ÀLGEBRA I GEOMETRIA II

Grau de Física. Universitat de València

Butlletí 3. *Teoria espectral*

1.– Considera les matrius (i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Compara els seus polinomis característics, valors propis i subespais propis.

[*Sol.: (i) polinomi característic:* $(1-\lambda)^2 = 0$; *valors propis:* $\lambda = 1$ *(doble); subespais propis:* $\mathbf{L}_\lambda = \mathbf{R}^2$, *(ii) polinomi característic:* $(1-\lambda)^2 = 0$; *valors propis:* $\lambda = 1$ *(doble); subespais propis:* $\mathbf{L}_\lambda = \langle(1,0)\rangle$]

2.– Estudia la diagonalitzabilitat en $\mathbf{R}$ dels operadors lineals següents:

(i) $\mathcal{A}(x,y,z) = (x+y+3z, x+y-3z, 3x-3y-3z)$

(ii) $\mathcal{B}(x,y,z) = (x+3z, -2y, 3x+z)$

(iii) $\mathcal{C}(x,y,z,t) = (2x+3y-4z-4t, x, y, z)$

(iv) $\mathcal{D}(x,y,z,t) = (\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y, \frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y, -2z-t, -z-2t)$

(v) $\mathcal{E}(x,y,z) = (3x+2y+2z, 2x+2y, 2x+4z)$

(vi) $\mathcal{F}(x,y,z,t) = (-x-2y+3z+2t, y+t, -2x-2y+4z+2t, 2t)$.

[*Sol.:*]

3.– Estudia, en funció del paràmetre real a, la diagonalitzabilitat en $\mathbf{R}$ de les matrius:

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[*Sol.: (i) diagonalitzable si* $a = 0$: *valors propis:* $\lambda_1 = 1$ *(doble),* $\lambda_2 = 2$; *subespais propis:* $\mathbf{L}_1 = \langle(1,0,-1),(0,1,-1)\rangle$, $\mathbf{L}_2 = \langle(0,0,1)\rangle$, *(ii) diagonalitzable* $\forall a$: *cas* $a = 0$: *valors propis:* $\lambda = 1$ *(triple); subespais propis:* $\mathbf{L}_\lambda = \mathbf{R}^3$; *cas* $a \neq 0$: *valors propis:* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1-a$, $\lambda_3 = 1+a$; *subespais propis:* $\mathbf{L}_1 = \langle(0,1,0)\rangle$, $\mathbf{L}_2 = \langle(1,0,-1)\rangle$, $\mathbf{L}_3 = \langle(1,0,1)\rangle$]

4.– Estudia, en funció del paràmetre real a, la diagonalitzabilitat en $\mathbf{R}$ i en $\mathbf{C}$ de la matriu

$$\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

.

[*Sol.: diagonalitzable* $\forall a$*: cas* $a = n\pi$ *(*$n = 0$*, o parell): valors propis:* $\lambda = 1$ *(doble); subespais propis:* $\mathbf{L}_\lambda = \mathbf{R}^2$*; cas* $a = n\pi$ *(*n *senar): valors propis:* $\lambda = -1$ *(doble); subespais propis:* $\mathbf{L}_\lambda = \mathbf{R}^2$*; resta de casos: valors propis:* $\lambda_\pm = e^{\pm ia}$*; subespais propis:* $\mathbf{L}_\pm = \langle(1, \pm i)\rangle$]

5.– Estudia, en funció dels paràmetres reals a, b i c, la diagonalitzabilitat en $\mathbf{R}$ de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

.

[*Sol.: diagonalitzable si* $a = 0$, $c \neq 1$, $\forall b$*: valors propis:* $\lambda_1 = 1$ *(doble),* $\lambda_2 = c$*; subespais propis:* $\mathbf{L}_1 = \langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle$, $\mathbf{L}_2 = \langle(\frac{1}{c-1}, \frac{b}{c-1}, 1)\rangle$]

6.– Dóna una condició necessària i suficient per a que la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

siga diagonalitzable en $\mathbf{R}$.

[*Sol.: la matriu és diagonalitzable si* $a = 0$ *i* $f = 0$]

7.– Diagonalitza ortogonalment, si és possible, en $\mathbf{R}$ o en $\mathbf{C}$, les matrius següents:

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (vi) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (vii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (viii) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

[*Sol.: (i) valors propis:* $\lambda_k = e^{i2\pi k/5}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$; *subespais propis:* $\mathbf{L}_k = \langle(1, \lambda_k, \lambda_k^2, \lambda_k^3, \lambda_k^4)\rangle$, *base ortonormal de vectors propis:* $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1, \lambda_k, \lambda_k^2, \lambda_k^3, \lambda_k^4)\}_{k=0}^4$, *(ii) no diagonalitzable, (iii) valors propis:* $\lambda_1 = 2$ *(doble),* $\lambda_2 = 4$; *subespais propis:* $\mathbf{L}_1 = \langle(1, 1, 0), (0, 0, 1)\rangle$, $\mathbf{L}_2 = \langle(1, -1, 0)\rangle$; *base ortonormal de vectors propis:* $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), (0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)\}$, *(iv) valors propis:* $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2i$, $\lambda_3 = -2i$; *subespais propis:* $\mathbf{L}_1 = \langle(1, 0, 1)\rangle$, $\mathbf{L}_2 = \langle(i, 1, -i)\rangle$, $\mathbf{L}_3 = \langle(-i, 1, i)\rangle$; *no diagonalitzable ortogonalment, (v) valors propis:* $\lambda_1 = -2$ *(doble),* $\lambda_2 = 1$; *subespais propis:* $\mathbf{L}_1 = \langle(1, -2, 1), (1, 0, -1)\rangle$, $\mathbf{L}_2 = \langle(1, 1, 1)\rangle$; *base ortonormal de vectors propis:* $\{\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\}$, *(vi) no diagonalitzable, (vii) valors propis:* $\lambda_1 = -1$ *(triple),* $\lambda_2 = 3$; *subespais propis:* $\mathbf{L}_1 = \langle(1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)\rangle$, $\mathbf{L}_2 = \langle(1, 1, 1, 1)\rangle$; *base ortonormal de vectors propis:* $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 0, -1), \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, -3, 1), \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)\}$, *(viii) valors propis:* $\lambda_1 = -2$ *(doble),* $\lambda_2 = 7$; *subespais propis:* $\mathbf{L}_1 = \langle(1, 0, -1), (0, 1, -1)\rangle$, $\mathbf{L}_2 = \langle(1, 1, 1)\rangle$; *base ortonormal de vectors propis:* $\{\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\}$]

8.– Considera la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcula:

(i) la seua potència n-èsima.

(ii) el sinus de la matriu.

[*Sol.: (i)* $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, *amb* $a = \dfrac{7^n + 4(-2)^n}{3}$, $b = \dfrac{7^n + (-2)^n}{3}$,

(ii) $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, *amb* $a = \dfrac{\sin 7 + 4\sin(-2)}{3}$, $b = \dfrac{\sin 7 + \sin(-2)}{3}$]

9.– Troba una matriu $\mathbf{B}$ complexa tal que

$$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[*Sol.:* $\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$, *amb* $a = \dfrac{\sqrt{3}+3i}{4}$, $b = \dfrac{\sqrt{3}-i}{4}$]

10.– Considera la matriu $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ com la representació matricial d'un projector en un cert subespai, $\mathbf{L}$, de $\mathbf{R}^2$.

(i) Defineix una matriu que projecte en el subespai ortogonal, $\mathbf{L}^{\perp}$.

(ii) Defineix un operador normal $\mathcal{A}$: $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ que tinga com a subespais propis $\mathbf{L}$ i $\mathbf{L}^{\perp}$ i com a valors propis 1 i -1 respectivament.

[*Sol.: (i)* $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, *(ii)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$]