Àlgebra i Geometria I

Grau de Física. Universitat de València

Qüestions 3. **Espais vectorials**

1. A l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$, amb les lleis suma de parelles i producte per un escalar usuals, marca quin del següents subconjunts té estructura de subespai vectorial:

   - ☐ $\{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^1 + x^2 = 0\}$.
   - ☐ $\{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^1 x^2 = 0\}$.
   - ☐ $\{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^1 + x^2 = 1\}$.
   - ☐ $\{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^1 x^2 = 1\}$.

2. Considera els vectors de $\mathbb{R}^4$ $\{(1,\, 0,\, -1,\, 2),\, (1,\, 1,\, 0,\, -1)\},\, (3,\, 1,\, -2,\, 3)\}$. Marca el subespai que generen:

   - ☐ $\{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x^1 - x^2 + x^3 = 0\}$.
   - ☐ $\{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x^2 + 2x^3 + x^4 = 0\}$.
   - ☐ $\{(x^1,\, x^2,\, x^3,\, x^4) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x^1 - x^2 + x^3 = 0,\ x^2 + 2x^3 + x^4 = 0\}$.
   - ☐ $\{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x^1 - x^2 - x^3 = 0,\ x^2 + 2x^3 - x^4 = 0\}$.

3. Siga $\mathbf{S} = \{v_1,\, v_2, \ldots, v_p\}$ un sistema de vectors d'un espai vectorial $\mathbf{E}$ de dimensió finita. Marca la sentència **incorrecta**:

   - ☐ Si $\mathbf{E}$ està generat per $\mathbf{S}$, aleshores $p \geq \dim \mathbf{E}$.
   - ☐ Si $p > \dim \mathbf{E}$, aleshores $\mathbf{S}$ és lligat.
   - ☐ Si $\mathbf{S}$ és lliure, aleshores $p = \dim \mathbf{E}$.
   - ☐ Si $\mathbf{E}$ està generat per $\mathbf{S}$ i $p = \dim \mathbf{E}$, aleshores $\mathbf{S}$ és lliure.

4. Donat el conjunt de vectors de $\mathbb{R}^3$ $\{(-\alpha, \alpha, 0), (\beta, \beta, \alpha), (1, 1, \beta)\}$, on α i β són dos nombres reals, indica per a quin valor o valors d'α i β el sistema de vectors és linealment independent.

   - ☐ Sols per a $\alpha \neq 0$.
   - ☐ Sols per a $\beta \neq \pm\sqrt{\alpha}$ i $\alpha \neq 0$.
   - ☐ Sols per a $\alpha = \beta = 0$.
   - ☐ Sols per a $\alpha \neq \beta$ i $\alpha \neq -1$.

5. Considera l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ i els vectors $v_1 = (1,2,1)$ i $v_2 = (2,1,-1)$. Elegeix un dels següents vectors per a completar una base de $\mathbb{R}^3$:

   - ☐ $(0,1,1)$.
   - ☐ $(1,1,0)$.
   - ☐ $(-1,0,1)$.
   - ☐ $(1,0,1)$.

6. Considera l'espai vectorial dels polinomis de grau menor o igual que dos amb coeficients reals:

$$\mathbf{P_2} = \left\{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \;\; a_i \in \mathbb{R} \right\} ,$$

   i siguen $v_1(x) = 1 + 2x + x^2$ i $v_2(x) = 2 + x - x^2$. Elegeix un dels següents vectors per a completar una base de $\mathbf{P_2}$:

   - ☐ $x + x^2$.
   - ☐ $-1 + x^2$.
   - ☐ $1 + x^2$.
   - ☐ Els polinomis $v_1(x)$ i $v_2(x)$ ja formen una base de $\mathbf{P_2}$.

7. Donat el conjunt de vectors de $\mathbb{R}^3$ $\{(2,\alpha,-2),(\alpha,1,\alpha),(1,\alpha,1)\}$, on α és un nombre real arbitrari, indica per a quins valors d'α aquest conjunt és una base:

   - ☐ Per a $\alpha = \pm 1$.
   - ☐ Per a $\alpha \neq 0$.
   - ☐ Per a $\alpha \neq \pm 1$.
   - ☐ Per a qualsevol valor d'α.

8. A l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$, considera el conjunt de vectors: $\mathbf{S} = \{(1,1,1),(\alpha,\beta,\gamma),(1,1,-1)\}$, on α, β i γ són nombres reals arbitraris. Indica per a quins valors d'α, β i γ el conjunt $\mathbf{S}$ és una base de $\mathbb{R}^3$.

   - ☐ $\alpha = b$, γ arbitrari.
   - ☐ $\gamma = \beta$, a arbitrari.
   - ☐ $\alpha \neq \beta$, γ arbitraris.
   - ☐ El conjunt $\mathbf{S}$ no és una base de $\mathbb{R}^3$ per a ningun valor d'α, β i γ.

9. Siga $\mathbf{S} = \{u_i\}_{i=1}^{p}$ un sistema arbitrari de vectors d'un espai vectorial $\mathbf{E}$ de dimensió finita. Marca quina de les següents proposicions és **correcta**.

- ☐ Si $p > \dim \mathbf{E}$, aleshores $\mathbf{S}$ és sempre generador d'$\mathbf{E}$.
- ☐ Si $p < \dim \mathbf{E}$, aleshores S no és generador d'$\mathbf{E}$.
- ☐ Si $p = \dim \mathbf{E}$, aleshores $\mathbf{S}$ és base d'$\mathbf{E}$.
- ☐ Si $\mathbf{S}$ és lliure, aleshores $p = \dim \mathbf{E}$.

10. En la base canònica, un vector de l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ té components $v = (2, 3, -1, -2)$. En la base formada pel conjunt ordenat de vectors $\{(0, 1, 0, 0),\ (1, 1, 0, 0),\ (0, 0, 1, 1),\ (0, 0, 0, 1)\}$ les components del vector v són:

- ☐ $v = (1,\ -1,\ 2,\ 1)$.
- ☐ $v = (1,\ 2,\ -1,\ -1)$.
- ☐ $v = (2,\ 1,\ -1,\ -1)$.
- ☐ $v = (3,\ 5,\ -3,\ -2)$.

11. Siga $\mathbf{B} = \{-1 + x + x^2,\ 1 - x + x^2,\ 1 + x - x^2\}$ una base de l'espai vectorial dels polinomios reals de grau menor o igual que dos. En la base $\mathbf{B}$, el polinomi $p(x) = 1$ té components:

- ☐ $(1,\ 0,\ 0)$.
- ☐ $(0,\ 1/2,\ 1/2)$.
- ☐ $(1/2,\ 0,\ 1/2)$.
- ☐ $(-1,\ 0,\ -1)$.

12. En l'espai vectorial $\mathbf{R}^4$ es defineix l'operador lineal $\mathcal{A}$ segons l'expressió:

$$\mathcal{A}(x^1, x^2, x^3, x^4) \;=\; (a\, x^1,\ x^1 + x^2,\ x^1 + x^2 + x^3,\ x^1 + x^2 + x^3 + x^4),$$

on a és un nombre real arbitrari. Indica la resposta **correcta** relativa al caràcter de l'aplicació:

- ☐ L'aplicació és suprajectiva si $a \neq 0$.
- ☐ El nucli de l'aplicació és trivial si $a = 0$.
- ☐ L'aplicació és suprajectiva si $a = 0$.
- ☐ L'aplicació és injectiva $\forall\, a$.

13. Siga $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}'$ una aplicació lineal entre els espais vectorials de dimensió finita $\mathbf{E}$ i $\mathbf{E}'$. Marca la resposta **incorrecta**:

- ☐ Si f és injectiva, aleshores $\dim \mathbf{Im}(f) = \dim \mathbf{E}$.
- ☐ Si f és sobrejectiva, aleshores $\dim \mathbf{Im}(f) = \dim \mathbf{E}$.
- ☐ Si f és sobrejectiva, aleshores $\dim \mathbf{N}(f) = \dim \mathbf{E} - \dim \mathbf{E}'$.
- ☐ Si f és injectiva, aleshores $\dim \mathbf{N}(f) = 0$.

14. Siguen $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ subespais de l'espai vectorial $\mathbf{E}$, tals que $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = \mathbf{F_2}$. Aleshores:

- ☐ $\mathbf{F_1} = \{0\}$.
- ☐ $\mathbf{F_1} \subseteq \mathbf{F_2}$.
- ☐ $\mathbf{F_2} = \mathbf{E}$.
- ☐ $\mathbf{F_1} \cap \mathbf{F_2} = \mathbf{F_2}$.

15. A l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ es defineixen els subespais:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} &= \left\{(x^1, x^2, x^3, x^4) \mid x^1 + x^2 - x^3 = 0,\ x^1 - x^4 = 0\right\}. \\
\mathbf{V} &= \langle\{(1,0,2,-1),\ (0,1,0,0),\ (1,-1,0,1),\ (1,0,1,0)\}\rangle.
\end{aligned}$$

Marca la resposta **incorrecta**:

- ☐ $\dim \mathbf{U} = 2$.
- ☐ $\dim \mathbf{V} = 3$.
- ☐ $\mathbf{U}$ està generat pel sistema de vectors: $\{(1,0,1,1),\ (0,1,1,0)\}$.
- ☐ $\mathbf{V} = \left\{(x^1, x^2, x^3, x^4) \mid x^1 - x^3 - x^4 = 0,\ x^1 - x^4 = 0\right\}$.

16. Considera els subespais vectorials:

$$\mathbf{F_1} = \left\{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^1 + 2x^2 - x^3 = 0\right\}, \qquad \mathbf{F_2} = \langle\{(2,1,3)\}\rangle,$$

de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$. Els subespais suma, $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$, i intersecció, $\mathbf{F_1} \cap \mathbf{F_2}$, són respectivament:

- ☐ $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = \mathbf{F_1}$, $\quad \mathbf{F_1} \cap \mathbf{F_2} = \mathbf{F_2}$.
- ☐ $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = \mathbf{R^3}$, $\quad \mathbf{F_1} \cap \mathbf{F_2} = \mathbf{F_2}$.
- ☐ $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = \mathbf{F_1}$, $\quad \mathbf{F_1} \cap \mathbf{F_2} = \{0\}$.
- ☐ $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = \mathbf{R^3}$, $\quad \mathbf{F_1} \cap \mathbf{F_2} = \{0\}$.