ÀLGEBRA I GEOMETRIA II

Grau de Física. Universitat de València

Butlletí 1. *Matrius, determinants i equacions lineals*

1.– Calcula els productes de matrius segents:

(i) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}^3$

[*Sol.: (i)* $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, *(ii)* $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$, *(iii)* $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$, *(iv)* $\begin{pmatrix} 119 & 54 \\ 205 & 93 \end{pmatrix}$, *(v)* $\begin{pmatrix} 337 & 246 \\ 574 & 419 \end{pmatrix}$]

2.– S'anomena traça d'una matriu quadrada a la suma dels elements de la seua diagonal principal. Demostra que la traça de $\mathbf{AB}$ és igual a la traça de $\mathbf{BA}$.

3.– Com canvia el producte $\mathbf{AB}$ de les matrius $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ si:

(i) es permuten la i-èsima i j-èsima files de la matriu $\mathbf{A}$,

(ii) a la i-èsima fila de la matriu $\mathbf{A}$ li sumem la j-èsima fila multiplicada per un escalar c,

(iii) es permuten la i-èsima i j-èsima columnes de la matriu $\mathbf{B}$,

(iv) a la i-èsima columna de la matriu $\mathbf{B}$ li sumem la j-èsima columna multiplicada per un escalar c?

[*Sol.: (i) les files i-èsima i j-èsima es permuten en la matriu producte, (ii) la i-èsima fila de la matriu producte passa a ser la i-èsima fila del producte original més la j-èsima multiplicada per c, (iii) les columnes i-èsima i j-èsima es permuten en la matriu producte, (iv) la i-èsima columna de la matriu producte passa a ser la i-èsima columna del producte original més la j-èsima multiplicada per c*]

4.– Demostra que per qualsevol matriu $\mathbf{B}$, la matriu $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{B}^\mathsf{T}$ és simètrica.

5.– Demostra les següents propietats de les matrius adjuntes:

(i) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\dagger = \mathbf{A}^\dagger + \mathbf{B}^\dagger$ (ii) $(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger$ (iii) $(c\mathbf{A})^\dagger = c^*\mathbf{A}^\dagger$

6.– Demostra que el producte de dues matrius ortogonals (unitàries) és una matriu ortogonal (unitària).

7.– Troba les matrius inverses de les següents matrius:

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ (vi) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

[*Sol.: (i)* $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, *(ii)* $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -6 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, *(iii)* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *(iv)* $-\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$,
(v) $-\begin{pmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, *(vi)* $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$]

8.– Demostra que la matriu inversa d'una matriu simètrica (antisimètrica) no singular, és simètrica (antisimètrica).

9.– Calcula els següents determinants:

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 12 & -6 & 9 \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n \\ n & 2 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & \dots & n \end{vmatrix}$ (v) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 \end{vmatrix}$ (vi) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n & n & \dots & n & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}$

[*Sol.: (i)* -240, *(ii)* -198, *(iii)* -2, *(iv)* $(-1)^{n-1}n!$, *(v)* $n!$, *(vi)* $(-1)^{n(n-1)/2}n$]

10.– Esbrina el signe amb el qual apareixen els següents productes en els determinants corresponents:

(i) $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$ (ii) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$ (iii) $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$ (iv) $a_{12}a_{23}\dots a_{n-1,n}a_{n1}$

[*Sol.: (i)* -1, *(ii)* $+1$, *(iii)* $+1$, *(iv)* $(-1)^{n-1}$]

11.– Troba el rang de les següents matrius:

(i) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

[*Sol.: (i)* 2, *(ii)* 3]

12.– Discuteix el rang de les següents matrius en funció dels valors del paràmetre real λ:

(i) $\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ \lambda & -1 & 3 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$

[*Sol.: (i) rang* 2 *si* $\lambda = 2$, *rang* 3 *si* $\lambda \neq 2$, *(ii) rang* 2 *si* $\lambda = 3$, *rang* 3 *si* $\lambda \neq 3$, *(iii) rang* 1 *si* $\lambda = 1$, *rang* 3 *si* $\lambda \neq 1$]

13.– Resol els següents sistemes d'equacions per la regla de Cramer:

(i) $$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 1x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3 \end{aligned}$$

[*Sol.: (i)* $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -1$, *(ii)* $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$]

14.– Analitza en funció del paràmetre real i resol, si escau, els següents sistemes d'equacions lineals:

(i) $$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= \lambda^2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ 6x_1 - x_2 + x_3 &= 3\lambda \end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned} 2x_1 - \lambda x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 &= 0 \\ \lambda x_1 - x_2 + 13x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(iii) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 1 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

[*Sol.: (i) sistema incompatible si* $\lambda \neq 2$, *sistema compatible determinat si* $\lambda = 2$ *(*$x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$*), (ii) sistema compatible determinat si* $\lambda \neq -12/7, 3$ *(*$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$*), sistema compatible indeterminat si* $\lambda = -12/7, 3$ *(*$x_1 = -\frac{24+7\lambda}{10}x_2$, x_2 *arbitrari,* $x_3 = -\frac{2+\lambda}{10}x_2$*), (iii) sistema compatible determinat si* $\lambda \neq -2, 1$ *(*$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2+\lambda}$*), sistema compatible indeterminat si* $\lambda = 1$ *(*$x_1 = 1 - x_2 - x_3$, x_2, x_3 *arbitraris), sistema incompatible si* $\lambda = -2$]

15.– Analitza en funció dels paràmetres reals a i b i resol, si escau, el sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 - bx_2 - bx_3 &= 0 \\ x_1 - 2ax_2 + 2ax_3 &= 0 \\ x_1 - (6a-b)x_2 + (6a-b)x_3 &= 0 \end{aligned}$$

[*Sol.: sistema compatible determinat si* $b \neq 0$, $a \neq b/4$ *(*$x_1 = x_2 = x_3 = 0$*), sistema compatible indeterminat si* $b \neq 0$, $a = b/4$ *(*$x_1 = 2ax_2$, x_2 *arbitrari,* $x_3 = 0$*), sistema compatible indeterminat si* $b = 0$, $a \neq 0$ *(*$x_1 = 0$, $x_2 = x_3$, x_3 *arbitrari), sistema compatible indeterminat si* $b = 0$, $a = 0$ *(*$x_1 = 0$, x_2, x_3 *arbitraris)*]