ ] Tota permutació es pot descompondre en producte de transposicions disjuntes.
- [ ] El nombre de transposicions en què se descompon una permutació és sempre parell o sempre imparell.
- [ ] La signatura d'un producte de dues transposicions és sempre $+1$.
- [ ] La signatura d'un cicle de $p$ elements és $+1$ si $p$ és imparell i $-1$ si $p$ és parell.

10. Marca quin dels següents productes de transposicions **no és equivalent** als altres tres:

- [ ] $(3\,4)(3\,6)(1\,7)(1\,2)(5\,8)$.
- [ ] $(5\,8)(6\,4)(6\,3)(1\,7)(1\,2)$.
- [ ] $(4\,6)(4\,3)(7\,2)(8\,5)(1\,7)$.
- [ ] $(6\,3)(4\,6)(5\,8)(1\,2)(2\,7)$.

11. Siga $\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,3\,1\,6\,5\,4 \end{pmatrix}$. Aleshores,

- [ ] $\sigma^{21} = \sigma$.
- [ ] $\sigma^{21} = \sigma^{-1}$.
- [ ] $\sigma^{21} = \mathcal{I}$ (permutació identitat).
- [ ] $\sigma^{21} = (4\,6)$.

12. Indica quina igualtat **no és correcta**:

- [ ] $\varepsilon_{1234} - \varepsilon_{2341} = 0$.
- [ ] $\varepsilon_{2342} + \varepsilon_{2143} + \varepsilon_{2341} = 0$.
- [ ] $\varepsilon_{3124} + \varepsilon_{4312} = 0$.
- [ ] $\varepsilon_{4321} = 1$.