ÀLGEBRA I GEOMETRIA II

Grau de Física. Universitat de València

Butlletí 2. *Operadors lineals*

1.– Estudia, segons el valor del paràmetre real λ, el rang $(\dim(\mathbf{Im}(\mathcal{A})))$ de l'operador

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}:\mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longrightarrow & (x-y+\lambda z, x+\lambda y - z, -\lambda x + y + z)) \end{array}$$

[*Sol.: si* $\lambda=-1$, $\dim(\mathbf{Im}(\mathcal{A}))=2$*; si* $\lambda\neq -1$, $\dim(\mathbf{Im}(\mathcal{A}))=3$]

2.– Determina els valors del paràmetre real λ per als quals l'operador lineal $\mathcal{A}:\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbf{R}^3$ definit per

$$\mathcal{A}(x,y,z)=(3x+4y+z, 2x+6y+3z, x+3y+\lambda z)$$

és invertible.

[*Sol.:* $\lambda\neq 3/2$]

3.– Siga $\mathcal{A}$ l'operador lineal de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^3$ definit per $\mathcal{A}(x,y)=(2x-y,x+y,x-y)$.

(i) Troba la seua representació matricial, $\mathbf{A}$, en les bases canòniques de $\mathbf{R}^2$ i $\mathbf{R}^3$.

(ii) Siguen les bases $\mathbf{B}=\{(1,1),(1,0)\}$ de $\mathbf{R}^2$ i $\mathbf{B}'=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ de $\mathbf{R}^3$. Troba la representació matricial, $\mathbf{A}$, de l'operador $\mathcal{A}$ en aquestes bases directament i a partir de la matriu en les bases canòniques mitjançant un canvi de base.

[*Sol.: (i)* $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, *(ii)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$]

4.– Obtín els operadors adjunts dels segents operadors lineals.

(i) $\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_\alpha:\mathbf{E} & \longrightarrow & \mathbf{E} \\ v & \longrightarrow & \alpha\, v \end{array}$ on $\mathbf{E}$ és un espai vectorial real i α un nombre real.

(ii) $\begin{array}{rcl} \mathcal{A}:\mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \longrightarrow & z \end{array}$ (iii) $\begin{array}{rcl} \mathcal{A}:\mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \longrightarrow & (x-y,x-z) \end{array}$

(iv) $\begin{array}{rcl} \mathcal{A}:\mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longrightarrow & (2x-z,y+z,x) \end{array}$

[*Sol.: (i)* $\mathcal{A}^\dagger_\alpha = \mathcal{A}_\alpha$, *(ii)* $\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^\dagger : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ x & \longrightarrow & (0,0,x) \end{array}$, *(iii)* $\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^\dagger : \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \longrightarrow & (x+y,-x-y) \end{array}$,

(iv) $\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^\dagger : \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longrightarrow & (2x+z,y,-x+y) \end{array}$]

5.– Obtín l'adjunt de l'operador lineal $\mathcal{A}$ definit per

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} : \mathbf{C}^2 & \longrightarrow & \mathbf{C}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & (2x+(1-i)y,(3+2i)x-y) \end{array}$$

[*Sol.:* $\mathcal{A}^\dagger : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^2$, $\mathcal{A}(x,y) = (2x+(3-2i)y,(1+i)x-y)$]

6.– Siga $\mathcal{A} : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ un operador lineal. Un subespai $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ es diu invariant sota $\mathcal{A}$ si $\mathcal{A}\,v \in \mathbf{F}$, $\forall\, v \in \mathbf{F}$. Prova que, si $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ és invariant sota $\mathcal{A}$, $\mathbf{F}^\perp$ és invariant sota $\mathcal{A}^+$.

7.– Siga $\mathcal{A}$ un operador lineal a l'espai vectorial $\mathbf{E}$. Prova que els operadors $\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger$, $\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}$, $\mathcal{A}+\mathcal{A}^\dagger$ són autoadjunts.

8.– Considera els operadors lineals $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ a l'espai vectorial $\mathbf{C}^2$ definits per:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} : \mathbf{C}^2 & \longrightarrow & \mathbf{C}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & (x+y,ix+(3+2i)y) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} : \mathbf{C}^2 & \longrightarrow & \mathbf{C}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & (x+iy,y) \end{array}$$

Comprova si són normals.

[*Sol.: $\mathcal{A}$ és normal, $\mathcal{B}$ no*]

9.– Considera els operadors lineals $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ a l'espai vectorial $\mathbf{R}^2$ definits per:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} : \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \end{array}$$

amb $0 \le \theta \le 2\pi$,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} : \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & (x,-y) \end{array}$$

Comprova que són unitaris.