ÀLGEBRA I GEOMETRIA II
Grau de Física. Universitat de València

Bulletí 6. *Tensors. Teoria algebraica*

1.– Quines de les següents aplicacions sobre vectors són formes lineals?

(i) L'aplicació $\varphi(v) = \lambda_i v^i$, on v^i $(i = 1, \ldots, n)$ són les components del vector $v \in \mathbf{E}$, respecte d'una certa base de l'espai vectorial real $\mathbf{E}$, de dimensió n, i $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

(ii) L'aplicació $\varphi(v) = (v^1)^2$, sent v^1 la primera component del vector $v \in \mathbf{E}$, respecte d'una certa base de l'espai vectorial real $\mathbf{E}$.

(iii) L'aplicació sobre l'espai vectorial real $\mathbf{E}$, $\varphi(v) = \lambda$, amb $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iv) L'aplicació sobre l'espai euclidià $\mathbf{E}$, $\varphi(v) = \langle v \,|\, w \rangle$, amb $w \in \mathbf{E}$.

[*Sol.: (i) lineal, (ii) no lineal, (iii) no lineal, (iv) lineal*]

2.– Siguen $\alpha(v)$ i $\beta(v)$ dues formes lineals sobre l'espai vectorial $\mathbf{E}$. Prova que l'aplicació definida pel producte de les seues imatges, $A(u, v) = \alpha(u)\beta(v)$, és una forma bilineal sobre el mateix espai vectorial.

3.– Comprova que el producte mixt de vectors a l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$ és una forma trilineal i determina les seues components en una base ortonormal.

4.– Comprova que, en $\mathbb{R}^n$, un determinant d'ordre n és una forma n-lineal de les seues n columnes (o files).

5.– A l'espai vectorial real bidimensional $\mathbf{E}$, considera la base $\mathbf{B} = \{e_i\}_{i=1}^2$ i el seu dual, $\{\theta^i\}_{i=1}^2$. Si $\omega = 3\theta^1 + 2\theta^2$, $\rho = \theta^1 - \theta^2$,

(i) Determina les components de $\omega \otimes \rho$ en la base $\mathbf{B}$, $(\omega \otimes \rho)_{ij}$.

(ii) Demostra que $(\omega \otimes \rho)(u, v) = (\omega \otimes \rho)_{ij}\, u^i v^j$, sent u^i, v^i $(i = 1, 2)$, respectivament, les components dels vectors $u, v \in \mathbf{E}$ en la base $\mathbf{B}$.

(iii) Demostra que $(\omega \otimes \rho)(u, v) \neq (\rho \otimes \omega)(u, v)$ $(u, v \in \mathbf{E})$.

[*Sol.: (i)* $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$]

6.– Considera l'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x, y) = (x - y, x + 2y)$, i la base de $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{B} = \{e_i\}_{i=1}^2 = \{(1, -1), (1, 1)\}$.

(i) Obtín la base dual de la base $\mathbf{B}$.

(ii) Determina les components en la base $\mathbf{B}$ del tensor mixt que defineix l'endomorfisme $\mathcal{A}$ i comprova que coincideixen amb els coeficients de la matriu de l'endomorfisme.

[*Sol.: (i)* $\theta^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\theta^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, *(ii) A=* $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$]

7.– Siga $\mathbf{E}$ un espai euclidià de dimensió 3 i $\mathbf{B} = \{e_i\}_{i=1}^3$ una base d'aquest espai de la que sabem que: i) $\langle e_1 \,|\, e_1\rangle = 1$, ii) $\langle e_2 \,|\, e_2\rangle = 1$, iii) $\langle e_3 \,|\, e_3\rangle = 2$, iv) $\langle e_1 \,|\, e_2\rangle = 0$, v) $\langle 2e_2 - e_3 |\, v_1\rangle = 0$ i vi) $\langle 2e_2 - e_3 |\, e_3\rangle = 0$. Determina les components de la mètrica en la base $\mathbf{B}$.

[*Sol.:* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$]

8.– A l'espai vectorial real de dimensió 3, $\mathbf{E}$, considera les bases $\mathbf{B} = \{e_i\}_{i=1}^3$ i $\widetilde{\mathbf{B}} = \{\tilde{e}_i\}_{i=1}^3$ tals que

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= e_1 - e_2 \\ \tilde{e}_2 &= e_3 \\ \tilde{e}_3 &= e_1 + e_2. \end{aligned}$$

(i) Escriu la matriu del canvi de base, $[B^i{}_j]$, que permet escriure els vectors de la base $\widetilde{\mathbf{B}}$ en termes de la base $\mathbf{B}$.

(ii) Expressa els vectors de la base $\mathbf{B}$ en termes de la base $\widetilde{\mathbf{B}}$ i escriu la matriu del canvi de base corresponent, $[\widetilde{B}^i{}_j]$. Comprova que és la inversa de la matriu $[B^i{}_j]$.

(iii) Expressa els vectors de la base $\{\tilde{\theta}^i\}_{i=1}^3$ en termes de la base $\{\theta^i\}_{i=1}^3$, i a la inversa, i escriu les matrius de canvi corresponents, $[C_j{}^i]$, $[\widetilde{C}_j{}^i]$. Quina relació tenen amb la matriu $[B^i{}_j]$?

(iv) Quines són les components dels tensors $T = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_3$ i $S = e_1 \otimes \theta^1 + 3e_1 \otimes \theta^3 - 2e_2 \otimes \theta^3 - e_3 \otimes \theta^1 + 4e_3 \otimes \theta^2$ en la base $\mathbf{B}$?

(v) Quines són les components dels tensors T i S en la base $\widetilde{\mathbf{B}}$?

[*Sol.: (i)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *(ii)* $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, *(iii)* $\widetilde{\theta}^i = C_j{}^i\theta^j$, $C = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\theta^i = \widetilde{C}_j{}^i\widetilde{\theta}^j$, $\widetilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *(iv)* $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$,
(v) $\widetilde{T} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -5 & 0 & 3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$]

9.– Siga $\mathbf{E}$ un espai vectorial real tridimensional i $\mathbf{B} = \{e_i\}_{i=1}^3$, una base de $\mathbf{E}$. Siga T el tensor contravariant d'ordre 2 les components del qual en aquesta base són $T^{ij} = \delta^{ij}$, S el tensor covariant d'ordre 2 les components del qual en aquesta base són $S_{ij} = \delta_{ij}$, i R el tensor mixt $(1,1)$ les components del qual en aquesta base són $R^i_j = \delta^i_j$. Obtín les components de T, S i R en la base $\widetilde{\mathbf{B}} = \{\tilde{e}_i\}_{i=1}^3$ definida per

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= e_1 + e_3 \\ \tilde{e}_2 &= 2e_1 + e_2 \\ \tilde{e}_3 &= 3e_2 + e_3. \end{aligned}$$

[*Sol.:* $\widetilde{T} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 41 & -17 & 1 \\ -17 & 19 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, $\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$, $\widetilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$]