ÀLGEBRA I GEOMETRIA II

Grau de Física. Universitat de València

Butlletí 4. *Espai afí*

1.– Siga $\mathbf{E}_2$ un espai afí de dimensió 2 sobre el cos dels nombres reals. Siguen $S(O;\mathbf{B})$ i $S'(O';\mathbf{B}')$ dos sistemes de referència de manera que les coordenades de O' en S són $(1,1)$. Si els punts $P,Q\in\mathbf{E}_2$ tenen coordenades $(0,1)$ i $(1,0)$ en S i $(2,3)$, $(-1,1)$ en S', respectivament, calcula

(i) la matriu de canvi de la base $\mathbf{B}$ a la $\mathbf{B}'$,

(ii) les coordenades en S' d'un punt les coordenades del qual són $(2,3)$ en S.

[*Sol.: (i)* $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, *(ii)* $(0,-5)$]

2.– Siga $\mathbf{E}_3$ un espai afí euclidià de dimensió 3 sobre l'espai vectorial $\mathbf{R}^3$. Siga $S(O;\mathbf{B})$ un sistema de referència rectangular on $\mathbf{B}=\{|e_1\rangle,|e_2\rangle,|\,e_3\rangle\}$ és una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$. Les coordenades del punt $P\in\mathbf{E}_3$ en S són $(1,1,1)$.

(i) Escriu les coordenades de P en el sistema de referència $S'(O;\mathbf{B}')$, on $\mathbf{B}'$ és la base ortonormal que s'obté en girar 30 graus la base $\mathbf{B}$ al voltant del vector $|e_3\rangle$.

(ii) Escriu les coordenades de P en el sistema de referència $S''(O;\mathbf{B}'')$, on $\mathbf{B}''$ és la base ortonormal $B''=\{|e_1\rangle,|e_2\rangle,-|e_3\rangle\}$.

[*Sol.: (i)* $(\frac{\sqrt{3}+1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2},1)$, *(ii)* $(1,1,-1)$]

' **3.–** Siguen P_1, P_2 els punts de coordenades $(1,0,-1)$ i $(2,1,-3)$ en un sistema de referència rectangular en un espai afí euclidià real.

(i) Calcula els cosinus directors dels vectors OP_1, OP_2, P_1P_2. Comprova que la suma dels seus quadrats val 1.

(ii) Calcula les distàncies entre P_1 i P_2, i d'ambdós a l'origen.

(iii) Determina els angles entre els vectors OP_1 i OP_2, P_2O i P_2P_1 i, finalment, entre P_1P_2 i P_1O.

[*Sol.: (i) cosinus directors d'*OP_1: $\cos\alpha_1=1/\sqrt{2}$, $\cos\alpha_2=0$, $\cos\alpha_3=-1/\sqrt{2}$; *cosinus directors d'*OP_2: $\cos\alpha_1=2/\sqrt{14}$, $\cos\alpha_2=1/\sqrt{14}$, $\cos\alpha_3=-3/\sqrt{14}$; *cosinus directors de* P_1P_2: $\cos\alpha_1=1/\sqrt{6}$, $\cos\alpha_2=1/\sqrt{6}$, $\cos\alpha_3=-2/\sqrt{3}$, *(ii) distància de* P_1 *a* P_2: $\sqrt{6}$; *distància de* P_1 *a l'origen:* $\sqrt{2}$; *distància de* P_2 *a l'origen:* $\sqrt{14}$, *(iii) cosinus de l'angle entre els vectors* OP_1 *i* OP_2: $5/2\sqrt{7}$; *cosinus de l'angle entre els vectors* P_2O *i* P_2P_1: $3\sqrt{3}/2\sqrt{7}$; *cosinus de l'angle entre els vectors* P_1P_2 *i* P_1O: $-\sqrt{3}/2$]

4.– Escriu les coordenades cilíndriques i esfèriques del punt P_1 del problema anterior.

[*Sol.: coordenades cilíndriques:* $(\rho, \theta, z) = (1, 0, -1)$, *coordenades esfèriques:* $(r, \theta, \phi) = (\sqrt{2}, 3\pi/4, 0)$]

5.– Escriu les equacions de l'esfera centrada en el punt P_1 del problema **3** i que passa pel punt P_2 del mateix problema en coordenades cartesianes, cilíndriques i esfèriques. Repeteix el problema en el sistema de referència definit per la mateixa base i un nou origen $O' = (1, 0, -1)$.

[*Sol.: equació en coordenades cartesianes:* $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 \leq 6$, *c. cilíndriques:* $\rho(\rho - 2\cos\theta) + (z+1)^2 \leq 5$, *c. esfèriques:* $r(r - 2\sin\theta(1 - \cos\phi)) \leq 4$; *equació en el nou sistema de referència en coordenades cartesianes:* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6$, *c. cilíndriques:* $\rho \leq \sqrt{6 - z^2}$, *c. esfèriques:* $r \leq \sqrt{6}$]