ÀLGEBRA I GEOMETRIA II

Grau de Física. Universitat de València

Butlletí 5. *Geometria analítica en l'espai*

1.– Troba les equacions paramètriques i cartesianes de les rectes següents:

$$r \equiv \frac{x_1 - 3}{2} = \frac{x_2 - 1}{1} = \frac{x_3 - 3}{0} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \frac{x_1 - 4}{-1} = \frac{x_2 - 3}{1} = \frac{x_3 - 8}{1}$$

[*Sol.: eqs. cartesianes de la recta* r*:* $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 1 &= 0 \\ x_3 - 3 &= 0 \end{cases}$ *, eqs. paramètriques:* $\begin{cases} x_1 &= 3 + 2\lambda \\ x_2 &= 1 + \lambda \\ x_3 &= 3 \end{cases}$ *;*

eqs. cartesianes de la recta s*:* $\begin{cases} x_1 + x_2 - 7 &= 0 \\ x_1 + x_3 - 12 &= 0 \end{cases}$ *, eqs. paramètriques:* $\begin{cases} x_1 &= 4 - \lambda \\ x_2 &= 3 + \lambda \\ x_3 &= 8 + \lambda \end{cases}$]

2.– Troba el pla que passa pel punt $(4, 3, 1)$ i és paral.lel als vectors $(1, 1, -2)$ i $(3, 0, -1)$.

[*Sol.:* $x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 22 = 0$]

3.– Troba el pla que passa pels punts P$(1, 0, -1)$, Q$(1, 3, 0)$ i R$(2, -1, 3)$.

[*Sol.:* $13x_1 + x_2 - 3x_3 - 16 = 0$]

4.– Troba el pla que passa pel punt $(1, 0, 1)$ i és paral.lel al pla $2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3 = 0$.

[*Sol.:* $2x_1 + 2x_2 - x_3 - 1 = 0$]

5.– Troba les equacions paramètriques del pla $2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2 = 0$.

[*Sol.:* $\begin{aligned} x_1 &= 1 + \mu \\ x_2 &= 1 + 3\lambda \\ x_3 &= -3 - \lambda - \mu \end{aligned}$]

6.– Verifica si són coplanaris els punts P$(2, -1, 0)$, Q$(3, 0, 1)$, R$(0, 2, -1)$ i N$(6, 0, 2)$.

[*Sol.: els punts no són coplanaris*]

7.– Estudia la posició relativa dels plans:

(i) $\begin{aligned} \Pi &\equiv x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 3 &= 0 \\ \Pi' &\equiv 3x_1 - 6x_2 + 24x_3 - 1 &= 0 \end{aligned}$, (ii) $\begin{aligned} \Pi &\equiv 2x_1 - x_2 - 3 &= 0 \\ \Pi' &\equiv 3x_1 + 2x_3 + 4 &= 0. \end{aligned}$

[*Sol.: (i) plans paral.lels no coincidents, (ii) es tallen en una recta*]

8.– Estudia la posició relativa de les rectes:

$$r \equiv \frac{x_1 - 3}{2} = \frac{x_2 - 1}{1} = \frac{x_3 - 3}{0} \qquad \text{i} \qquad s \equiv \frac{x_1 - 4}{-1} = \frac{x_2 - 3}{1} = \frac{x_3 - 8}{1}.$$

[*Sol.: les rectes es creuen*]

9.– Determina el valor de k per a que les rectes:

$$r \equiv \frac{x_1 - 2}{2} = \frac{x_2 - k}{3} = \frac{x_3}{-1} \qquad \text{i} \qquad s \equiv \frac{x_1 - 2}{-1} = \frac{x_2 - 1}{2} = \frac{x_3 - 3}{3}.$$

es tallen en un punt. Troba el punt de tall.

[*Sol.:* $k = -\frac{16}{5}$, *punt de tall:* $(\frac{16}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{3}{5})$]

10.– Estudia la posició relativa de les rectes i plans sigüents:

(i) $\begin{aligned} r &\equiv \frac{x_1 - 2}{-1} = \frac{x_2 + 1}{3} = \frac{x_3}{-2} \\ \Pi &\equiv 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2 = 0 \end{aligned}$, (ii) $\begin{aligned} r' &\equiv \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{-3} \\ \Pi' &\equiv 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 12 = 0. \end{aligned}$

[*Sol.: (i) es tallen en un punt, (ii) es tallen en un punt*]

11.– Estudia la posició relativa de les següents rectes i plans en termes dels paràmetres a i b.

(i) $r \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ x_2 - x_3 &= 2 \end{cases}$ i $\Pi \equiv x_1 - x_2 + bx_3 = 2a$

(ii) $s \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 &= a \\ 2x_1 + x_2 &= 6 \end{cases}$ i $t \equiv \frac{x_1 - 3}{0} = \frac{x_2 - 2}{4} = \frac{x_3}{1}.$

[*Sol.: (i)* $b \neq 3$*: es tallen en un punt,* $b = 3$ *i* $a \neq -4$*: paral.lels,* $b = 3$ *i* $a = -4$*: la recta està continguda en el pla; (ii)* $a = 7/2$*: es tallen en un punt,* $a \neq 7/2$*: es creuen*]

12.– Esbrina si les rectes:

$$r \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_3 &= -2 \end{cases} \qquad \text{i} \qquad s \equiv \frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2 + 2}{3} = \frac{x_3 - 5}{1}$$

són coplanaries y obtin un pla paral.lel a ambdues rectes que passe pel punt amb coordenadas $(1, 2, -3)$.

[*Sol.: les rectes no són coplanaries,* $13x_1 - 5x_2 - 11x_3 - 36 = 0$]

13.– Donades les rectes:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 & = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = 3 \end{cases}, \quad r_2 \equiv \begin{cases} x_1 & = 2 + \lambda \\ x_2 & = 2\lambda \\ x_3 & = -1 + \lambda \end{cases} \quad \text{i} \quad s \equiv \frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2}{-1} = \frac{x_3 - 1}{1},$$

troba la recta que talle a r_1 i a r_3 i siga paral.lela a r_2.

[*Sol.:* $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 1/7 & = 0 \\ x_1 - x_3 + 2/7 & = 0 \end{cases}$]

14.– Siguen $P(3, 4)$, $Q(-1, 0)$, $R(3, 2)$ les coordenades dels vèrtexs d'un triangle en un cert sistema de referència cartesià rectangular. Troba el punt de tall de les tres medianes i calcula l'àrea del triangle.

[*Sol.: punt de tall de les medianes:* $(5/3, 2, 0)$, *àrea del triangle: 4*]

15.– Calcula la perpendicular comuna a les rectes r i s en un sistema de referència cartesià rectangular:

$$r \equiv \frac{x_1 - 3}{2} = \frac{x_2 - 1}{1} = \frac{x_3 - 3}{0} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x_1 - 4}{-1} = \frac{x_2 - 3}{1} = \frac{x_3 - 8}{1}$$

i troba la distància entre elles.

[*Sol.: perpendicular comuna:* $\dfrac{x_1 - 3}{1} = \dfrac{x_2 - 2}{-2} = \dfrac{x_3 - 3}{3}$, *distància:* $6\sqrt{\dfrac{2}{7}}$]

16.– En un espai afí euclidià de dimensió 2, i respecte d'un sistema de referència cartesià rectangular, troba l'equació d'una recta que passe pel punt P$(3, -1)$ i que forme un angle de $\pi/4$ amb la recta $r \equiv x_1 + x_2 - 2 = 0$.

[*Sol.: existeixen dues rectes que compleixen amb les condicions de l'enunciat:* $-x_1 + 3 = 0$, $x_2 - 1 = 0$]

17.– Respecte d'un sistema de referència cartesià rectangular, troba la projecció ortogonal de la recta r sobre el pla Π següents:

$$r \equiv \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{-3} \quad \text{i} \quad \Pi \equiv 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 12 = 0.$$

[*Sol.:* $\begin{cases} x_1 & = 12/5 + 4/3\lambda \\ x_2 & = 24/5 + 7/6\lambda \\ x_3 & = -36/5 - 19/6\lambda \end{cases}$]

18.– Respecte d'un sistema de referència cartesià rectangular, troba l'equació del pla Π' que passa pel punt Q$(1, 0, -1)$, és perpendicular al pla Π i paral.lel a la recta r següents:

$$r \equiv \begin{cases} x_1 - 2x_2 & = 0 \\ x_3 & = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \Pi \equiv x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0.$$

[*Sol.:* $x_1 - x_2 - x_3 - 2 = 0$]

19.– Estudia de quin tipus són les següents còniques depenent del valor del paràmetre real a:

(i) $x^2 + y^2 + 2axy + 2x + 1 = 0$

(ii) $x^2 + 2ay^2 - 2axy - 2x + 4ay = 0$

[*Sol.:*]

20.– Considera la cònica $x^2 + y^2 + xy + 2x + 1 = 0$.

(i) Comprova que és una el·lipse.

(ii) Obtín la seua equació canònica i determina l'angle de la rotació efectuada.

(iii) Determina l'excentricitat de l'el·lipse.

[*Sol.:*]